

La paradoja de Banach-Tarski

José Fernando Isaza Delgado*

Universidad Jorge Tadeo Lozano, Bogotá

1. Introducción

Una paradoja es un resultado que parece ser esencialmente absurdo (James R. Newmann).

Lo que ayer fue una paradoja, puede hoy no serlo, pero puede volverlo a ser. Muchas de las paradojas en matemáticas tuvieron sus orígenes en la falta de claridad sobre el concepto del infinito. Los trabajos de Cantor en el siglo XIX resuelven buena parte de las paradojas que surgieron de los conjuntos infinitos.

Es bueno mencionar que el concepto de infinito es una construcción mental, o matemática, posiblemente en el mundo físico no existe el infinito. Aún en la teología este concepto conduce a paradojas. Un ejemplo “ligero” se expresa así: ¿Puede un ser infinitamente poderoso crear un objeto indestructible? Si la respuesta es sí, al no poder destruir el objeto ya dejó de ser infinitamente poderoso. Si la respuesta es no, entonces al no poder crear un objeto de la característica dada (indestructible) dejaría de ser infinitamente poderoso.

Un ejemplo más profundo se deduce del libro *El Judaísmo* de Hans Küng: ¿Cómo un

*Trabajo expuesto en la Segunda Escuela de Verano en Matemáticas, Universidad Sergio Arboleda, Bogotá, 13 de julio de 2007. Email: rectoria@utadeo.edu.co.

Dios infinitamente bondadoso y omnipotente permitió el Holocausto? La solución dada por W. Jonas fue: Dios es infinitamente bondadoso, pero el libre albedrío limita su omnipotencia.

En el caso que nos ocupa, una de las paradojas más sorprendentes del siglo XX es la denominada paradoja de Banach-Tarski la cual en su versión débil se expresa así:

Es posible dividir una bola B^3 , en el espacio \mathfrak{R}^3 , $B^3 = \{x \in \mathfrak{R}^3, \|x\| \leq r\}$, en cinco conjuntos disjuntos y por medio de isometrías reagrupar los cinco conjuntos, y formar dos bolas iguales a la inicial.

Como la operación puede repetirse indefinidamente una versión publicitaria de la paradoja de Banach-Tarski se expresa así:

Es posible dividir un frijol en un número finito de partes (cinco son suficientes), reagruparlas por medio de isometrías y formar un frijol del tamaño del Sol.

Una versión fuerte de la paradoja de Banach-Tarski se enuncia así:

Sean $A, B \subset \mathfrak{R}^3$ con interior no vacío. Es posible dividir A, B en un número igual de subconjuntos disjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n; B_1, B_2, \dots, B_n$ tal que $B_j \cong \sigma(A_j)$. El símbolo \cong significa equivalente por descomposición. El resultado es sorprendente cuando σ es una transformación isométrica.

2. Objetivos de esta conferencia

Los objetivos son dos:

- Elevar a la categoría de teorema una conjetura.
- Contribuir a un requerimiento.

2.1. Conjetura

Las matemáticas no sirven para nada útil. Esta conjetura es casi tan popular como las originales expresiones del siguiente tenor –Colombia es el mejor vivero del mundo. Solos no podemos. Entre todos lo lograremos. Lo mejor de Colombia es su gente. Los buenos somos ms . . .–.

Requerimiento

Querido Dios: Si solo me resta una hora de vida permíteme pasarla en una aburrida conferencia de matemáticas (como ésta), por que por el tedio producido esa hora me parezca eterna (adaptada de Leonard Wapner)

2.2. Algunas paradojas que ya no lo son

Paradoja de Zenon

Aquiles no puede alcanzar una tortuga, mucho más lenta que él; si ésta inicia la carrera con ventaja.

El conocido razonamiento de Zenon puede parafrasearse así:

Si la velocidad de Aquiles es 10 veces la de la tortuga, y ésta comienza la carrera con 10 unidades de ventaja, cuando Aquiles llega al punto donde originalmente estaba la tortuga, ésta ha avanzado una unidad. Cuando Aquiles llega a ese punto, la tortuga habrá avanzado $1/10$ de unidad, etc., y así nunca lo alcanzará.

Por supuesto Zenón conocía que existen series infinitas de suma finita, pero tal vez no sus interlocutores.

En cualquier instante la flecha ocupa una región del espacio igual a su longitud y no hay movimiento. Como esta observación es cierta en cada instante, la flecha nunca está en movimiento. Un método para resolver esta paradoja es recurrir al concepto de infinitesimales y a la aritmética no estándar (Mc Laughlin).

Paradojas que surgen del concepto de infinito

Descartes no aceptaba la posibilidad de existencia de una recta de longitud infinita, pues pensaba que tendría el mismo número de pies, que de pulgadas, lo cual le repugnaba. Galileo se extrañó que existieran tantos números naturales como cuadrados perfectos, si estos eran claramente menos numerosos que aquellos.

Cantor resuelve los problemas que surgen de los conjuntos con cardinales infinitos, definiendo que $\text{Card}(A) = \text{Card}(B)$, si existe una biyección de A en B , y expresa $A \sim B$, A es equivalente a B .

