ADELINA OCAÑA GÓMEZ
MARIO ERNESTO PÉREZ RUIZ

SEGUNDA EDICIÓN

MATEMÁTICAS BÁSICAS

UNIVERSIDAD DE BOGOTÁ
JORGE TADEO LOZANO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES E INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

MATEMÁTICAS BÁSICAS

Universidad de Bogotá
JORGE TADEO LOZANO

Facultad de Ciencias Naturales e Ingeniería • Departamento de Ciencias Básicas

Ocaña Gómez, Adelina

Matemáticas básicas / Adelina Ocaña Gómez, Mario Ernesto Pérez Ruiz. -- 2a. ed. -- Bogotá : Fundación Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano, 2010.

262 p.; 22 cm.

ISBN: 978-958-725-056-5

1. MATEMÁTICAS. 2. NÚMEROS REALES. 3. ÁLGEBRA. I. Pérez Ruiz, Mario Ernesto. tit

CDD510'o11°

Fundación Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano
Carrera 4 Nº 22-61 – PBX: 242 7030 – www.utadeo.edu.co

MATEMÁTICAS BÁSICAS
Adelina Ocaña Gómez
Mario Ernesto Pérez Ruiz

ISBN: 978-958-725-056-5
Segunda edición: 2011

Rector: José Fernando Isaza Delgado
Vicerrector Académico: Diógenes Campos Romero
Decano de la Facultad de Ciencias Naturales e Ingeniería: Daniel Bogoya Maldonado
Director del Departamento de Ciencias Básicas: Favio Ernesto Cala Vitery
Director editorial (e): Jaime Melo Castiblanco
Revisión de estilo: Julio Mateus
Diagramación: Felipe Duque Rueda
Ajustes segunda edición: Denise Rodríguez Ríos
Portada: Felipe Duque Rueda
Coordinación administrativa: Henry Colmenares Melgarejo

MATEMÁTICAS BÁSICAS

ADELINA OCAÑA GÓMEZ
MARIO ERNESTO PÉREZ RUIZ

Agradecimientos

El Departamento de Ciencias Básicas de la Universidad Jorge Tadeo Lozano agradece la valiosa colaboración de los siguientes profesores quienes, al implementar el material del presente libro en los cursos de Matemáticas Básicas, hicieron importantes observaciones que ayudaron en su consolidación:

Andrés Mauricio Romero Mora
Nivia Esther Yela Caicedo
Luis Alfonso Sánchez Bernal
Delfina Ovalle Carranza
Irina Reyes
Julio David Gil Quintero
Juan Jesús Cruz Mora

ÍNDICE GENERAL

PRESENTACIÓN

Estudios estadísticos han mostrado que los estudiantes que toman un curso de Matemáticas Básicas tienen mejores resultados académicos en los cursos posteriores donde se suponen estos fundamentos. En apoyo de un curso como este se ha elaborado un material con presentación agradable; en lenguaje sencillo, claro; de lectura atractiva, para que al ser trabajado concienzudamente por ellos les ayude a alcanzar el propósito de nivelar los conocimientos básicos del álgebra.

El libro contiene cuatro unidades. La primera, sobre *números reales*; en ella se hace un recorrido por las operaciones básicas en dicho conjunto: suma, resta, multiplicación, división y potenciación. Un especial cuidado se ha tenido en las operaciones con los números enteros y con los racionales, ya que con éstas usualmente se presentan muchas dificultades. La segunda unidad gira en torno al manejo de *las expresiones algebraicas*, particularmente, las polinómicas. Las operaciones: suma, resta, multiplicación y división entre polinomios son abordadas indicando con detalle los procesos que se siguen para la realización de cada una de ellas. La tercera unidad avanza en el proceso de *factorización*, agrupándola en tres casos que cobijan los más utilizados y requeridos en cursos posteriores: factor común, binomios y trinomios. En la cuarta y última unidad, *ecuaciones*, se indica cómo resolver ecuaciones de primer y segundo grados. Aquí se enfatiza la traducción verbal a símbolos algebraicos.

Cada unidad consta de las siguientes partes:

— *Introducción*: se hace una breve justificación de la escogencia del tema a estudiar y un resumen de los contenidos que se incluyen.

— *Situación inicial*: se presenta un problema que busca motivar el estudio de algunos contenidos de la unidad. Con el auxilio de la teoría se da respuesta a las preguntas que allí se formulan.

— *Secciones*: se desarrollan los contenidos con ejemplos ilustrativos y ejercicios.

— *Ejercicios de repaso de la unidad.*

Se recomienda al estudiante leer con anterioridad los contenidos que se tratarán en cada clase y seguir con detalle los ejemplos desarrollados, deteniéndose en cada paso, de modo que el proceso le sea claro, para así abordar en mejores condiciones los ejercicios propuestos. Realizar algunos de estos ejercicios antes de la clase le permitirá establecer el nivel de comprensión que ha tenido de la lectura, y así aclarar las dudas que surjan, en clase, o en los apoyos extraclase que ofrece la Universidad.

El éxito del curso depende en gran medida de una actitud positiva, una asistencia regular y un compromiso con las actividades que él demande.

¿Para qué sirven las matemáticas?

La inmensa mayoría de los matemáticos dirá que las matemáticas son bellas de por sí, que se justifican a sí mismas. Pero las matemáticas son además necesarias, o más bien, indispensables. Podrían ser la ciencia invisible: parte de su mérito consiste en estar detrás de múltiples facetas de la vida cotidiana, ocultas pero esenciales. Y son también el motor del cambio: no hay avión, robot, computador… tecnología del futuro, que no se alimente de matemáticas. Algunas de estas facetas se reflejan en las siguientes situaciones:

¿Habrá que sacar hoy el paraguas? Las matemáticas son esenciales para predecir qué tiempo hará. Para ello se divide la atmósfera que envuelve al planeta en cajas imaginarias de cerca de 50 kilómetros de lado y entre algunas decenas y centenas de metros de alto. Por medio de los satélites y las estaciones meteorológicas se toman datos climáticos de estas cajas y se introducen todas las variables en potentes ordenadores que las combinan con las leyes de la dinámica y la física en complicados cálculos para predecir cómo se comportará el tiempo en los siguientes días. A más largo plazo, y con modelos matemáticos similares a estos que incorporan las interacciones de la atmósfera con los océanos, los hielos o la biosfera, se estudian también los posibles efectos del cambio climático.

¡Lo siento, no hablo español! A veces consideradas un lenguaje universal, las matemáticas resultan también indispensables para la traducción automatizada de cualquier idioma, desde el francés al zulú. Esto es así porque los programas informáticos de traducción se basan en estadísticas y probabilidades, junto a enormes bases de datos de palabras, para dar con la traducción más correcta de cada término.

¡Coge el teléfono! Marcar un número y hablar con alguien a través de un teléfono móvil es más complicado de lo que parece. Solo la norma GSM (Global System for Mobile Communications), que permite conectar un receptor con otro, supone más de 5.000 páginas de especificaciones técnicas. Las matemáticas y los algoritmos no sólo consiguen simplificar este proceso, sino que son fundamentales en cada uno de los pasos de una llamada: la transformación de la voz en series numéricas, su envío por ondas hertzianas, el encriptado de la comunicación, la gestión de las distintas frecuencias de radio de cada operador...

Comunicación blindada: cómo encriptar una conversación telefónica para que no sea escuchada por otras personas, o cómo garantizar la seguridad de una tarjeta de crédito. Desde la II Guerra Mundial, donde los matemáticos jugaron un papel determinante en el descifrado de mensajes secretos, esta ciencia constituye la pieza clave de muchos de los sistemas de seguridad usados de forma cotidiana. Un buen número de estos sistemas se basan en el protocolo RSA, construido en torno a la idea de que, si bien se pueden construir cifras enormes a partir de números primos $(N = p \cdot q)$, resulta muy complicado hallar los factores p y q cuando sólo se conoce N.

¡Puja y gana! ¿Qué tiene que hacer una persona para sacar el máximo beneficio a la hora de pujar en una subasta? La teoría de los juegos, creada por el matemático de origen húngaro John Von Neumann en los años 1920-1940, analiza los diversos actores y sus diferentes estrategias para anticiparse a ellos. Un ejemplo: en una situación simétrica en la que unos piensan lo mismo que los otros, un postor debe buscar el máximo beneficio sabiendo que los demás van a seguir la misma estrategia que la de él.

¿Se caerá este rascacielos? Los números han permitido también elaborar complejos modelos matemáticos para representar prácticamente cualquier sólido o fluido en un ordenador y simular cuál será su comportamiento en la realidad. Es decir, predecir de alguna forma el futuro. Estos modelos son ya utilizados para analizar la estabilidad de rascacielos y puentes ante un terremoto o para simular el aterrizaje de una sonda espacial en un lugar remoto. En estos momentos se intenta también reproducir los órganos del cuerpo humano en un ordenador y llegar a saber con antelación cómo responderá un paciente en un quirófano durante una operación.

La probabilidad de desarrollar un cáncer. Muchas enfermedades tienen un componente hereditario, lo que significa que una persona puede estar más predispuesta a padecer un mal si es portador o no de un determinado gen. Así ocurre con el gen BRCA1, cuya mutación se descubrió en 1990 y que está implicada en un porcentaje elevado de mujeres con cáncer de mama. Para hallarlo, los investigadores tuvieron que apoyarse en múltiples análisis estadísticos sobre personas emparentadas.

De *Parque Jurásico* a *Star Wars*. Conseguir que unos juguetes cobren vida en la pantalla de cine o que el ataque de un tiranosaurio rex haga agarrarse a los espectadores de sus asientos es posible, en gran medida, gracias a las matemáticas. Muchos de los efectos especiales más alucinantes del cine o las películas de animación son una combinación de pixeles y formas geométricas creadas a partir de matemáticas por medio de programas informáticos.

Revivir el pasado. Reconstruir una vasija rota nunca es fácil. Pero qué pasa si ésta además tiene siglos de antigüedad y debe ser recompuesta sin saber cómo era a partir de cientos o miles de pequeños fragmentos desordenados e incompletos. Las matemáticas son igualmente una herramienta indispensable para la arqueología, pues permiten reconstruir superficies de todo tipo e incluso partes de un cuerpo humano a partir de unos pocos restos antiguos. Las piezas disponibles son digitalizadas e introducidas en programas informáticos que recomponen el objeto de forma virtual por medio de geometría, combinaciones y estadísticas.

Conservando el medio ambiente. La combinación de las matemáticas y la ecología permite comprender muchas de las complejas interacciones de la naturaleza. Con ayuda del álgebra, simulaciones numéricas, procesos estocásticos, ecuaciones diferenciales o estadística se pueden crear modelos con los cuales determinar, por ejemplo, qué extensión se necesita proteger para conservar una determinada población de animales o a qué ritmo se propagará una especie de planta invasora.

Música y literatura. Sea una ópera de Mozart o la guitarra de Keith Richards, toda la música que se almacena en un CD está formada por largas series de ceros y unos. Pero ésta no es, ni mucho menos, la única relación de las matemáticas con la música y con el arte. La composición musical está ligada íntimamente a las matemáticas, al igual que muchas pinturas y obras de arte. En la literatura, las matemáticas están presentes en clásicos como *Alicia en el país de las maravillas* o *Los viajes de Gulliver*. Y en el caso de Borges, que estudió matemáticas durante varios años, la impronta de esta ciencia aparece en toda su obra, en especial en su cuento *El Aleph*, que ya en el nombre se refiere a una teoría matemática que expone cómo el todo no es necesariamente mayor que las partes.

(Tomado del International Congress of Mathematicians, ICM, 2006, Madrid).