Se dice que $\text{Card}(A) \leq \text{Card}(B)$ si existe una aplicación inyectiva de A sobre un subconjunto de B . El teorema de Schröder-Bernstein permite concluir que si $A \leq B$ y $B \leq A$ entonces $A \sim B$; $\text{Card}(A) = \text{Card}(B)$.

Es elemental verificar que

$$\text{Card}(\mathbb{N}) = \text{Card}(\mathbb{Z}).$$

Basta considerar las siguientes inclusiones:

$$\begin{aligned} a) \quad \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ n &\longrightarrow n \end{aligned}$$

de donde $\text{Card}(\mathbb{N}) \leq \text{Card}(\mathbb{Z})$.

$$\begin{aligned}
 b) \quad \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{N} \\
 o &\longrightarrow o \\
 \text{si } n > o, \quad n &\longrightarrow 2n \\
 \text{si } n < o, \quad n &\longrightarrow 2n + 1,
 \end{aligned} \tag{1}$$

de donde $\text{Card}(\mathbb{Z}) \leq \text{Card}(\mathbb{N})$, por lo cual $\text{Card}(\mathbb{N}) = \text{Card}(\mathbb{Z})$.

Para demostrar que \mathbb{Q}^+ y \mathbb{N} son equivalentes,

$$\text{Card}(\mathbb{Q}^+) = \text{Card}(\mathbb{N}) \tag{2}$$

se consideran las siguientes funciones inyectivas

$$\begin{aligned}
 a) \quad \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{N} \\
 \left(\frac{a}{b}\right) &\longrightarrow 2^a 3^b, \quad \frac{a}{b} \text{ irreducibles,}
 \end{aligned}$$

la inyectividad es trivial por la unicidad de la factorización. De donde se deduce $\text{Card}(\mathbb{Q}^+) \leq \text{Card}(\mathbb{N})$.

$$\begin{aligned}
 b) \quad \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{Q}^+ \\
 n &\longrightarrow \frac{n}{1},
 \end{aligned} \tag{3}$$

de donde se concluye $\text{Card}(\mathbb{N}) \leq \text{Card}(\mathbb{Q}^+)$, por lo cual $\text{Card}(\mathbb{N}) = \text{Card}(\mathbb{Q})$.

Hoy no se considera una paradoja el hecho que un segmento de recta tenga el “mismo número de puntos” –la misma cardinalidad que toda la recta real –. Es suficiente considerar la biyección

$$\begin{aligned}
 [0, 1[&\xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^+ \\
 x &\longrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) \\
 \phi^{-1}(y) &= \frac{2}{\pi} \arctan(y).
 \end{aligned}$$

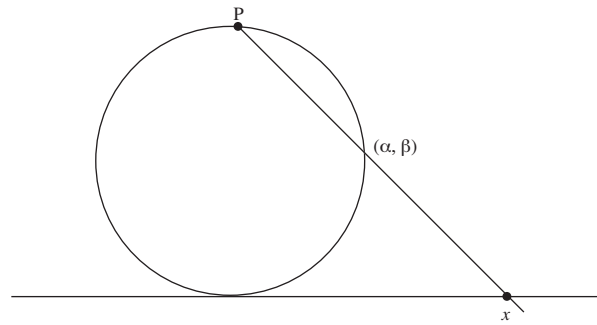


Figura 3:

Más interesantes son las proyecciones que muestran que $S^1 - \{P\} \sim \mathbb{R}$ y $S^2 - \{P\} \sim \mathbb{R}^2$. Estas biyecciones al agregarle el punto P permiten compactificar la recta real, o el plano complejo.

Si se quiere “alcanzar” fácilmente el infinito de la recta numérica, o el infinito del plano cartesiano, puede recurrirse a las tradicionales proyecciones (figura 3).

$$\begin{aligned}
 S^1 - P &\xrightarrow{\phi} \mathbb{R} \\
 (\alpha, \beta) &\longrightarrow \frac{2\alpha}{2 - \beta} \\
 \mathbb{R} &\xrightarrow{\phi^{-1}} S^1 - P \\
 x &\longrightarrow \left(\frac{4x}{4 + x^2}, \frac{2x^2}{4 + x^2} \right).
 \end{aligned}$$

Los infinitos, $+\infty$ y $-\infty$, corresponden a P . De donde

$$\text{Card}(S^1 - P) = \text{Card}(\mathbb{R}). \quad (4)$$

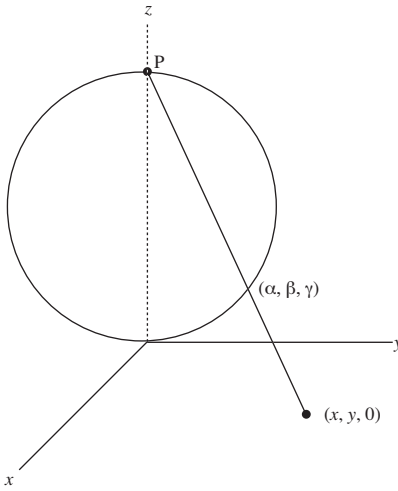


Figura 4:

De manera análoga (figura 4)

$$\begin{aligned} S^2 - P &\xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^2 \\ \phi(\alpha, \beta, \gamma) &\longrightarrow \left(\frac{2\alpha}{2-\gamma}, \frac{2\beta}{2-\gamma} \right) \\ \mathbb{R} &\xrightarrow{\phi^{-1}} S^1 - P \\ \phi^{-1}(x, y, 0) &\longrightarrow \left(\frac{4x}{x^2 + y^2 + 4}, \frac{4y}{x^2 + y^2 + 4}, \frac{2(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 + 4} \right). \end{aligned}$$

Mucho antes que los matemáticos los poetas sabían que es posible sostener en la mano
 ... el infinito:

“En un grano de arena contemplar el mundo.

Y en una flor silvestre el cielo vislumbrar.

Sostener en la mano el infinito.

Y la eternidad en una hora condensar”,

William Blake.

Para quienes trabajan en relatividad general, y en particular en agujeros negros, el último renglón del verso es tan evidente como lo es para el matemático sostener en la mano el infinito.

3. El malo del paseo. “El axioma de elección”

En la frustrada búsqueda de preservar la consistencia de la matemática un hito lo constituye la formalización de la teoría de conjuntos. Los nueve axiomas de Zermelo-Fränkel (ZF) permiten construir los números naturales y por consiguiente todo el sistema numérico, completándose así el reto de la “aritmétización del análisis”. Se espera que estos axiomas no tengan contradicción, y que toda la matemática pueda deducirse de ellos. Por supuesto que Gödel destruye una de las esperanzas, al mostrar que en cualquier sistema axiomático que permita construir los números naturales y la operación de adición habrá proposiciones indecidibles. Algunos han comparado la construcción del sistema axiomático (ZF) como el trabajo de un buen pastor que cerca a su rebaño para protegerlo del lobo pero al hacerlo puede dejar el lobo adentro.

No falta quien quiera afirmar que el papel del lobo lo juega el axioma de elección por los resultados tan alejados de la intuición que pueden demostrarse a partir de él.

Para hacer explícito el sistema de partida se denomina ZF el conjunto de axiomas sin el de elección y ZF+AE, con el axioma de elección.

3.1. Sistema axiomático ZF+AE

1. Dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos.
2. Existe el conjunto vacío.

3. Si x y y son conjuntos entonces $\{x, y\}$ es un conjunto.
4. La unión de un conjunto de conjuntos es un conjunto.
5. Existe un conjunto infinito.
6. Cualquier propiedad que pueda ser formalizada en el lenguaje de la teoría, puede ser utilizada para definir un conjunto.
7. Para cualquier conjunto existe un conjunto cuyos elementos son los subconjuntos, se denomina el conjunto de partes.
8. Para todo x , $x \notin x$
9. Axioma de elección. Si \mathcal{A} es una colección de conjuntos no vacíos, puede formarse un conjunto cuyos elementos correspondan a la escogencia de un elemento de cada conjunto de \mathcal{A} .

Otra versión más formal del axioma es: Si $X \neq \phi$, existe una función de elección $F : \mathcal{P}(X) - \phi \longrightarrow X$, tal que para todo $\mathcal{A} \subset X$, $\mathcal{A} \neq \phi$, $F(\mathcal{A}) \in \mathcal{A}$.

En 1938 Kurt Gödel demostró que el axioma de elección es independiente de los otros axiomas ZF. Para complicar la situación en 1963, Paul Joseph Cohen demostró que la negación del AE también es independiente de ZF (Macho).

Como la función de elección no es construible explícitamente, una escuela de la matemática la rechaza, son los denominados “intuicionistas”, sus principales exponentes son Brouwer y Poincar. El grupo complementario son los “formalistas”, escuela que está representada por los Bourbaki.

En el sistema ZF+AE la paradoja de Banach-Tarski PBT es un teorema (TBT). El cual nos puede parecer tan “absurdo” como a nuestros antepasados les debía parecer que el número de números naturales fuese igual al de números pares.

Sin ZF+AE, no podemos (por lo menos hasta ahora) demostrar, por ejemplo, los siguientes resultados:

Todo conjunto puede ser bien ordenado.

Todo espacio vectorial tiene una base.

Dos poliedros cualesquiera son equivalentes por descomposición finita.

Para todo conjunto existe un número ordinal y una función biyectiva entre ellos.

Dados dos conjuntos A y $B \neq \emptyset$, existe una función sobreyectiva de A en B o una función sobreyectiva de B en A .

Para comprender por qué es posible la existencia de PBT, debe mostrarse que el concepto de volumen, superficie o longitud no existe necesariamente para todos los conjuntos. Es decir, que existen conjuntos a los cuales no se les puede asignar una medida en el sentido de Lebesgue. No es de extrañar que estos conjuntos requieran para la construcción el axioma de elección.

3.2. Existen conjuntos no medibles, en el sentido de Lebesgue

Se nota $\mu(A)$ la medida del conjunto A en el sentido de Lebesgue. El carácter paradójico del TBT surge de las propiedades que se atribuyen al concepto de longitud, área o volumen, por ejemplo: si $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, A, B disjuntos, $\mu(A) > 0$, $\mu(B) > 0$, entonces $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) > \mu(A)$. Pero si $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $\mu(A \cap B) = \emptyset$, y no existe $\mu(A)$, $\mu(B)$, pero si $\mu(A) \cup \mu(B)$, entonces no puede deducirse $\mu(A \cup B) > \mu(A)$, ya que $\mu(A)$ no está definida.