UNIDAD

1

Los números reales

BREVE HISTORIA DE LOS NÚMEROS

Los ***números naturales*** **(N)** son aquellos que usamos para contar.

En la prehistoria, las tribus más primitivas apenas distinguían entre "uno" y "muchos".

Más adelante, utilizaron un lenguaje corporal (dedos, mano, pie...) y con ayuda de ramas, piedras, etc., lograron contar números cada vez mayores.

Los símbolos que representan a los números naturales no han sido siempre los mismos.

- En Mesopotamia se representaban en forma de cuña.
- En Egipto, mediante jeroglíficos.
- En Grecia, con las letras de su alfabeto.
- En Roma, los símbolos que se usaron fueron los siguientes:
  I = 1 ; V = 5 ; X = 10 ; L = 50 ; C = 100 ; D = 500 ;
  M = 1.000

- Los símbolos de nuestro sistema de numeración actual los introdujeron los árabes y son de origen hindú: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

La representación de los números con una marca por cada elemento no es práctica para números grandes. Con el desarrollo humano se hizo necesaria una mejor forma de representar los números; una de las primeras ideas utilizadas fue la agrupación, en la cual se usan tantos símbolos como sea necesario, colocándolos de izquierda a derecha o viceversa, de arriba a abajo, o en la posición que se quisiera. Por ejemplo, los egipcios usaban los símbolos $|$, $\cap$ y ϑ para 1, 10 y 100 respectivamente y representaban el número 236 así:

ϑ ϑ ∩ ∩ ∩ | | | | | |

ó ϑ
ϑ
∩ ∩ ∩
| | | | | |

Luego, la idea decisiva fue la de utilizar el principio posicional (como en nuestro sistema decimal) para representar los números: un mismo símbolo puede tener un valor distinto dependiendo de la posición que ocupe.

En el sistema de los números naturales, ecuaciones del tipo $x + 1 = 0$, no tienen solución; situaciones de la vida real como deudas, depresiones del terreno, temperaturas bajo cero, no son posibles de representar con tales números. Surge así la necesidad de extender el sistema de los números naturales a un nuevo sistema en el que tales ecuaciones y situaciones sean posibles. El nuevo conjunto se denomina ***números enteros***, y se simboliza por la letra Z.

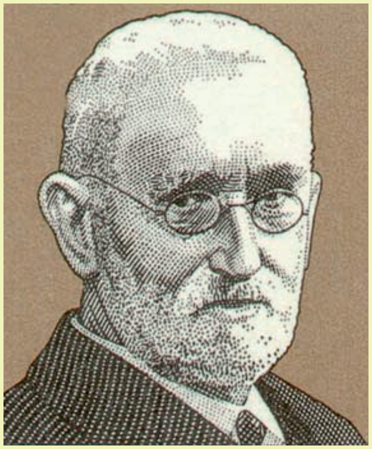
Al estudiar la operación de multiplicar en los números enteros, se observa que la operación inversa, la división, no es siempre posible. Por ejemplo, $4 \div 5$ carece de sentido en los enteros. Surge, por tanto, la necesidad de extender el sistema de los números enteros a uno nuevo en el que tengan sentido tales operaciones. Éste recibió el nombre de sistema de los ***números racionales***, simbolizado con la letra Q.

La introducción de los diversos sistemas numéricos no ha sido secuencial. Así, en el siglo VII a. C. los

George CANTOR (1845-1918)
Matemático alemán nacido en San Petersburgo (ahora Leningrado, Rusia) y fallecido en Halle. Ya en la escuela, Cantor mostró talento por las matemáticas, haciendo posteriormente de ellas su profesión, obteniendo el puesto de profesor en la Universidad de Halle en 1872. Cantor construyó una estructura lógica completa, en la cual se postulaba que una serie completa de números transfinitos, representaba diferentes órdenes de infinitos. De esta manera todos los números racionales podían establecer una igualdad a la serie de números enteros, pero no así los números racionales más los irracionales. Estos eran los números reales y representaban números transfinitos más elevados que los números enteros. Así la definición de Cantor de número real identifica a este último con una sucesión convergente de números racionales.

Richard DEDEKIND (1831 - 1916)

Este matemático alemán nació y murió en la ciudad de Braunschweig. Fue una figura clave en el surgimiento de la matemática conjuntista y estructural del siglo XX. Su obra y su importancia han sido revaluadas en los últimos treinta años, resultando que no deja de crecer la estimación que de él se tiene. Hasta cierto punto, se le puede considerar un moderno Euclides: dejó una huella muy importante en los elementos de la matemática. Durante el siglo XX, a Dedekind se le ha conocido sobre todo por su aportación a los fundamentos del sistema numérico (definiciones de los números reales y naturales), pero su principal contribución como investigador fue en el terreno del álgebra y sobre todo la teoría de números algebraicos.



griegos descubrieron los ***números irracionales***, es decir, los que no pueden ser expresados a través de una fracción, por ejemplo, al comparar la diagonal y el lado de un pentágono regular o la diagonal y el lado de un cuadrado; estaban familiarizados con la extracción de las raíces cuadradas y cúbicas pero no conocían los números negativos ni el cero, tampoco tenían un sistema de símbolos literales bien desarrollado.

El predominio, en esta época, de la geometría, fue la causa de que la aritmética y el álgebra no evolucionaran independientemente. Verbigracia, los elementos que intervienen en los cálculos se representaban geométricamente y las magnitudes irracionales las tomaban como segmentos de recta.

Fueron los hindúes, entre los siglos V y XV, los que inventaron el sistema de numeración actual, introdujeron los números negativos y comenzaron a operar con los números irracionales de forma semejante que con los racionales, sin representarlos geométricamente. Durante el periodo renacentista, entre los siglos XVI y XVIII, los europeos toman contacto con las ideas griegas a

Karl WEIERSTRASS (1815 - 1897)

Matemático alemán considerado como el «padre del análisis moderno». Nació en Ostenfelde y murió en Berlín. Estudió matemáticas en la Universidad de Münster, además de sus prolíficas investigaciones cabe señalar que fue profesor de cátedra en la Universidad de Berlín en la cual tuvo entre sus discípulos a Georg Cantor, Ferdinand Georg Frobenius, Wilhelm Killing, Leo Königsberger, Carl Runge y Sofia Kovalévskaya.

través de traducciones árabes, reemplazándolas, paulatinamente, por los métodos hindúes.

Es importante resaltar que el conocimiento de los números por parte de los griegos no fue superado sino hasta veinticuatro siglos más tarde. Los matemáticos G. Cantor, R. Dedekind, K. Weiertrass y B. Bolzano fueron quienes culminaron la obra, que duró medio siglo de investigaciones, sobre los números racionales e irracionales, que considerados juntos, constituyeron el sistema de los ***números reales***.

Bernard BOLZANO (1781 - 1848)

Matemático checoslovaco nacido y fallecido en Praga. Tras estudiar teología, filosofía y matemáticas, fue ordenado sacerdote en 1805 y se le confió la cátedra de filosofía religiosa en su ciudad natal, donde sus tendencias librepensadoras le valieron una acusación ante Roma. Fijó el concepto de la distancia y distinguió el máximo de una función y su límite superior, enunciando varios teoremas universalmente conocidos. Las inquietudes científicas de Bolzano resultaron muy avanzadas para su tiempo, preocupado como estaba por los fundamentos de varias ramas de la matemática, a saber, la teoría de las funciones, la lógica y la noción de cardinal.

Introducción

Los números reales (aquellos con representación decimal finita o infinita) aparecen en muchas de las cantidades que se emplean en la modelación matemática del mundo físico y económico, cantidades que se supone varían de manera "continua".

En esta unidad el estudiante encontrará un tratamiento básico del sistema de los números reales; se identifica el conjunto que lo forma (con algunos subconjuntos especiales) y se precisan varias propiedades de las operaciones que en él se definen, las cuales serán de uso frecuente en el álgebra.

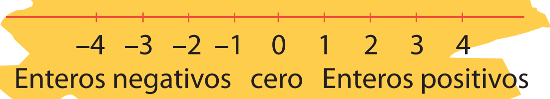
Situación inicial

Un objeto, cuya temperatura es de quince grados centígrados, se introduce en un congelador; transcurridas dos horas el objeto tiene una temperatura de diez grados bajo cero.
a) ¿Cuál fue la variación de temperatura?
b) ¿Cuál fue el cambio promedio de temperatura?

1.1. Los números enteros

Cantidades como quince grados centígrados o diez grados centígrados bajo cero pueden ser representadas como: +15°C, –10°C, respectivamente.
Números como +15 y –10 son ejemplos de números enteros.

Conjunto de los números enteros:
$Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3\ldots\}$

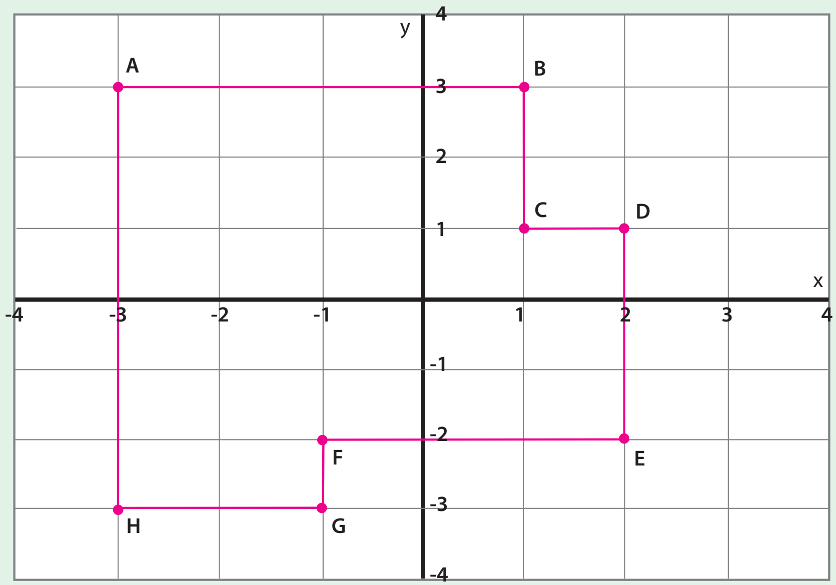


Con frecuencia se prescinde del signo + para indicar un entero positivo. Así, +5 se representa simplemente como 5. Números como +5 y –5 se llaman opuestos.
Los números enteros también se utilizan para modelar situaciones relacionadas con:

- Consignaciones o retiros en una cuenta bancaria.
- Sucesos que ocurrieron antes o después de un momento específico.
- Alturas y profundidades con respecto al nivel del mar.
- La solución de ecuaciones, como $x + 5 = 3$.

EJERCICIO 1

1. Dibuje en el plano cartesiano el rectángulo de vértices: (5, 4), (–3, 4), (–3, –2), (5,–2). ¿Cuál es su perímetro?
2. Encuentre los vértices de un rectángulo tal que su perímetro sea igual a 28, uno de sus lados esté en el eje *X* y uno de sus vértices sea el punto (2, 9).
3. ¿Cuál es el perímetro de la figura que aparece a continuación?:



1.1.1. Adición de enteros

Si la temperatura de un objeto es de −10°C y ésta se incrementa en 15°C, ¿cuál es la temperatura final?

- Haga un gráfico que represente la situación.

La temperatura final es de 5°C y se consigue mediante la adición:

$$(-10) + (15) = 5$$

- Redacte una regla para sumar enteros.
- Explore el posible significado que se podría dar a la adición en los contextos: consignaciones-retiros, sucesos de eventos, alturas-profundidades.