Una propiedad de los conjuntos medibles, es que la medida se preserva por transformaciones isométricas (rotaciones y translaciones), $\mu(A) = \mu(\sigma(A))$ en donde σ es una isometría.

En 1906 Vitali muestra un ejemplo de un conjunto en \mathfrak{R} que no es medible en el sentido de Lebesgue.

Sea $A = [0, 1]$. Se define la siguiente relación

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}.$$

P. ej. $\sqrt{3}$ no es equivalente a $\sqrt{2}$.

Si $\sqrt{3} - \sqrt{2} = r \in \mathbb{Q}$. Se tiene $3 = r^2 + 2 + 2r\sqrt{2}$, de donde

$$\sqrt{2} = \frac{3 - 2 - r^2}{2r} \in \mathbb{Q}. \quad \text{¡contradicción!}$$

Es fácil demostrar que \sim es una relación de equivalencia. Sea \mathbb{M} el conjunto de las clases de equivalencia y sea C el conjunto de “elección”, $\text{card}(\mathbb{M}) = \mathcal{N}_1$.

Sea $C_r = C + r$, $r \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Como la medida de Lebesgue es invariante por translación, si $\mu(C)$ existe entonces $\mu(C_r) = \mu(C)$.

Se tiene

$$[0, 1] \subset \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]} C_q \subset [0, 2]. \quad (5)$$

En efecto, si $x \in [0, 1] \Rightarrow x \in [x]$, existe un $q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ tal que $x - \xi = q$, en donde ξ es el elemento elegido de $[x]$.

Si $x \in \bigcup C_q \Rightarrow \exists q, x \in C + q \Rightarrow x \in [0, 2]$, de (5) se deduce

$$\mu([0, 1]) \leq \sum_{q=1}^{\infty} \mu(C_q) \leq \mu([0, 2]).$$

Si $\mu(C_q) = 0$, entonces $1 \leq 0 \leq 2$.

Si $\mu(C_q) \neq 0$, entonces $1 \leq \infty \leq 2$. La contradicción demuestra que $\mu(C)$ no existe.

4. Demostración del teorema de Banach-Tarski

Las bases de la demostración han sido tomadas de Wagon (1995), Wapner (2005), Macho (2002) y Su (1990).

Recordemos algunas definiciones. Sea G un grupo y X un conjunto. Se dice que G opera sobre X por la izquierda, si existe una función

$$\begin{aligned}\psi : G \times X &\longrightarrow X, \text{ tal que} \\ g_1(g_2x) &= (g_1g_2)x \\ ex &= x, \quad e \text{ elemento unidad.}\end{aligned}$$

Si $x \in X$, $O_x = \{gx, g \in G\}$ se llama la órbita de x . El conjunto de órbitas define una relación de equivalencia y una partición de X .

G opera libremente sobre X si $gx \neq x$ para todo $g \neq e$.

G opera transitivamente sobre X , si para todo par de elementos $x, y \in X$, existe $g \in G$ tal que $y = gx$. En estas condiciones hay sólo una órbita en X .

Sea G un grupo, $a, b \in G$, una sucesión g_1, g_2, \dots, g_n de elementos de G se llama una palabra con relación a las cuatro letras a, a^{-1}, b, b^{-1} . Por ejemplo, $a^{-1}bab^{-1}ab$ es una palabra de seis letras.

La longitud de e se toma como cero.

Se asume que las palabras son reducidas si $g_i g_{i+1} \neq e$, es decir no hay términos consecutivos inversos el uno del otro.

El grupo generado no es abeliano, en efecto:

Si $ab = ba$ entonces $b^{-1}aba^{-1} = e$, lo que daría una palabra de longitud cero y 4 simultáneamente.

El grupo F generado por a, b, a^{-1}, b^{-1} se denomina grupo libre de orden 2.

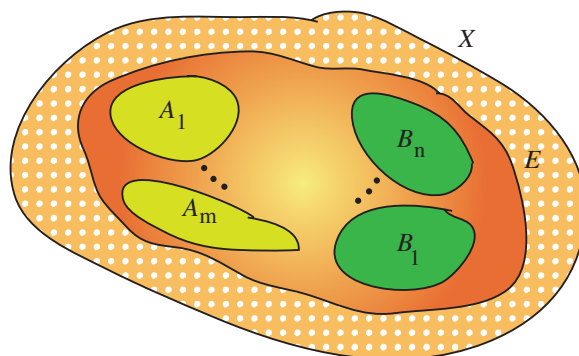


Figura 5:

4.1. Grupos paradójicos

Sea G un grupo que opera sobre un conjunto X . Suponemos que $E \subseteq X$. E es G -paradójico si existe m, n subconjunto disjuntos de E $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_n \subset E$, y $g_1, \dots, g_m, h_1, \dots, h_n \in G$ tales que (figura)

$$E = \bigcup_{i=1}^m g_i(A_i) = \bigcup_{j=1}^n h_j(B_j).$$

Lo que resulta paradójico es cuando el grupo G es un grupo de isometrías, puesto que si $\mu(A_i), \mu(B_j)$ existen, se tiene

$$E = \bigcup_{i=1}^m h_i A_i, \quad \mu(E) = \sum_{i=1}^m \mu(h_i A_i) = \sum_{i=1}^m \mu(A_i) = \sum_{i=1}^m \mu(B_i)$$

y sin embargo $\sum_{i=1}^m \mu(B_i) + \sum_{i=1}^m \mu(A_i) \leq \mu(E)$.