EJERCICIO 2

Efectúe:

1.	$4 + 11 =$	***7.***	$11 + 4 =$	***13.***	$(-16) + 12 =$
2.	$(-5) + (-4) =$	***8.***	$4 + (-11) =$	***14.***	$13 + (-13) =$
3.	$8 + (-3) =$	***9.***	$6 + 0 =$	***15.***	$(-12) + 11 =$
4.	$(-4) + 9 =$	***10.***	$0 + (-8) =$	***16.***	$18 + (-12) =$
5.	$(-12) + 5 =$	***11.***	$(-3) + 10 =$	***17.***	$(-11) + (-11) =$
6.	$(-7) + (-11) =$	***12.***	$2 + (-9) =$	***18.***	$(-16) + 17 =$

El cálculo de expresiones como: $(-3458) + 5700 + (-1345) - 3256$ resulta engorroso si se hace con lápiz y papel.

- Explore el uso de la calculadora para realizar el cálculo anterior con las teclas usuales de las operaciones, con las memorias (M+), (M−), (Min), (MR), o con el modo SD.

1.1.2. Resta de enteros

Retomando la parte a) de la situación inicial: si la temperatura del objeto pasa de 15 grados sobre cero a 10 grados bajo cero, hubo una baja de temperatura de 25°C. Este resultado se obtiene con la resta: $(-10) - 15 = -25$.
Si la temperatura inicial de un cuerpo fuera de −3 grados y la final de 5 grados, el cambio en la temperatura sería de 8 grados; la temperatura subió 8°C

- Elabore un gráfico que ilustre la situación anterior.

La variación en la temperatura (ΔT) se consigue restando la temperatura final (T_f) con la temperatura inicial (T_i):

$$\Delta T = T_f - T_i = 5 - (-3) = 5 + 3 = 8$$

La resta de dos números se define como la suma del primer término (*minuendo*) con el opuesto del segundo término (*sustraendo*).

$$a - b = a + (-b)$$

EJERCICIO 3

Efectúe:

1. $6 - 4 =$

2. $4 - 6 =$

3. $3 - 8 =$

4. $(-5) - (-3) =$

5. $(-11) - 5 =$

6. $(-8) - (-8) =$

7. $4 - (-3) =$

8. $(-4) - (-9) =$

9. $12 - (-19) =$

10. $(-7) - 11 =$

En los ejercicios 1) y 2) se observa que los resultados no son iguales; el orden en que se lleva a cabo la resta afecta el resultado.
Así: **si a ≠ b, entonces a − b ≠ b − a**

$a - b = a + (-b)$

1.1.3. Multiplicación de enteros

Tres disminuciones sucesivas de cinco grados se pueden representar en la forma:

$$(-5) + (-5) + (-5)$$

lo cual equivale a una disminución total de 15 grados. Esto se escribe mediante el producto:

$$3 \times (-5) = -15$$

¿Cómo se obtiene el signo del resultado en la multiplicación de enteros?

EJERCICIO 4

A. Efectúe:

1. $3 \times 9 =$	***8.*** $4 \times (-1) =$
2. $(-6) \times (-4) =$	***9.*** $0 \times (-9) =$
3. $7 \times (-3) =$	***10.*** $(-1) \times (-4) \times (-2) =$
4. $(-5) \times 10 =$	***11.*** $(-3) \times 5 \times (-2) =$
5. $(-12) \times 2 =$	***12.*** $(-3) \times (-2) \times (-9) =$
6. $(-5) \times (-11) =$	***13.*** $(-5) \times 2 \times 8 =$
7. $1 \times 4 =$	***14.*** $(-6) \times 0 \times 10 =$

B. En el fondo de un pozo de diez metros de profundidad se encuentra un gusano. Durante el día sube tres metros y en la noche resbala dos, ¿en qué día el gusano llega a la salida del pozo?

Consideremos un cultivo que inicialmente tiene una bacteria; cada bacteria se duplica cada segundo; al cabo de tres segundos, ¿cuántas bacterias habrá? Veamos:

Después de 1 segundo se tendrán	$1 \times 2 = 2$ bacterias
Después de 2 segundos:	$2 \times 2 = 4$ bacterias
Después de 3 segundos:	$2 \times 2 \times 2 = 8$ bacterias

Transcurridos 3 segundos habrá 8 bacterias.

Un producto repetido como $2 \times 2 \times 2$ se representa en la forma: 2^3

Si **b** es un número entero y **n** es un número entero positivo:

$$\underbrace{b \, . \, b \, . \, b \ldots b}_{\textbf{n} \text{ factores}} = b^n$$

A la expresión $\mathbf{b^n}$ se le denomina **potencia**, **b** es la **base** y **n** es el **exponente.**

EJERCICIO 5

A. Desarrolle las siguientes potencias:

1. $(5)^4$	***5.*** $(-1)^6$	***9.*** $(-1)^{2008}$
2. $(-9)^2$	***6.*** $(-3)^4$	***10.*** $(-1)^{2011}$
3. $(6)^3$	***7.*** $(7)^3$	***11.*** $(1)^{3580}$
4. $(-2)^5$	***8.*** $(-4)^3$	***12.*** $(0)^{789}$

B. Con la ayuda de la calculadora efectúe:

1. 3^{10} ***2.*** 5^8 ***3.*** $(-4)^{12}$ ***4.*** $(-2)^{23}$

1.1.4. División de enteros

En la división 15÷(−3) se busca un número que multiplicado por (−3) dé 15. Ese número es (−5).

$$\underset{\text{Dividendo}}{\underset{\uparrow}{15}} \div \underset{\text{Divisor}}{\underset{\uparrow}{(-3)}} = \underset{\text{Cociente}}{\underset{\uparrow}{(-5)}}$$

¿Cómo se obtiene el signo del resultado de la división de enteros?

EJERCICIO 6

Halle el cociente:

1. $27 \div 9 =$	***7.*** $4 \div 1 =$
2. $(-36) \div (-4) =$	***8.*** $(-9) \div (-1) =$
3. $21 \div (-3) =$	***9.*** $0 \div 6 =$
4. $(-50) \div 10 =$	***10.*** $125 \div (-5) =$
5. $(-12) \div 2 =$	***11.*** $(48) \div (3) =$
6. $(-55) \div (-11) =$	***12.*** $0 \div (-11) =$

¿Qué decir de la expresión $4 \div 0$?

EJERCICIO CON NÚMEROS ENTEROS 7

A. Realizando primero la operación dentro de cada paréntesis, efectúe:

1. $(20+4)-(15\div 3)=$	***5.*** $(16-4)\div((-5)+4)=$
2. $(25\div(-5))+(4\cdot 3)=$	***6.*** $(18\div 6)+((-8)\cdot(-5))=$
3. $(3+(-5))\cdot(4-8)=$	***7.*** $((-30)\div(-6))\cdot((-8)-5)=$
4. $((-3)\cdot 2)-((-7)+4)=$	***8.*** $((-12)-(-4))\div((-4)\cdot(-2))=$

EJERCICIO CON NÚMEROS ENTEROS 7

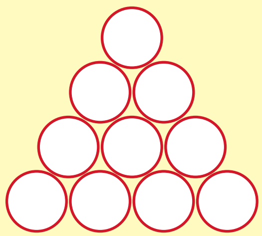
B. Halle el valor numérico de cada expresión:

1.	$(x + 12) + (4 - x)$	para $x = 7$
2.	$(p + 4) - (p - 8)$	para $p = (-5)$
3.	$(9 \div b) - (2 \cdot b)$	para $b = (-9)$
4.	$(a \cdot b) + (b \div \mathrm{a})$	para $a = 4$ y $b = (-12)$
5.	$(8 + d) \cdot (4 - d)$	para $d = (-8)$
6.	$(m \div 5) - (m + n)$	para $m = (-15)$ y $n = 2$

C. Un helado proporciona 160 calorías, 100 gramos de carne aportan 105 calorías, correr 1 minuto elimina 24 calorías, nadar 1 minuto elimina 15 calorías. Si en una semana una persona come 5 helados y 600 gramos de carne, corre 30 minutos diarios y nada 2 horas a la semana, ¿Cuántas calorías ha ganado o perdido debido a estas actividades?

D. En un teatro hay 26 filas de 24 sillas cada una. Los asientos se numeran en forma consecutiva de izquierda a derecha, comenzando por la primera fila y hacia atrás. ¿En qué fila se encuentra la silla número 374?

E. La figura muestra una pila de tubos acomodados en cuatro filas:



¿Cuántos tubos hay en una pila como la anterior pero con 30 filas de tubos?

¿Cuántos tubos hay en una pila con 100 filas de tubos?

Encuentre una fórmula para calcular la suma $1 + 2 + 3 \ldots + n$

F. Coloque en cada casilla del siguiente cuadrado un número del conjunto

$$\{-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$$

de modo que al sumar por cualquier fila, columna o diagonal el resultado obtenido sea cero.

G. Resuelva la parte b) de la situación inicial de esta unidad.

1.2. Los números racionales

Situación

Dos tubos están conectados a un recipiente; por uno de ellos viene agua y por el otro leche. Por ambos la rapidez de entrada de líquido es constante. Cuando sólo ingresa agua el tiempo de llenado del recipiente es de dos horas; cuando sólo ingresa leche el tiempo de llenado es de tres horas. ¿En cuánto tiempo se llena el recipiente si ingresan simultáneamente los dos líquidos.

***

Con frecuencia escuchamos decir: "Tres cuartos de hora son cuarenta y cinco minutos". En la anterior afirmación *tres cuartos* se representa matemáticamente con la fracción: $\frac{3}{4}$

El 4 es el *denominador*, e indica que la hora se ha dividido en cuatro partes.
El 3 es el *numerador*, e indica que de las cuatro partes se han tomado tres.

Los números de la forma:

$$\frac{m}{n}$$

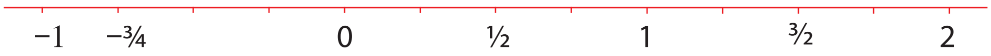
donde *m* y *n* son enteros,
$n \neq 0$, se llaman números racionales.
Este conjunto se representa con la letra Q.

Como cualquier entero, *m* se puede expresar en la forma:

$$\frac{m}{1}$$

se tiene que los números enteros son racionales.

En el siguiente ejemplo se muestra la ubicación de algunos números racionales en la recta numérica:



No es usual decir "dos cuartos de hora", sino la forma equivalente "media hora":

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

En estas fracciones el producto en diagonal es el mismo: $2 \times 2 = 4 \times 1$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ equivale a decir } a \cdot d = b \cdot c$$

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ ***equivale a***

$a \cdot d = b \cdot c$

Se consiguen fracciones equivalentes a una fracción con los procesos de *amplificación* (multiplicación de numerador y denominador por el mismo número entero, distinto de cero) o *simplificación* (división de numerador y denominador por el mismo número entero, distinto de cero).

EJEMPLOS

1. Al amplificar por 3 la fracción $\frac{1}{2}$, *se multiplica* por 3 al numerador y al denominador para obtener la fracción equivalente: $\frac{3}{6}$

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{3}{6}$$

2. Al simplificar por 2 la fracción $\frac{12}{18}$, *se divide* por 2 al numerador y al denominador para obtener la fracción equivalente $\frac{6}{9}$:

$$\frac{12}{18} = \frac{12 \div 2}{18 \div 2} = \frac{6}{9}$$

Cuando no hay enteros mayores que 1, por el cual sean divisibles tanto el numerador como el denominador se dice que la fracción está *simplificada al máximo* o *reducida a su mínima expresión.*

EJERCICIO 8

A. Simplifique al máximo cada fracción:

1. $\dfrac{24}{56} =$ ***2.*** $-\dfrac{49}{63} =$ ***3.*** $\dfrac{15}{120} =$ ***4.*** $\dfrac{39}{130} =$

B. Complete:

1. $\dfrac{2}{5} = \dfrac{\square}{15}$ ***3.*** $\dfrac{16}{28} = \dfrac{4}{\square}$ ***5.*** $\dfrac{21}{\square} = \dfrac{6}{8}$

2. $\dfrac{6}{9} = \dfrac{10}{\square}$ ***4.*** $\dfrac{\square}{32} = \dfrac{9}{8}$ ***6.*** $\dfrac{10}{12} = \dfrac{\square}{30}$

Volviendo a la representación de una fracción en la recta, se puede observar que infinitas fracciones están representadas en un mismo punto; todas corresponden al mismo número racional.

Por ejemplo, al punto A le corresponde el número racional representado por cualquiera de las fracciones $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{4}, \dfrac{3}{6}, \dfrac{4}{8}, \ldots$

1.2.1. Multiplicación

En la expresión "tres cuartos de hora son cuarenta y cinco minutos", el resultado se puede obtener mediante la multiplicación:

$$\frac{3}{4} \times 1\,\text{hora} = \frac{3}{4} \times 60\text{ minutos} = 3 \times 15\text{ minutos} = 45\text{ minutos}$$

Mediante una multiplicación se contesta la pregunta: ¿cuántas mujeres hay en un grupo de treinta y seis personas si ellas constituyen las dos terceras partes del grupo?

$$\frac{2}{3} \times 36 = 2 \times \frac{36}{3} = 2 \times 12 = 24$$

en el grupo hay 24 mujeres

El perímetro de un cierto rectángulo es p. El perímetro de otro rectángulo que es el triple del anterior también se puede representar con una multiplicación:

$$3 \times p = 3p$$

Observe que en las situaciones anteriores la preposición **de** se ha traducido aritméticamente en una multiplicación.

EJEMPLOS

1. Los tres quintos de 50 son: $\frac{3}{5} \times 50 = 30$

2. El 20% de 60 es: $\frac{20}{100} \times 60 = 12$

¿Qué parte de 1 hora equivale a los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{3}{4}$ de hora?

Veamos:
Los $\frac{3}{4}$ de hora son $\frac{3}{4} \times 60 = 45\ min$ y los $\frac{2}{3}$ de 45 son: $\frac{2}{3} \times 45 = 30\ min$, es decir, media hora.

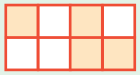
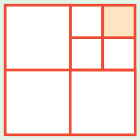
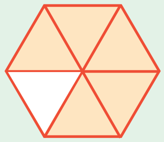
Los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{3}{4}$ se traducen en la multiplicación: $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

Multiplicación de números racionales

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

EJERCICIO 9

A. ¿A qué racional corresponde cada región sombreada?

1.    ***2.***    ***3.***    ***4.*** 

B. Efectúe:

1. $\frac{2}{9}\times\frac{6}{7}=$

2. $-\frac{5}{8}\times\frac{3}{10}=$

3. $\left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{5}{8}\right)=$

4. $\frac{2}{4}\times 18=$

5. $\frac{10}{21}\times\left(-\frac{14}{15}\right)=$

6. $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}\times\frac{6}{7}=$

C. Desarrolle las siguientes potencias:

1. $\left(\frac{2}{3}\right)^4$ ***2.*** $\left(-\frac{1}{2}\right)^5$ ***3.*** $\left(\frac{3}{4}\right)^3$ ***4.*** $-\left(\frac{1}{10}\right)^2$

En una situación como la siguiente:

la región sombreada corresponde a: $\dfrac{4}{4}+\dfrac{3}{4}=\dfrac{7}{4}$.

$\dfrac{4}{4}=1$: número entero

$\dfrac{3}{4}$: *fracción propia*

$\dfrac{7}{4}$: *fracción impropia*

Esta fracción se escribe también en *forma mixta*: $1+\dfrac{3}{4}=1\dfrac{3}{4}$.

Una fracción impropia se lleva a la forma mixta mediante división.

Por ejemplo, la fracción $\dfrac{7}{4}$:

$$\begin{array}{r|l} 7 & 4 \\ \cline{2-2} 3 & 1 \end{array} \qquad 1\frac{3}{4}$$

se tiene: $\dfrac{7}{4}=1\dfrac{3}{4}$

EJERCICIO 10

A. Escriba en forma mixta las fracciones:

1. $\dfrac{17}{2}=$ *2.* $\dfrac{15}{6}=$ *3.* $-\dfrac{22}{4}=$ *4.* $-\dfrac{37}{8}=$

B. Convierta a fracción los números mixtos:

1. $8\dfrac{2}{3}=$ *2.* $-10\dfrac{1}{5}=$ *3.* $-1\dfrac{3}{4}=$ *4.* $7\dfrac{10}{11}=$

C. ¿A qué racionales corresponden los puntos A, B, C, D, y E?

1.

2.

1.2.2. Números decimales

Otra manera de representar un número racional es mediante la notación decimal; por ejemplo al punto A le corresponde el número decimal 0.5

Recordemos: Una *fracción decimal* es aquella cuyo denominador es una potencia de diez.

EJEMPLOS

$$\frac{7}{10}, \frac{12}{10}, \frac{3}{100}, \frac{254}{100}, \frac{85}{1000}, \frac{1483}{1000}$$

Hay fracciones que no son decimales pero son equivalentes a alguna fracción decimal.

EJEMPLOS

1. $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$ ***2.*** $\frac{3}{4} = \frac{75}{100}$ ***3.*** $\frac{193}{250} = \frac{772}{1000}$ ***4.*** $\frac{9}{300} = \frac{3}{100}$

El punto A es la representación en la recta de las fracciones equivalentes

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8} \ldots$$

Estas fracciones se pueden representar con números decimales:

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0.5; \quad \frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 0.75; \quad \frac{19}{5} = \frac{38}{10} = 3.8; \quad \frac{9}{300} = \frac{3}{100} = 0.03$$

¿Cómo se convierte una fracción decimal a número decimal?

Otra manera de pasar a número decimal es mediante división:

$$\frac{1}{2} \longrightarrow \begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ \hline 0 & 0.5 \end{array} \qquad \frac{3}{4} \longrightarrow \begin{array}{r|l} 30 & 4 \\ \hline 20 & 0.75 \\ 0 & \end{array}$$

Para una fracción como $\frac{1}{3}$ no hay fracción decimal equivalente (¿por qué?).

Al proceder con la división $1 \div 3$ se observa que esta continúa indefinidamente:

$$\frac{1}{3} \longrightarrow \begin{array}{r|l} 100 & 3 \\ \hline 10 & 0.333 \\ 1 & \end{array}$$

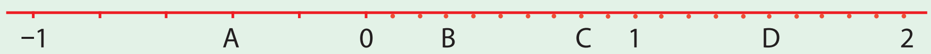
A la fracción $\frac{1}{3}$ le corresponde una representación decimal infinita:

$$\frac{1}{3} = 0.333\cdots = 0.\overline{3} \text{ (periodo 3)}$$

Los números racionales
tienen una representación decimal finita o infinita periódica.

EJERCICIO 11

1. Escriba el número decimal correspondiente a los puntos A, B, C y D:



2. Escriba como número decimal:

a. $\frac{5}{4}$ **b.** $\frac{7}{6}$ **c.** $\frac{12}{3}$ **d.** $\frac{8}{7}$ **e.** $\frac{9}{11}$

¿Cómo se efectúan las operaciones básicas entre números decimales?

EJERCICIO 12

Desarrolle:

1. $1.53 + 2.546 =$

2. $35 + 23.78 =$

3. $-14 + 8.25 =$

4. $6.34 - 4.309 =$

5. $4.57 - 9.3 =$

6. $(-2.34) - (-4.02) =$

7. $0.002 \times 0.3 =$

8. $(-5.47) \times 8 =$

9. $(-1.3) \times (-2.79) =$

10. $8.2 \div 6 =$

11. $7.8 \div 0.003 =$

12. $(-0.09) \div (-0.003) =$

13. $5.85 \times 10 =$

14. $6.4 \times 100 =$

15. $-0.08 \times 1000 =$

16. $38.5 \div 10 =$

17. $4.3 \div 100 =$

18. $7000 \div 1000 =$

1.2.3. División

Para repartir $\frac{3}{4}$ de litro en tres partes iguales es claro que cada uno es de $\frac{1}{4}$ de litro. Lo anterior se puede obtener mediante la división: $\frac{3}{4} \div 3$, lo cual equivale a buscar la tercera parte, es decir, multiplicar por $\frac{1}{3}$ (el recíproco de 3) a:

$$\frac{3}{4} \div 3 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

EJERCICIO 13

Efectúe:

1. $\frac{2}{21} \div \frac{8}{7}$

2. $-\frac{3}{11} \div \frac{12}{22}$

3. $\left(-\frac{3}{7}\right) \div \left(-\frac{7}{3}\right)$

4. $\left(\frac{2}{9}\right) \div 18$

5. $-\frac{5}{4} \div \frac{5}{4}$

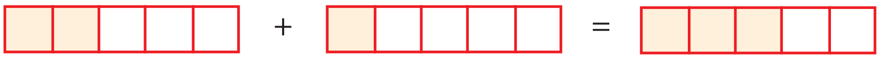
6. $\left(\frac{2}{3} \div \frac{3}{4}\right) \div \left(\frac{35}{2} \div \frac{28}{3}\right)$

7. $\left(-\frac{5}{4} \div \frac{1}{2}\right) \div \left(-\frac{3}{7} \div -\frac{6}{5}\right)$

8. $\left(3\frac{4}{5} \div 1\frac{3}{10}\right) \div \left(-1\frac{2}{3} \div 2\frac{2}{9}\right)$

1.2.4. Suma y Resta

$\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=$ es una suma de fracciones con el mismo denominador (denominador común), ilustrada en el gráfico:



El resultado se obtiene sumando los numeradores y dejando el mismo denominador:

$$\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$$

Si las fracciones tienen denominador diferente, se busca un múltiplo común de los denominadores para utilizarlo como denominador común.

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$$

EJEMPLO

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\longrightarrow$ un múltiplo común de 2 y 3 es 6.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$$

EJERCICIO 14

A. Realice:

1. $\frac{2}{15}+\frac{8}{15}+\frac{11}{15}$

2. $-\frac{3}{11}-\frac{12}{11}+\frac{7}{11}$

3. $\frac{7}{4}-\frac{18}{8}$

4. $-2\frac{1}{8}+3\frac{3}{4}$

5. $-\frac{5}{8}+\frac{5}{6}-\frac{5}{4}$

6. $\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{3}{2}-\frac{8}{3}\right)$

7. $\left(\frac{1}{5}-\frac{3}{10}\right)+\left(\frac{4}{7}-\frac{5}{14}\right)$

8. $\left(\frac{5}{6}+1\right)-\left(2+\frac{1}{3}\right)$

9. $\left(1-\frac{7}{4}\right)+\left(\frac{7}{6}-1\right)$

10. $\left(3-\frac{5}{2}\right)+\left(4-\frac{7}{3}\right)$

EJERCICIO 14

B. Empleando la tecla $\boxed{a\frac{b}{c}}$ de la calculadora efectúe:

1. $\left(-\frac{3}{8}+\frac{7}{12}\right)\cdot\left(7\frac{11}{4}-\frac{15}{18}\right)$

2. $\dfrac{3}{\frac{3}{4}}-\dfrac{\frac{3}{4}}{3}$

3. $\dfrac{\frac{7}{25}}{\frac{5}{15}-1\frac{1}{20}}$

4. $\dfrac{\frac{3}{10}-\frac{4}{15}}{-1\frac{1}{4}-\frac{9}{16}}$

C. Resuelva la situación planteada al comienzo de esta sección (1.2).

D. Formule una pregunta relacionada con cada enunciado de modo que lo convierta en un problema aritmético y luego resuélvalo:

1. Una persona pesa 72 kilos. En la Luna los objetos pesan un sexto de lo que pesan en la Tierra. ¿…?

2. Un pintor mezcla pintura roja y amarilla en proporción de 4 a 7 para obtener el color que quiere. Tiene 21 litros de pintura amarilla. ¿…?