No es de extrañar que el teorema (o paradoja) de Banach-Tarski, requiera operar sobre conjuntos no medibles en el sentido de Lebesgue. –Los cuales existen aun cuando no son construibles en el sentido requerido por los intuicionistas.

No todos los conjuntos paradójicos, con respecto a un grupo G , son contraintuitivos. El siguiente elemental ejemplo ilustra lo anterior.

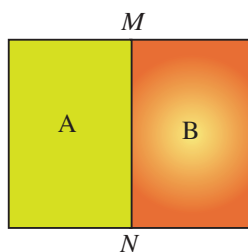


Figura 6:

Considérese el cuadrado G , formado por los conjuntos rectangulares A, B (para que sean disjuntos la línea M, N sólo pertenece a B (figura 6). Sea

$$\sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

la transformación que duplica las longitudes horizontales y deja iguales las verticales. Es claro que $C = \sigma(A) = \sigma(B)$, es paradójico con respecto al grupo $G = \{\sigma^i, i \in \mathfrak{R}\}$, pero σ no es una isometría, el resultado no es contraintuitivo.

Teorema

Si F es un grupo libre de rango 2, entonces F es paradójico.

Sean σ, τ los generadores de F , llamando $W(\sigma), W(\sigma^{-1}), W(\tau), W(\tau^{-1})$ las palabras que empiezan respectivamente por $\sigma, \sigma^{-1}, \tau, \tau^{-1}$. Se tiene

$$F = W(\sigma) \cup W(\sigma^{-1}) \cup W(\tau) \cup W(\tau^{-1}) \cup \{e\}.$$

Pero $F = W(\sigma) \cup \sigma W(\sigma^{-1}) = W(\tau) \cup \tau W(\tau^{-1})$.

Demostremos la primera igualdad:

Si $x \in F$ y $x \in W(\sigma) \Rightarrow x \in W(\sigma) \cup \sigma W(\sigma^{-1})$.

Si $x \in F$ y $x \notin W(\sigma)$, entonces $\sigma^{-1}x \in W(\sigma^{-1}) \Rightarrow x \in \sigma W(\sigma^{-1})$.

Teorema fundamental

Si G es un grupo paradójico que opera libremente sobre X , entonces X es paradójico.

Por ser G paradójico, existen $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m \subset G$ disjuntos, y $g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_m \in G$ tales que

$$G = \bigcup_{i=1}^n g_i A_i = \bigcup_{j=1}^m h_j B_j.$$

Si $x \in X$, sea $O_x = \{gx, g \in G\}$ la órbita de x por la acción de G . Por el teorema de elección se elige $\xi \in X$, de cada órbita. Sea M el conjunto resultante.

El conjunto

$$\bigcup_{g \in G} \{g\xi, \xi \in M\}.$$

es una partición de X . En efecto, si $x \in X \Rightarrow x \in O_x \Rightarrow \exists g \in G$, tal que $x = g\xi$, en donde $\xi \in M$. Hay que demostrar que los conjuntos dados son disjuntos.

Si $x \in \{g, \xi_1, \xi_1 \in M\} \cap \{g_2 \eta_2, \eta_2 \in M\}$, se tiene $x = g_1 \xi_1 = g_2 \eta_2 \Rightarrow \xi_1 = g_1^{-1} g_2 \eta_2$. Por lo tanto, ξ_1, η_2 están en la misma órbita. Como sólo hay un elemento en cada órbita $\xi_1 = \eta_2$, y $g_1^{-1} g_2 = e \Rightarrow g_1 = g_2$. Obsérvese que se utilizó la propiedad que el grupo opera libremente.

Se define:

$$A_i^* = \bigcup_{\xi \in M} \{g\xi, g \in A_i\}$$

$$B_j^* = \bigcup_{\xi \in M} \{g\xi, g \in B_j\}$$

Como los A_i, B_j son disjuntos, también lo son A_i^* y B_j^* , en efecto si $z \in M_i \cap M_j$ ($M_i = A_i^*$ ó B_j^* , $M_j = A_j^*$ ó B_j^*), entonces $z = g_1 \eta_1 = g_2 \xi_2 \Rightarrow \eta_1 = g_1^{-1} g_2 \xi_2 \Rightarrow$

$$\eta_1 = \xi_2, \quad \text{y} \quad g_1 = g_2,$$

Hay que demostrar que los conjuntos A_i^* , B_j^* , $i = 1, n$, $j = 1, m$, y los elementos del grupo G , $g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_m$ son los componentes de la definición de X como conjunto paradójico.

$$X = \bigcup_{i=1}^n g_i A_i^* = \bigcup_{j=1}^m h_j B_j^*.$$

En efecto, por ser G paradójico se tiene

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^n g_i A_i^* &= \bigcup_{i=1}^n g_i \left(\bigcup_{\xi \in n} \{g\xi, g \in A_i\} \right) = \bigcup_{\xi} \bigcup_{i=1}^n \{g_i g \xi, g \in A_i\} \\ &= \bigcup_{\xi \in n} \{g\xi, g \in G\} = X \end{aligned}$$

por ser G paradójico y operar asociativamente sobre X .