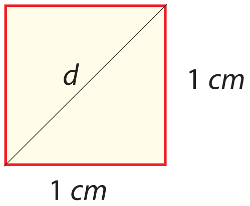
3. Se coloca una cerca alrededor de un jardín rectangular. El jardín mide 10 metros 35 centímetros de largo y 6 metros 40 centímetros de ancho. ¿…?

4. La mejor marca en una escuela para cierta carrera es de 4 minutos $23\frac{1}{2}$ segundos. Un competidor corrió la prueba en 4 minutos $35\frac{3}{10}$ segundos. ¿…?

5. Un pie equivale a 30.52 cm. A una tabla de 12 pies de largo se le hacen dos cortes en los extremos, uno de 50 cm y el otro de 72 cm. ¿…?

1.3. Los números reales

En un cuadrado de lado 1*cm*, ¿cuál es la longitud de su diagonal *d*?



La diagonal *d* se encuentra utilizando el teorema de Pitágoras:

$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$
$$d = \sqrt{2}$$

$\sqrt{2}$ es un ejemplo de un *número irracional*. La expresión decimal de $\sqrt{2}$ es 1.414213562…, la cual es *infinita* y *no periódica*.
En el cálculo del perímetro *C* de una circunferencia de radio *r*, se emplea la fórmula: $C = 2\pi r$, donde el número π, cuya expresión decimal, 3.141592653…, es también *infinita* y *no periódica*. π es un *número irracional*.

Números como $\sqrt{2}$ y π son ejemplos de números *irracionales* (I)

Los números irracionales son aquellos que tienen una representación decimal infinita y no periódica.

Hemos encontrado números con representación decimal *finita* o *infinita periódica* (***racionales***) y números con representación decimal *infinita* o *no periódica* (***irracionales***); con todos ellos formamos un nuevo conjunto: el de los ***números reales***.

El conjunto de los números reales es la unión del conjunto de los números racionales con el conjunto de los números irracionales:
$\mathbf{R = Q \cup I}$

1.3.1. Propiedades de las operaciones en los números reales

Las siguientes propiedades serán de uso frecuente a lo largo del curso. Para a, b y c números reales cualesquiera, se verifica:

Propiedad	Descripción	Ejemplo
Conmutativa de la suma $a + b = b + a$ Conmutativa del producto $a \cdot b = b \cdot a$	El orden en que se efectúa la suma o la multiplicación de dos números reales no cambia el resultado.	$(-9) + 8 = 8 + (-9)$ $-1 = -1$ $(-5) \cdot 4 = 4 \cdot (-5)$ $-20 = -20$
Asociativa de la suma $(a + b) + c = a + (b + c)$ Asociativa de la multiplicación $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	En la suma o en la multiplicación de tres números reales, el resultado de los dos primeros, operado con el tercero, equivale a operar el primero con el resultado de los dos últimos.	$(-7 + 4) + 8 = (-7) + (4 + 8)$ $-3 + 8 = -7 + 12$ $5 = 5$ $((-3) \cdot 6) \cdot 2 = (-3) \cdot (6 \cdot 2)$ $-18 \cdot 2 = -3 \cdot 12$ $-36 = -36$
Distributiva de la multiplicación respecto a la suma $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$	El producto de un número real por la suma de dos números equivale a la suma de los productos del primero por cada uno de los sumandos.	$5 \cdot (4 + 3) = (5 \cdot 4) + (5 \cdot 3)$ $5 \cdot 7 = 20 + 15$ $35 = 35$
Invertiva de la suma y de la multiplicación $a + (-a) = (-a) + a$ $0 = 0$ 0 es el *módulo* de la adición $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a$ $1 = 1$ 1 es el *módulo* de la multiplicación	La suma de un número real a con su opuesto $(-a)$ da como resultado cero. $(-a)$ es el *inverso aditivo* de a. La multiplicación del número real $a \neq 0$ con su recíproco $\frac{1}{a}$ da como resultado 1. $\frac{1}{a}$ es el *inverso multiplicativo* de a.	$8 + (-8) = (-8) + 8$ $0 = 0$ $(-5) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot (-5)$ $1 = 1$

EJERCICIO 15

A. Coloque (V) o (F) en la casilla si la proposición es verdadera o falsa. Justifique la respuesta.

1. $4+(-9)=(-9)+4$ $\square$

2. $(-9)+(5+7)=((-9)+5)+7$ $\square$

3. $6-11=11-6$ $\square$

4. $36\div(6\div3)=(36\div6)\div3$ $\square$

5. $\frac{7}{3}\cdot\frac{(-5)}{14}=\frac{(-5)}{14}\cdot\frac{7}{3}$ $\square$

6. $(1.5\cdot7.2)\cdot(-5)=(7.2\cdot(-5))$ $\square$

7. $0-\frac{3}{8}=\frac{3}{8}-0$ $\square$

8. $1\cdot(-7.86)=(-7.86)\cdot1$ $\square$

B. Escriba una expresión equivalente que no emplee paréntesis.

1. $2+(8+3)$ $\square$

2. $-5(3+(-11))=$

3. $(-7+3)9=$

5. $5(a+b+c)$

6. $\frac{2}{3}(x+y)$

7. $1.2(7+(-3.5))=$

C. Escriba en la casilla $=$ o $\neq$, según corresponda.

1. $2+(8+3)$ $\square$ $(2+8)+3$

2. $(13-5)-7$ $\square$ $13-(5-7)$

3. $(3+7)+4$ $\square$ $3+(7+4)$

4. $(5+10)\div5$ $\square$ $(5\div5)+(10\div5)$

5. $6+(8-9)$ $\square$ $(8-9)+6$

6. $24\div(4+2)$ $\square$ $(24\div4)+(24\div2)$

7. $9+(7-5)$ $\square$ $9+(5-7)$

8. $(8\cdot(-2))\cdot3$ $\square$ $3\cdot((-2)\cdot8)$

D. Una familia compuesta por 6 personas sale de vacaciones. El costo del pasaje de ida y vuelta de cada uno es de \$35 500. El hospedaje individual, por noche, tiene un valor de \$22 550. En alimentación, bebidas y diversión cada uno gasta \$42 000 diarios. Si la familia tiene planeado salir 5 noches y 6 días, ¿cuánto dinero gastarán en las vacaciones?

E. Elabore un diagrama de Venn que muestre la relación de contenencia entre los conjuntos: **R**, **Q**, **I**, **Z**, $\mathbf{Z}^+$, $\mathbf{Z}^-$, {0}.

1.3.2. ¿En qué orden se realizan las operaciones?

Efectúe: $3 + 5 \times 4 + 2^3 - 18 \div 2$; ahora hágalo utilizando la calculadora. ¿Obtuvo el mismo resultado?

Resultados diferentes se obtienen cuando se realizan las operaciones en distinto orden, de modo que para evitar ambigüedades se ha establecido el siguiente orden:

1. Se efectúan las operaciones indicadas dentro de los paréntesis.
2. Se calculan todas las potencias.
3. Se hacen las multiplicaciones y divisiones en el orden que aparezcan, de izquierda a derecha.
4. Se realizan las sumas y restas que queden indicadas, de izquierda a derecha.

EJERCICIO 16

Realice las operaciones indicadas (primero sin calculadora y luego verifique con ésta):

1. $20 + 7 - 9 \div 3 =$

2. $25 \div (-5) + 4 \cdot 3 =$

3. $24 \div 6 - 5^2 + 3 \times 7 =$

4. $(-3)\,(6 - 11) + 7(15 \div (-3)) =$

5. $2(6 + 4) - 8 \cdot 3 \div 6 =$

6. $(-5)(3 + (-4)) - 3^3 + (11 + (-5)) \div 6 =$

1.3.3. Comparando números reales

"*Tres es menor que cinco*" se representa como: $3 < 5$. Al ubicar los dos números en la recta, 3 está a la izquierda de 5.

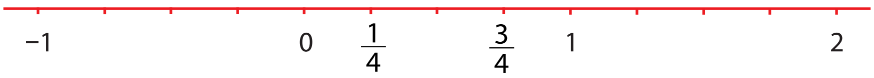
$-4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9$

$-2 < 9$, en la recta -2 está a la izquierda de 9.

$-2 < 9$ se escribe en la forma equivalente $9 > -2$. Se lee: "nueve es *mayor* que menos dos"; 9 está a la derecha de -2.

Si un número real a
está a la izquierda de un número b,
en la recta numérica,
entonces $a < b$

Cuando dos fracciones tienen el mismo denominador, se puede determinar fácilmente cuál es la menor, por ejemplo entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{4}$, observamos en el gráfico:



que $\frac{1}{4}$ se encuentra a la izquierda de $\frac{3}{4}$. Por tanto: $\frac{1}{4}$ es menor que $\frac{3}{4}$;

$$\frac{1}{4} < \frac{3}{4}$$

A esta conclusión se hubiese podido llegar comparando simplemente los numeradores de las fracciones.

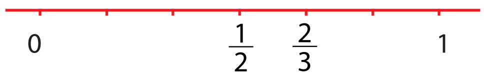
¿$\frac{1}{2}$ es mayor o menor que $\frac{2}{3}$? Estas fracciones tienen diferente denominador; cuando esto ocurre se amplifican a un común denominador y se comparan los numeradores.

Así, un común denominador para $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$, es 6, entonces:

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} \text{ y } \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

$$\text{Como } \frac{3}{6} < \frac{4}{6}, \text{ se tiene que } \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$$

$\frac{1}{2}$ se encuentra a la izquierda de $\frac{2}{3}$ en la recta:



Si
$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$
entonces
$$a \cdot d < b \cdot c$$

También se pueden comparar por medio de las representaciones decimales correspondientes:

$$\frac{1}{2} = 0.5; \qquad \frac{2}{3} = 0.666\ldots$$

Como $0.5 < 0.666\ldots$, se tiene que $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$.

¿Qué significa la expresión $a \leq b$?

EJERCICIO 17

A. Coloque el signo $<$, $>$ o $=$ que corresponda entre los números dados:

1. $5 \ \square \ 19$	***5.*** $\frac{2}{3} \ \square \ \frac{7}{6}$	***9.*** $\frac{1}{6} \ \square \ 0$
2. $-1 \ \square \ -7$	***6.*** $-\frac{3}{4} \ \square \ -\frac{1}{2}$	***10.*** $\frac{8}{5} \ \square \ \frac{7}{4}$
3. $-13 \ \square \ -13$	***7.*** $-2 \ \square \ -\frac{7}{3}$	***11.*** $-\frac{5}{4} \ \square \ \frac{3}{10}$
4. $-\frac{1}{5} \ \square \ -\frac{7}{5}$	***8.*** $0 \ \square \ -\frac{11}{8}$	***12.*** $4 \ \square \ \frac{13}{3}$

B. Consiga un ejemplo de una fracción que colocada entre las fracciones dadas satisfaga las desigualdades:

1. $\frac{3}{8} < \square < \frac{7}{8}$	***3.*** $\frac{5}{4} < \square < \frac{8}{5}$	***5.*** $\frac{3}{4} < \square < \frac{5}{3}$
2. $-\frac{10}{3} < \square < -\frac{5}{3}$	***4.*** $-\frac{2}{3} < \square < -\frac{1}{6}$	***6.*** $-\frac{9}{21} < \square < -1$

C. ¿Hay una fracción "que siga" después de $\frac{1}{2}$?

D. Encuentre fracciones equivalentes a cada una de las fracciones dadas, que tengan el mismo denominador.

Ejemplo: $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{6}$. Como $\frac{3}{5} = \frac{18}{30}$ y $\frac{7}{6} = \frac{35}{30}$, dos fracciones equivalentes que tienen el mismo denominador son: $\frac{18}{30}$, $\frac{35}{30}$

1. $\frac{3}{8}, \frac{5}{6}$ *3.* $-\frac{10}{7}, -\frac{5}{14}$ *5.* $\frac{5}{3}, 3$ *7.* $-4, -\frac{13}{4}$

2. $\frac{5}{4}, \frac{9}{5}$ *4.* $\frac{25}{12}, \frac{8}{3}$ *6.* $\frac{4}{21}, \frac{7}{6}$ *8.* $-\frac{7}{8}, -\frac{9}{11}$

E. Orde de menor a mayor:

$\frac{1}{6}, -2, -\frac{3}{8}, 0, -\frac{11}{4}, 2, \frac{7}{5}, 0.75, \frac{2}{3}, -1.25$

Si un número real *a* está a la izquierda de un número *b*, en la recta numérica, entonces *a* < *b*

1.4. Ecuaciones

La temperatura de una pulpa de fruta congelada es de – 4C°. Su consumo se recomienda a 15 °C, ¿cuántos grados debe incrementarse la temperatura para cumplir la recomendación?