De igual forma se demuestra

$$X = \bigcup_{j=1}^m h_j B_j^*,$$

por lo tanto X es paradójico.

Teorema

SO_3 tiene un grupo libre de rango 2.

Este teorema lo demuestra Stan Wagon. Considérense las rotaciones φ, ψ (figura 7), con

$$\varphi = \psi = \arccos \left(\frac{1}{3} \right),$$

$$\varphi^\pm = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \mp \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \mp \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \psi^\pm = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \mp \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \mp \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

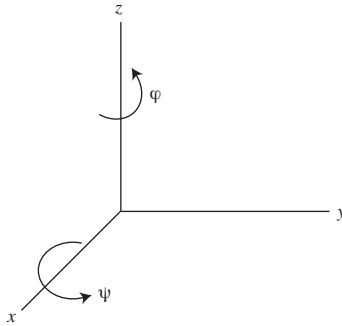


Figura 7:

En el anexo, siguiendo a Wagon, puede demostrarse que dos palabras formadas por el grupo libre de orden 2, no generan el elemento identidad. Propiedad que permite deducir que el grupo actúa libremente sobre $S^2 - \Omega$, en donde Ω es el conjunto numerable formado por la intersección de S^2 y los ejes de rotación del grupo libre, que es numerable. Nótese que es necesario “eliminar” Ω de S^2 , pues sobre Ω , el grupo no opera libremente.

Lema

$S^2 - \Omega$ es paradójico.

El cardinal del grupo libre, que llamaremos G , es enumerable. Cada palabra determina un eje de rotación, los únicos puntos fijos de la esfera con relación a la rotación son la intersección del eje con la esfera. Como G es paradójico, (todo grupo libre de orden 2 lo es), y actúa libremente sobre $S^2 - \Omega$, se deduce que $S^2 - \Omega$ es paradójico.

Siguiendo los mismos pasos de demostración del teorema fundamental, se concluye que $S^2 - \Omega$ puede descomponerse en 4 subconjuntos disjuntos, y por medio de isometrías generar dos copias de S^2 .

Los pasos siguientes tienen por objeto “eliminar” el conjunto numerable Ω , es decir

demostrar que S^2 y $S^2 - \Omega$, son esencialmente equivalentes. Para esto se requiere una nueva definición.

CONJUNTOS EQUIDESCOOMPONIBLES. Sea G un grupo que actúa sobre un conjunto X , $A, B \subset X$, se dice que A, B son G equidescomponibles y se nota $A \sim_G B$, si A, B pueden dividirse en una unión finita de partes disyuntas, $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n$ y existen $g_1, \dots, g_n \in G$ tales que

$$g_i(A_i) = B_i$$

$$A = \bigcup_{i=1}^n A_i, \quad B = \bigcup_{i=1}^n B_i = \bigcup_{i=1}^n g_i(A_i).$$

Nuevamente, el caso interesante corresponde a G , grupos de isometrías.

El siguiente lema realiza parte del trabajo (Macho).

Lema

Sea $\Omega \subset S^2$, formado por la intersección de S^2 con los ejes de rotación del grupo libre de orden 2, generado por ψ, φ . Existe una rotación ρ tal que $\rho(\Omega), \rho^2(\Omega), \rho^3(\Omega), \dots$ son dos a dos disjuntos.

Como Ω es numerable y S^2 tiene cardinalidad N_1 , existe $\rho \in S^2 - \Omega$. Sea ℓ un eje que pase por ρ y el origen. Sea ρ_θ una relación de ángulo θ alrededor de ℓ . Para $z \in \Omega$, sea $A(z) = \{\theta; \rho_\theta(z) \in \Omega\}$. Como Ω es numerable, $A(z)$ es numerable, y

$$A = \bigcup_{z \in \Omega} A(z),$$

es numerable, puede elegirse $\theta_0 \notin A$ entonces $\rho_{\theta_0}(z) \notin \Omega$, $\rho_{\theta_0}(\Omega) \subseteq S^2 - \Omega$, ρ_{θ_0} es el ρ buscado. Por construcción se tiene

$$\rho^n(\Omega) \cap \Omega = \phi,$$

por lo tanto, si $n > m$

$$\rho^n(\Omega) \cap \rho^m(\Omega) = \Omega \cap \rho^{m-n}(\Omega) = \phi.$$

Teorema

$$S^2 \sim_G S^2 - \Omega.$$

Sea ρ una rotación tal que $\rho(\Omega), \rho^2(\Omega), \dots$ sean dos a dos disjuntos. Sea

$$\begin{aligned} \bar{\Omega} &= \bigcup_{n=0}^{\infty} \rho^n(\Omega) = \Omega \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \rho^n(\Omega) \\ \Omega &\subset \bar{\Omega}. \end{aligned}$$

Como $S^2 = (S^2 - \Omega) \cup \Omega \subset (S^2 - \Omega) \cup \bar{\Omega}$, si $S^2 - \Omega \subset S^2$ y $\bar{\Omega} \subset S^2$, entonces $S^2 = \bar{\Omega} \cup (S^2 - \Omega)$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} \rho(\bar{\Omega}) &= \rho(\Omega) \cup \rho^2(\Omega) \cup \dots \cup \rho^n(\Omega) \cup \dots \\ \bar{\Omega} &= \Omega \cup \rho(\Omega) \cup \rho^2(\Omega) \cup \dots \end{aligned}$$

Se deduce $\bar{\Omega} - \rho(\bar{\Omega}) = \Omega$, por lo tanto $S^2 - \Omega = \rho(\bar{\Omega}) \cup (S^2 - \Omega)$, y como $S^2 = \bar{\Omega} \cup (S^2 - \Omega)$, se concluye que S^2 y $S^2 - \Omega$ son equidescomponibles (los elementos del grupo son ρ y e).