Si m indica los grados que debe subir la temperatura de la pulpa, la situación anterior se puede representar mediante la expresión: $-4 + m = 15$. Este es un ejemplo de una ***ecuación***; dicha ecuación es un ***modelo*** del problema.

Para encontrar el valor de m (*incógnita*), se suma 4, el inverso aditivo de –4 en ambos lados de la ecuación:

$$-4 + \mathbf{4} + m = 15 + \mathbf{4}$$
$$0 + m = 15 + 4$$
$$m = 19$$

Luego, la temperatura de la pulpa debe subir 19 °C para cumplir con la recomendación.

En la ecuación $-4 + m = 15$, el número 19 es la **solución** de la ecuación.

*Un número es una **solución** de una ecuación si al sustituirlo en ésta se obtiene una proposición verdadera.*

EJERCICIO 18

A. Resuelva las siguientes ecuaciones:

1. $5+a=-11$

2. $4=m+10$

3. $-6.5-c=3.2$

4. $z-(-11)=16$

5. $-15.2-b=24.71$

6. $52=n+(-43)$

7. $x+8.71=0$

8. $-17.25=y-12.536$

9. $\frac{8}{5}-m=\frac{7}{10}$

10. $x+\frac{3}{2}=\frac{11}{2}$

11. $\frac{7}{3}=a-\frac{1}{8}$

12. $y-\frac{5}{4}=-\frac{7}{6}$

13. $\frac{5}{12}=b-\left(-\frac{4}{15}\right)$

14. $3=c-\left(-\frac{7}{3}\right)$

15. $\frac{5}{4}-x=2$

16. $x-\frac{2}{3}=-\frac{5}{6}$

B. Formule una pregunta relacionada con cada enunciado de modo que lo convierta en un problema algebraico; plantee la ecuación respectiva y resuélvalo:

1. Antonio tiene 52 cintas de video; su hermana le regala otras para completar 84 ¿. . . ?
2. La distancia de Bogotá a Santa Marta pasando por Bucaramanga es de 959 km. La distancia de Bogotá a Bucaramanga es de 394 km. ¿. . . ?
3. El costo de los servicios médicos se incrementó 145.5 puntos, en un cierto periodo de tiempo, alcanzando los 326.9 puntos. ¿. . . ?

Las ecuaciones anteriores se puedan llevar a la forma $x+c=b$ (*ecuaciones aditivas*).

Ahora se van a estudiar ecuaciones de la forma $ax=b$ (*ecuaciones multiplicativas*). Considere la siguiente situación:

Anita pagó el mismo precio por cada una de las 8 boletas que compró para entrar a cine. Si ella pagó un total de \$52 000, ¿cuál es el precio de cada boleta?

Si y designa el precio de cada boleta, el problema anterior se puede modelar mediante la ecuación: $8y = 52\,000$.

Para encontrar el valor de y se multiplica $\frac{1}{8}$, por el inverso multiplicativo de 8, en ambos lados de la ecuación:

$$\frac{1}{8}8y = \frac{1}{8}52\,000$$
$$y = \frac{52\,000}{8}$$
$$y = 6500$$

Así, el valor de cada boleta es de \$6500.

EJERCICIO 19

A. Resuelva las siguientes ecuaciones:

1. $4a = -16$

2. $-7m = 28$

3. $-3.5c = 7$

4. $-11z = 16$

5. $-15.2b = 53.2$

6. $52 = -48n$

7. $8.43x = 0$

8. $-42.602 = 12.53y$

9. $\frac{4}{5}m = \frac{3}{10}$

10. $-\frac{8}{7}a = \frac{2}{21}$

11. $\frac{11}{6}c = -2$

12. $7p = \frac{35}{11}$

B. Formule una pregunta relacionada con cada enunciado de modo que lo convierta en un problema algebraico, plantee la ecuación respectiva y resuélvalo:

1. Por la compra de varias camisas se pagó la suma de \$1 620 000, costando cada una \$45 000. ¿. . . ?

2. Un artículo está en venta a una tercera parte de su valor comercial. El precio ahora es de \$42 350. ¿. . . ?

3. La población de Cartagena es de 852 000 habitantes; ésta es aproximadamente $\frac{3}{25}$ de la población de la ciudad de Bogotá ¿. . . ?

4. Una fábrica de gaseosas anuncia un nuevo producto que contiene 160 calorías, equivalentes a los $\frac{2}{5}$ de calorías de la gaseosa tradicional. ¿. . . ?

5. Un empleado trabajó 8 horas diarias, de lunes a viernes, durante 6 semanas. Al finalizar le liquidaron por las horas trabajadas un total de \$ 2 280 120. ¿. . . ?

6. A la primera clase de cierta asignatura asistieron 18 personas, las cuales constituyen los $\frac{3}{4}$ de los alumnos inscritos. ¿. . . ?

7. Se han colocado 36 cubos de madera de las mismas dimensiones uno encima del otro, formando una pila de 66 $\frac{3}{4}$ pulgadas de altura. ¿. . . ?

C. ¿En qué casos al buscar los $\frac{3}{4}$ de un número el resultado que se obtiene es mayor que el mismo número?

1.5. Porcentajes

Las fracciones de mayor uso en la vida diaria son aquellas que indican centésimas partes de algo. Por ejemplo, la expresión: "el cincuenta por ciento de ocho mil", escrita con el símbolo %, como: "50% de 8000", quiere decir:

$$\frac{50}{100} \times 8000, \text{ lo cual equivale a: } \frac{1}{2}$$

$$\frac{50}{100} \times 8000, \text{ equivale también a: } 0.5 \times 8000 = 4000$$

EJEMPLOS

Para calcular el 12% de 3600, efectuamos la multiplicación:

$$\frac{12}{100} \times 3600 = 0.12 \times 3600 = 432$$

El 50% de x equivale a la mitad de x

$$\frac{50}{100} \cdot x = \frac{1}{2} \cdot x$$

EJERCICIO 20

A. Calcule:

1. El 16% de 850 ***2.*** El 55% de 2340 ***3.*** El 22.5% de 1430

B. Así como el 50% equivale a "la mitad", exprese en forma análoga los siguientes porcentajes con fracciones reducidas a su mínima expresión:

1. 25% ***2.*** 12.5% ***3.*** 40% ***4.*** 75% ***5.*** 100% ***6.*** 200%

C. Amplifique apropiadamente las siguientes fracciones para expresarlas en forma de porcentajes:

1. $\frac{2}{5}$ ***2.*** $\frac{7}{4}$ ***3.*** $\frac{3}{10}$ ***4.*** $\frac{11}{25}$

D. Escriba en forma decimal cada porcentaje:

1. 25% ***3.*** 3.45% ***5.*** 0.5%

2. 33% ***4.*** 250% ***6.*** 0.84%

E. Escriba cada decimal como un porcentaje:

1. 0.16 ***3.*** 1.5 ***5.*** 0.345

2. 0.085 ***4.*** 0.7 ***6.*** 2.43

Algunas veces se conoce el resultado de calcular el porcentaje a alguna cantidad pero se pregunta por el porcentaje o por el número al cual fue aplicado cierto porcentaje. Dicha pregunta se puede contestar colocando la incógnita donde corresponda en el esquema siguiente y resolviendo la ecuación:

Porcentaje	$\times$	Cantidad a la cual se aplica	$=$	Resultado

EJEMPLOS

1. ¿Qué porcentaje de 24 es18?

Siguiendo el esquema: porcentaje $\times$ cantidad = resultado, y colocando la incógnita y, en lo correspondiente a porcentaje, tenemos:

$$y \cdot 24 = 18$$
$$y = \frac{18}{24} = 0.75$$
$$y = 75\ \%$$

Así, 18 es el 75% de 24

2. ¿De qué número es 20 el 40%?

Usando el esquema se tiene: 40% de y es 20

$$0.40\,y = 20$$
$$y = \frac{20}{0.40} = 50$$

Por lo tanto, 20 es el 40% de 50

EJERCICIO 21

A. *1.* ¿Qué porcentaje es 18 de 72?

2. ¿Qué porcentaje es 15 de 12?

B. *1.* ¿De qué número es 14 el 20%?

2. ¿De qué número es 4 el 80%?

C. En el ejercicio #1 se observa que las operaciones a realizar son:

$$\frac{\text{Cantidad a comparar}}{\text{Total}} \rightarrow \textit{Número decimal} \rightarrow \textit{Porcentaje}$$

Utilice dicho esquema en el siguiente problema:

En un experimento se encontró que 5 litros de aire contienen 1.07 litros de oxígeno y 3.92 litros de nitrógeno. Exprese los resultados en forma de porcentaje.

D. Exprese usando porcentajes:

1. $0.2p$ *2.* $0.165c$ *3.* $1.25y$ *4.* $0.89m$ *5.* $0.035x$

1.6. Potenciación y radicación

1.6.1. Potenciación

Vimos antes que un producto repetido como $2 \times 2 \times 2$ se escribe en forma de potencia: 2^3.

En $2^3 = 8$, la base es 2 y el exponente es 3. Para exponentes enteros mayores que 1 es válido asociar a b^n con el producto repetido: $\underbrace{b \cdot b \cdot b \ldots\ldots b}_{n \text{ factores}}$

Se trata ahora de examinar qué significado dar a b^n cuando el exponente n es un entero menor o igual a 1.

¿Qué significado dar, por ejemplo, a los símbolos $2^1, 2^0, 2^{-1}, 2^{-2}$?

Observe la siguiente tabla:

2^5	32
2^4	16
2^3	8
2^2	4

¿Encuentra en la tabla anterior alguna regularidad?

- Complete valores apropiados para 2^1, 2^0, 2^{-1} y 2^{-2} de modo que se conserve la regularidad encontrada.

2^5	32
2^4	16
2^3	8
2^2	4
2^1	
2^0	
2^{-1}	
2^{-2}	

- Consideraciones como las anteriores son aplicables a cualquier base distinta de cero. ¿Por qué no son válidas para la base cero?