Corolario

S^2 es paradójico.

Resta demostrar que B^3 es paradójico (marta Macho).

A cada punto $z \in S^2$, se le hace corresponder el segmento $]0, z]$, esto permite descomponer la bola B^3 privado del origen en los 4 subconjuntos, que al transformarlos por medio de isometrías generan dos bolas B^3 privadas del origen.

Ahora hay que “eliminar” el origen, y mostrar que B^3 es “esencialmente” igual a $B^3 - (0, 0, 0)$; en términos más precisos, $B^3 \sim B^3 - (0, 0, 0)$.

Para esto sea P un punto al interior de la esfera S^2 tal que $d(0, P) = 1/2$. Sea ρ una rotación de centro P y ángulo θ tal que θ/π sea rotación ℓ . Los puntos $0, \rho(0), \rho^2(0), \dots$ son todos distintos. En efecto, si para $m \neq k$ se tiene

$$\begin{aligned} \rho_m(\theta) &= \rho_\mu(\theta) \\ \rho_{m-k}(\theta) &= 0, \quad (m-k)\theta = 2\pi r, \\ \frac{\theta}{\pi} &= \frac{2r}{m-k} \in Q, \quad \text{¡contradicción!} \end{aligned}$$

Sea

$$\begin{aligned} A_1 &= 0 \cup \rho(0) \cup \rho^2(0) \cup \dots \\ \rho(A_1) &= \rho(0) \cup \rho^2(0) \cup \rho^3(0) \cup \dots, \end{aligned}$$

de donde $\rho(A_1) = A_1 - \{0\}$. Sea $A_0 = B^3 - A_1$, se tiene $B^3 = A_0 \cup A_1$. Por otra parte, $A_0 \cup \rho(A_1) = B^3 - \{0\}$. Por lo tanto, $B^3 \sim_g B^3 - \{0\}$.

Dos profesores de la Universidad de Ohio (OSU) en Columbus han publicado una variante del Teorema de Banach-Tarski (TBT), en la cual los conjuntos en que se parte la bola unidad son conjuntos que tienen la propiedad de Baire, y una versión “atenuada” del TBT no usa para su demostración el axioma de elección.

El teorema se expresa así:

Sea X un espacio métrico separable y G un grupo numerable de homeomorfismos de X que actúan libremente sobre un subconjunto M “codelgado”. Sea $N \geq 1$ y suponer que G tiene un subgrupo libre de rango $3N$, con generadores f_{ij} ($i = 1, 2, 3, i \leq j \leq N$). Entonces existen subconjuntos abiertos disjuntos A_{ij} tales que para cada $j \subseteq N$, $f_{1j}(A_{1j} \cup f_{2j}(A_{2j} \cup f_{3j}(A_{3j}))$ es denso en X .

Para la demostración se emplea la propiedad de ordenar un conjunto numerable, esta propiedad no requiere de AE para su demostración.

Un conjunto A se llama “delgado” si es la unión numerable de conjuntos ninguno de los cuales es denso. Un conjunto “codelgado” es aquel cuyo complemento es delgado. Es importante recordar que la descomposición de B^3 que logra con 6 subconjuntos cada propiedad de Baire, al transformarlo por medio de isometrías no obtiene dos bolas B^3 . El carácter paradójico se pierde al considerar, por ejemplo que $\mu(\mathbb{Q}) = 0$, pero $\mu(\bar{\mathbb{Q}}) = 1$.

5. Epílogo

Quien no este familiarizado con la paradoja B-T, puede tener la impresión que los 5 subconjuntos en que se divide las bolas, tienen cierta estructura, por ejemplo que sean conexas, o que tengan interior no vacío. En realidad, como se demostró, la estructura es bien compleja, si bien son cinco conjuntos, cada uno de ellos está formado por un “número” de componentes no numerable, y todos son no conexos. Intuitivamente cada conjunto esta compuesto por un número de rectas de cardinalidad \aleph_1 .

La construcción de los conjuntos requiere el empleo del axioma de elección, sobre un conjunto de cardinal aleph uno, lo cual demuestra que desde cualquier punto de vista práctico es imposible de realizar.

Siguiendo a Volke Runde, con algo de sentido del humor podría decirse que la paradoja B-T explica el milagro de la multiplicación de los panes y los peces. Pero podría añadirse, si unos dios puede en un tiempo finito hacer la escogencia del conjunto de elección, en un conjunto infinito no numerable, bien podría, y tal vez con menos esfuerzo, si se puede hablar de esfuerzo en un ser omnipotente, realizar directamente el milagro sin recurrir a argucias lógicas.