Exponente 1: $b^1 = b$

Exponente 0: $b^0 = 1$ siempre que $b \neq 0$

Exponente entero negativo: $b^{-n} = \dfrac{1}{b^n}$, siempre que $b \neq 0$

$b^0 = 1$ siempre que $b \neq 0$

Propiedades de la potenciación

Los ejemplos que se dan a continuación ilustran propiedades de las potencias. Escriba la propiedad correspondiente en forma general:

Ejemplo	Propiedad
$2^3 \cdot 2^2 = (2 \cdot 2 \cdot 2)(2 \cdot 2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$	$b^m \cdot b^n = b^{m+n}$
$\dfrac{2^3}{2^2} = \dfrac{2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2} = 2^1$	
$(2^3)^2 = 2^3 \cdot 2^3 = 2^{3+3} = 2^6$	
$(4 \cdot 3)^2 = 4^2 \cdot 3^2$	
$\left(\dfrac{4}{2}\right)^2 = \dfrac{4^2}{2^2}$	

$b^{-n} = \dfrac{1}{b^n}$ siempre que $b \neq 0$

- Describa verbalmente las propiedades indicadas en la tabla anterior.
- ¿Es $(4+3)^2 = 4^2 + 3^2$?

Observe el proceso seguido en el siguiente ejemplo:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^3} = \frac{1}{\frac{2^3}{5^3}} = \frac{5^3}{2^3} = \left(\frac{5}{2}\right)^3$$

- Simplifique a un paso el proceso anterior para la forma general $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n}$

EJERCICIO 22

A. Simplifique utilizando las propiedades de los exponentes; dé el resultado con exponentes positivos.

1. $5^{12} \cdot 5^{8} \cdot 5^{24}$

2. $a^{-3} \cdot b^{6} \cdot a^{-8} \cdot b^{13}$

3. $\dfrac{m^{12}}{m^{7}}$

4. $\left(c^{5}d^{4}\right)^{3}$

5. $\left(a^{-2}b^{4}\right)^{2} a^{5}b^{-3}$

6. $\left(2c^{5}\right)^{-3}\left(bc^{2}\right)^{4}\left(2^{-2}b^{3}\right)^{3}$

7. $\dfrac{\left(x^{4}y^{6}\right)^{3}}{\left(x^{3}y^{5}\right)^{2}}$

8. $\left(\dfrac{a^{3}b^{2}}{c^{4}d^{-2}}\right)^{-3}$

B. Coloque $=$ o $\neq$ en cada casilla según corresponda.

1. $(3+2)^3$ ☐ 5^3

2. $(3-3)^3$ ☐ $5^3 - 3^3$

3. $(2 \times 5)^4$ ☐ 10^4

4. $(16 \div 8)^5$ ☐ $16^5 \div 8^5$

C. ¿Cuál de los siguientes pares de números está más cerca, en la recta real, uno del otro?

10^6 y 10^7 ó 100^3 y 100^4

$\sqrt{25} = 5$

$-\sqrt{25} = -5$

¿Qué pares de números enteros positivos menores que 10 satisfacen la ecuación $x^y = y^x$?

1.6.2. Radicación

¿Qué número elevado al cuadrado da como resultado 16? La pregunta anterior se puede contestar con dos números: 4 y –4. Se dice que la *raíz cuadrada positiva* de 16 es 4 y se escribe: $\sqrt[2]{16} = \sqrt{16} = 4$ y también que la *raíz cuadrada negativa* de 16 es –4 y se escribe $-\sqrt{16} = -4$.

¿Qué número elevado al cubo da como resultado 8? En este caso sólo hay un número real: el 2. Por tanto, la *raíz cúbica* de 8 es 2 y se escribe $\sqrt[3]{8} = 2$.

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

Así como en las potencias, en las raíces se tienen asociados unos términos; por ejemplo, en $\sqrt[3]{8}$, el *índice* de la raíz es el 3, el *radicando* es el 8, la *raíz* es 2 y el signo $\sqrt{}$ se llama *radical*.

Observemos que: $\sqrt[3]{-8} = -2$ porque $(-2)^3 = -8$, pero $\sqrt{-4}$ no está definido en los números reales pues no hay un número real cuyo cuadrado sea -4.

En forma similar a las raíces cuadradas y cúbicas, se pueden considerar raíces cuartas, quintas, etc. En general,

El símbolo $\sqrt[n]{a} = b$ significa $b^n = a$

Propiedades análogas a las presentadas en la tabla de las propiedades de las potencias se tienen para las raíces. Complete la siguiente tabla:

Ejemplo	Propiedad
$\sqrt{16 \cdot 9} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{9}$	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$
$\sqrt{\dfrac{16}{4}} = \dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}}$	
$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{64}$	

Se ha presentado ya el significado que tiene la potencia b^a si a es un número entero; ahora se va a extender este a *exponentes racionales*. ¿Qué significado dar, por ejemplo, a $16^{\frac{1}{2}}$? Si la propiedad del producto de potencias de la misma base se hace extensiva a potencias como ésta, entonces para el producto: $16^{\frac{1}{2}} \cdot 16^{\frac{1}{2}}$, se tendrá:

$$16^{\frac{1}{2}} \cdot 16^{\frac{1}{2}} = 16^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 16^{1} = 16.$$

Esto indica que $16^{\frac{1}{2}}$ es la raíz cuadrada positiva de 16; por eso se identifica $16^{\frac{1}{2}}$ con $\sqrt{16}$.

Se definen, en general, las potencias racionales, así:

$$b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^{m}} = (\sqrt[n]{b})^{m}$$

Algunas operaciones que involucran fracciones con raíces en el denominador se facilitan escribiendo fracciones equivalentes que no tienen raíces en el denominador. A este proceso se le llama *racionalizar el denominador*.

EJEMPLOS

Racionalizar el denominador de:

A. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ***B.*** $\dfrac{4}{\sqrt[3]{5}}$ ***C.*** $\dfrac{-1}{\sqrt{a+4}}$

1. Al multiplicar el numerador y el denominador por $\sqrt{2}$ se tiene:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2. Para racionalizar $\dfrac{4}{\sqrt[3]{5}}$, multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt[3]{5^{2}}$:

$$\frac{4}{\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{\sqrt[3]{5^{2}}}{\sqrt[3]{5^{2}}} = \frac{4\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5^{3}}} = \frac{4\sqrt[3]{25}}{5}$$

3. Multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt{a+4}$ y obtenemos:

$$\frac{-1}{\sqrt{a+4}} \frac{\sqrt{a+4}}{\sqrt{a+4}} = -\frac{\sqrt{a+4}}{a+4}$$

EJERCICIO 23

A. Simplifique cada expresión:

1. $\sqrt{\dfrac{16}{25}}$

2. $\dfrac{\sqrt{64}}{\sqrt[3]{8}}$

3. $\sqrt[3]{-125}$

4. $-\sqrt{\dfrac{81}{100}}$

5. $-\sqrt[3]{27}$

6. $\sqrt{49}\ \sqrt[3]{64}$

7. $\sqrt[3]{x^3}$

8. $\sqrt{a^4b^6}$

9. $\sqrt{\sqrt[3]{64a^{12}}}$

10. $\sqrt{xy}\ \sqrt{x^3y^5}$

11. $\dfrac{\sqrt{m^5n^3}}{\sqrt{m^7n}}$

12. $\sqrt[4]{16c^4d^8}$

B. Simplifique y escriba el resultado con el signo radical.

1. $m^{\frac{1}{3}} \cdot m^{\frac{2}{3}}$

2. $m^{\frac{1}{2}} \cdot m^{\frac{1}{3}}$

3. $-3y \cdot 4\sqrt{y}$

4. $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{5}}$

5. $\left(2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{6}}\right)^{\frac{2}{3}}$

6. $\dfrac{8z}{2\sqrt{z}}$

C. Racionalice el denominador de cada expresión:

1. $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

2. $\sqrt{\dfrac{x^5}{3}}$

3. $\dfrac{2}{\sqrt[3]{4}}$

4. $\dfrac{m}{\sqrt[5]{m^3}}$

5. $\dfrac{2}{\sqrt{3+a}}$

6. $\dfrac{-3}{\sqrt{x-2}}$

$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

1.7. Notación científica

La distancia a la estrella más cercana es de unos 40 400 000 000 000 000 metros. Números muy grandes como el anterior cuya escritura es bastante larga (o números muy pequeños) pueden ser representados de manera abreviada usando *notación científica*; esta consiste en expresar la cantidad dada como un producto en donde el primer factor es un número mayor o igual a 1 y menor que 10, y el otro factor es *una potencia de 10*. Para esto se busca la primera cifra distinta de cero que se encuentre de izquierda a derecha y se escribe a continuación el punto decimal; el exponente de 10 se coloca apropiadamente para que el producto sea igual al número inicial. Así, la distancia a la estrella más cercana, escrita en notación científica, es: 4.04×10^{16}.

EJEMPLOS

A. Notación estándar:		Notación científica:
1.	73 500 000 000 000	7.35×10^{13}
2.	0.00412	$4.12\ \ 10^{-3}$
B. Notación científica:		Notación estándar:
1.	1.354×10^{7}	13 540 000
2.	7.08×10^{-4}	0.000 708

EJERCICIO 24

A. Escriba en notación científica la cantidad indicada:

1. La distancia, en km, que la luz recorre en un año.

2. El diámetro de un electrón: 0.0000000000004 cm

3. La masa de la Tierra: 5 970 000 000 000 000 000 000 000 kg

4. La masa de un molécula de oxígeno es 0.000000000000000000000053 g.

B. Escriba en notación estándar:

1. 1.53×10^{8}

2. 2.048×10^{-9}

3. 3.0025×10^{12}

4. 9.8×10^{-10}

C. Efectúe las operaciones y exprese el resultado en notación científica:

1. $(3 \times 10^{12})(5 \times 10^{25})$

2. $\dfrac{(7.56 \times 10^{-12})(6.03 \times 10^{34})}{0.000000127 \times 3500000}$

3. $\dfrac{(8 \times 10^{7})(6 \times 10^{34})}{(3 \times 10^{18})}$

4. $\dfrac{0.0000012 \times 30000}{0.000002 \times 0.00018}$

D. La velocidad de la luz es de aproximadamente 186 000 millas por segundo. ¿Cuánto tiempo le toma a un rayo de luz solar llegar a la Tierra? (la distancia de la Tierra al Sol es de unos 93 millones de millas).

E. Un cuarto aislado de hospital que mide 6 m de ancho, 8 m de largo y 2.5 de alto se llena de oxígeno. Un metro cúbico contiene 6.02×10^{23} moléculas. ¿Cuántas moléculas de oxígeno hay en el cuarto?

F. Si un país tiene como presupuesto anual 4.2×10^{13} pesos y cada día gasta 1.2×10^{11} pesos, ¿alcanza dicho presupuesto para el año (365 días)? ¿Cuánto dinero falta o sobra?

1.8. EJERCICIOS FINALES DE LA UNIDAD 1

1. Redondee el número 6537 a la cifra indicada:

- a la decena más cercana
- a la centena más cercana

2. A partir de la información contenida en el siguiente diálogo entre dos amigos, determine las edades de los hijos de uno de ellos:

- ¿Cuántos hijos tienes y de qué edad?
- Tengo tres hijos. El producto de sus edades es 36 y su suma es el número de esa casa. . .
- Me falta información.
- ¡Ah!, es verdad: la mayor se llama Alicia.