El trabajo de los profesores Dougherty y Foreman si bien divide la esfera (y la bola)

en conjunto con algo de estructura, conjuntos de Baire, no necesariamente estos tienen característica de conjuntos Borelianos, pues serían medibles. Bien se conoce que aún los conjuntos Borelianos pueden ser extremadamente complejos. Es posible que pueda existir una división de la esfera en conjuntos como interior no vacío, pero debo confesar que no la conozco, este resultado haría aún mas paradójico el teorema B-T. Por supuesto que esos conjuntos no pueden ser medibles en el sentido de Lebesgue.

En un universo en el cual la constante de Planck \hbar , sea nula, pero que manejara la misma lógica del único cosmos que conocemos. Sin recurrir al axioma de elección, y aceptando la división de la bola en un número infinito, pero numerable, de partes, podría realizarse el siguiente experimento mental.

Elegir los punto $(\alpha, \beta, \gamma) \in B^3$, tales que $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{Q}^3$ por medio de una translación se tiene un conjunto tal que su clausura es B^3 , y por supuesto la clausura de la bola restante es también B^3 . Si se quisiera “vender” la bola formada por $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{Q}^3$, por ser digamos de oro, se encontraría que no vale nada por que su peso sería cero, pero su apariencia es de un sólido.

Quiero terminar con una frase de Ian Stewart, citada por Wapner:

“Una de las más molestas cosas que hacen los matemáticos es arrojar dudas sobre conceptos que imaginamos, entendemos perfectamente bien”.

Anexo

En la demostración de carácter paradójico de $S^2 - \Omega$, falta demostrar que el grupo libre actúa libremente sobre $S^2 - \Omega$ (los dos conceptos de libertad aquí no tienen relación) por esto se requiere que ninguna palabra produzca el elemento unidad. La siguiente demostración es de Stan Wagon.

Queremos mostrar que ninguna palabra reducida no trivial en ϕ^\pm, ρ^\pm igual la identidad. Como la conjugación por ϕ no afecta si una palabra se anula o no, podemos restringirnos a palabras que terminen por la derecha en ϕ^\pm . Entonces, para conseguir una contradicción, asumimos que w es una de tales palabras y w iguala la identidad.

Afirmamos que $w(1, 0, 0)$ tiene la forma $(a, b\sqrt{2}, c)/3^k$, donde a, b, c son enteros y b no es divisible por 3. Esto implica que $w(1, 0, 0) \neq (1, 0, 0)$, que es la contradicción requerida. La afirmación se prueba por inducción sobre la longitud de w . Si w tiene longitud uno, entonces $w = \phi^\pm$ dy $w(1, 0, 0) = (1, \pm\sqrt{2}, 0)/3$. Suponer entonces que $w = \phi^\pm w'$ o $w = \rho^\pm w'$ donde $w'(1, 0, 0) = (a', b'\sqrt{2}, c)/3^k$ donde $a = a' \mp 4b', b = b' \pm 2a', c = 3c'$, o $a = 3a', b = b' \mp 2c', c = c' \pm 4b'$ de acuerdo a como w comience, con ϕ^\pm o ρ^\pm . Ello sigue que a, b, c son siempre enteros.

Queda sólo por demostrar que b nunca llega a ser divisible por 3. Surgen 4 casos de acuerdo a que w sea igual a $\phi^\pm \rho^\pm v, \rho^\pm v, \phi^\pm \phi^\pm v$, o $\rho^\pm \rho^\pm v$ donde v es posiblemente la palabra vacía. En los primeros dos casos, usando la notación y ecuaciones del párrafo previo, $b = b' \mp 2c'$ donde 3 divide c' o $b = b' \pm 2a'$ donde 3 divide a' . Así si b' no es divisible por 3, tampoco lo es b . Para los otros dos casos, sea a'', b'', c'' entonces los enteros se originan en $v(1, 0, 0)$. Entonces, en uno u otro caso, $b = 2b' - 9b''$. Por ejemplo, en el tercer caso, $b = b' \pm 2a' = b' \pm 2(a'' \mp 4b'') = b' + b'' \pm 2a'' - 9b'' = 2b' - 9b''$; una prueba esencialmente idéntica se aplica en el cuarto caso. Así si b' no es divisible por 3, tampoco lo es b , completándose así la prueba.

Referencias

- [1] Wagon Stan “The Banach Tarski Paradox”, Cambridge University Press 1999.

- [2] Wapner Leonard “The pea and the Sun” A K Peters Ltd. 2005.
- [3] Macho Marta “La Paradoja de Banach Tarski: como construir el Sol a partir de un guisante” Universidad del país Vasco. mtpmastm@lg.ehu.es.
- [4] Su Francis Edgard “The Banach Tarski Paradox” Harvard University 1990. math.hmc.edu/su/papers.html
- [5] Dougherty Randall y Foreman Matthew “Banach-Tarski Paradox, using pieces with the property of Baire” Proc Nat Acad. Sa. USA. Vol 89 pp 10726-10728. November 1992. Una versión más extensa, con el mismo título fue publicado en 1991, en la Universidad Estatal de Ohio State University, Columbus.
- [6] McLaughlin William, “Resolving Zeno’s Paradoxes”, Scientific American, November 1994.