3. Indique las posibles coordenadas de los vértices de un rectángulo cuyo perímetro sea 20 unidades.

4. Desarrolle las sumas o restas:

a) $(-12) + (-4) =$

b) $(-23) + 50 =$

c) $15 - 28 =$

d) $(-7) - (-12) =$

e) $23 - (-23) =$

f) $18 - 23 - 40 + 16 + 4 =$

g) $(14 - 19) - (21 - 30) =$

5. Efectúe las multiplicaciones o divisiones:

a) $(-9)(16) =$

b) $(-7)(-3)(-5) =$

c) $(-64) \div 8 =$

d) $\dfrac{-303}{-3} =$

6. Desarrolle cada potencia:

a) $(-3)^3 =$ *c)* $(-4)^2 =$ *e)* $(-1)^{2009} =$

b) $-4^2 =$ *d)* $-5^3 =$ *f)* $2009^0 =$

7. Realice las operaciones indicadas.

a) $7 + 18 \div -3 + 4^2 \cdot 2 - 9$

b) $3 \cdot (8 - 11) + 12 \div (-14 + 8) - 3 \cdot (-4)$

c) $25 + (-3)^3 + (-7) \cdot (-2) - 28 \div 7$

d) $-6 + 5 \cdot -4 - 12 \div (3 \cdot (-2)) + 7 \cdot 3$

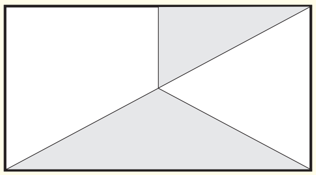
8. Simplifique al máximo cada fracción:

a) $\dfrac{20}{48}$ *c)* $\dfrac{108}{66}$ *e)* $\dfrac{135}{105}$

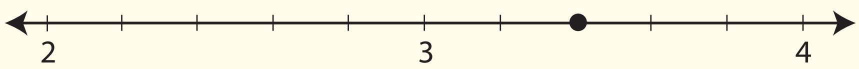
b) $\dfrac{63}{84}$ *d)* $\dfrac{88}{121}$ *f)* $\dfrac{140}{210}$

9. Escoja cuatro números del conjunto $\{12, 7, 18, 6, 5, 4\}$ para formar dos fracciones que resulten ser equivalentes.

10. ¿Qué fracción de la figura está sombreada?



11. ¿Qué número está indicado por el punto? Dé la respuesta como un número mixto y como una fracción.



12. Si $\frac{3}{7} = \frac{x}{42}$, ¿cuál es el valor de x?

13. Las fracciones: $\frac{33}{27}, \frac{44}{36}, \frac{66}{54}$ son equivalentes. Halle otras dos fracciones equivalentes a las anteriores.

14. Coloque $<$, $>$ o $=$ entre las dos fracciones de modo que resulte una afirmación verdadera:

a) $\frac{7}{8} \; \square \; \frac{2}{3}$

b) $\frac{5}{9} \; \square \; \frac{3}{5}$

c) $-\frac{5}{16} \; \square \; -\frac{5}{17}$

d) $\frac{90}{70} \; \square \; \frac{45}{35}$

e) $-\frac{15}{42} \; \square \; \frac{5}{3}$

f) $-\frac{15}{21} \; \square \; -\frac{45}{63}$

15. Ordene cada conjunto de fracciones de menor a mayor:

a) $\frac{3}{4}, \frac{3}{3}, \frac{3}{8}, \frac{3}{5}, \frac{3}{16}, \frac{3}{7}$

b) $\frac{7}{7}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{2}{3}, \frac{11}{8}, \frac{1}{3}$

16. Efectúe:

a) $\frac{2}{5} \cdot \frac{10}{13}$

b) $-2\frac{1}{3} \div \frac{5}{6}$

c) $\frac{-1}{3} + 1\frac{1}{4} + \frac{2}{5}$

d) $\frac{2}{25} - \frac{3}{10}$

e) $\left(\frac{-3}{2}\right)^3$

f) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)^2$

17. El arroz que hay en una despensa está en 3 tarros azules y 5 rojos. Cada tarro rojo contiene $2\frac{1}{2}$ libras y cada tarro azul $1\frac{1}{4}$ libras. ¿Cuántas libras de arroz hay en la despensa?

18. De las siguientes fracciones: $\frac{7}{5}, \frac{31}{20}, \frac{28}{20}, \frac{14}{14}$, ¿cuál es más grande que $1\frac{1}{2}$?

19. De las siguientes fracciones: $\frac{2}{3}, \frac{7}{10}, \frac{5}{6}, \frac{3}{5}$, ¿cuál es la más cercana a $\frac{1}{2}$?

20. Coloque en cada casilla alguno de los números 1, 2, 3, 4, exactamente una vez:

$$\frac{\boxed{}}{\boxed{}} + \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

de manera que la suma de fracciones así formada sea la más pequeña posible.

21. Como el anterior, pero formando la diferencia más pequeña posible:

$$\frac{\boxed{}}{\boxed{}} - \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

22. Calcule:

a) $19.5 + 12.64 =$	***e)*** $(-0.2)^3 =$	***i)*** $(-3.5) + (9.8) + (-6.3) =$
b) $7.6 - 4.38 =$	***f)*** $16 \div 0.2 =$	***j)*** $(-2.5) \cdot 3 =$
c) $2.56 - 3.2 =$	***g)*** $0.08 \div 0.4 =$	***k)*** $0.13 \cdot 1000 =$
d) $(5.5)\,(-3.8) =$	***h)*** $-(0.3)^4 =$	***l)*** $450 \div 100 =$

23. Cálculo mental.

Dé el resultado de las siguientes operaciones sin utilizar calculadora:

a) $(0.1234)(1000)$

b) $87.65 \div 100$

c) $\dfrac{0.0234}{-10}$

d) $(0.1)^3$

e) 0.7×0.03

f) $0.1 \times 0.2 \times 0.3$

24. Unos $\dfrac{2}{3}$ del peso de una persona son debidos al agua que hay en el cuerpo. ¿Cuántos kg de agua contiene el cuerpo de una persona que pesa 63 kg?

25. Escriba cada fracción o decimal en forma de porcentaje:

a) $\dfrac{3}{4}$ ***b)*** $\dfrac{1}{5}$ ***c)*** $\dfrac{20}{50}$ ***d)*** 1 ***e)*** 0.32 ***f)*** 0.036 ***g)*** 1.5 ***h)*** 0.004

26. De un grupo de 20 personas, 14 son mujeres. ¿Qué porcentaje del grupo son hombres?

27. De los números enteros desde el 1 hasta el 30, determine:

a) ¿que porcentaje de estos números tiene 2 dígitos?

b) ¿qué porcentaje son múltiplos de 9?

c) ¿qué porcentaje son primos?

d) ¿qué porcentaje son divisores de 36?

28. Complete el espacio en blanco:

a) _____% de 65 es 45.5

b) _____% de 9 es 4.5

c) ______% de 250 es 500

d) 50% de ______ es 23

e) 25% de ______ es 3

f) 150% de ______ es 9

29. Considere fracciones con denominador 11. Utilice la calculadora para expresar en forma decimal las fracciones $\frac{1}{11}, \frac{2}{11}, \frac{3}{11}, \frac{4}{11}, \frac{5}{11}$. Indique qué regularidad observa.

Utilice lo anterior para expresar $\frac{7}{11}$ y $\frac{9}{11}$ en forma decimal sin usar la calculadora. Luego compruebe.

30. Resuelva cada ecuación:

a) $x \cdot 12 = 48$

b) $56 \cdot m = 100$

c) $-6p = 28$

d) $\dfrac{n}{-3} = -13$

e) $\dfrac{-2}{3}x = 24$

31. Las temperaturas en grados Kelvin (K) están relacionadas con las temperaturas en grados Celsius (C) por medio de la fórmula: $K = C + 273$. La temperatura máxima en la superficie de Marte es de 290 grados Kelvin. Exprese esta temperatura en grados Celsius.

32. Represente cada expresión en la forma 3^c, (c es un número entero):

a) $\dfrac{3^7}{3^3}$

b) $3^6 \cdot 3^8$

c) $(3^4)^5$

d) $(3 \cdot 3^8)^4$

e) $\dfrac{3^5}{3^5}$

f) $\dfrac{\left(3^4 \cdot 3^6\right)^2}{\left(3^2 \cdot 3^3\right)^3}$

33. Simplifique:

a) $\sqrt{2x}\cdot\sqrt{8x}$

b) $\dfrac{\sqrt{72x^3}}{\sqrt{8x}}$

c) $\sqrt[3]{\sqrt{x^{12}}}$

d) $36^{\frac{3}{2}}$

e) $\left(3x^{\frac{2}{3}}\right)\left(4x^{\frac{3}{4}}\right)$

f) $\left((64)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$

34. Escriba cada número en notación científica:

a) 60 000

b) 7 250 000

c) ciento cuarenta y cinco billones

d) 0.0000345

e) veinticinco mil millones

35. Escriba cada número en notación estándar:

a) 2.5×10^3

b) 4.07×10^6

c) 4.5×10^{-5}

d) 2.6×10^{-4}

e) 8×10^{-3}

UNIDAD

2

Expresiones algebraicas

BREVE HISTORIA DEL ÁLGEBRA

HERÓN de Alejandría
(10–70 d.C. aprox.)

Fue un ingeniero griego y matemático helenístico, que destacó en Alejandría (en la provincia romana de Egipto). Ejerció de ingeniero activamente en su ciudad natal, Alejandría. Es considerado uno de los científicos e inventores más grandes de la antigüedad y su trabajo es representativo de la tradición científica helenista.
Como matemático, escribió la obra *La Métrica*, donde estudia las áreas y volúmenes de distintas superficies y cuerpos. Desarrolló también técnicas de cálculo, tomadas de los babilonios y egipcios, como el cálculo de raíces cuadradas mediante iteraciones.

La historia del álgebra comenzó en los antiguos Egipto y Babilonia (desde comienzos del segundo milenio antes de Cristo); en esa época ya se resolvían ecuaciones lineales ($ax = b$), cuadráticas ($ax^2 + bx = c$), y ecuaciones de la forma $x^2 + y^2 = z^2$. Los babilonios resolvían cualquier ecuación cuadrática empleando esencialmente los mismos métodos que hoy se enseñan.

Los matemáticos alejandrinos Herón y Diofanto continuaron con la tradición de Egipto y Babilonia. Los conocimientos sobre resolución de ecuaciones encontraron acogida en el mundo islámico, en donde se les llamó "ciencia de reducción y equilibrio" (la palabra árabe *al-jabru*, que significa "reducción", es el origen de la palabra *álgebra*). En el siglo IX el matemático Al-Khowarizmi escribió uno de los primeros libros árabes de


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
Rerum Arithmeticarum
Libri sex,

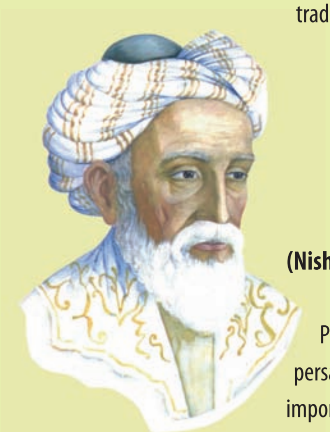
BASILEAE

DIOFANTO de Alejandría
(nacido alrededor del 200/214 - fallecido alrededor de 284/298)

Antiguo matemático griego considerado "el padre del álgebra". El matemático alejandrino debe su renombre a su obra *Arithmetica*. Este libro, que constaba de trece libros de los que sólo se han hallado seis, fue publicado por Guilielmus Xylander en 1575 a partir de unos manuscritos de la Universidad de Wittenberg, añadiendo el editor un manuscrito sobre números poligonales, fragmento de otro tratado del mismo autor.

AL-KHOWARIZMI
(780 - c.850)

Matemático y astrónomo miembro de la "Casa de la sabiduría", fundada en Bagdad (809-833), en la que trabajaron sabios judíos y cristianos procedentes de Siria, Irán y Mesopotamia. Escribió varios libros de astronomía, uno de álgebra y otro de aritmética (traducidos al latín en el siglo XI), en los que hace una exposición exhaustiva del sistema de numeración hindú. Este sistema se empezó a conocer como "el de Al-Juarizmi" y por deformación en la traducción llegó hasta "algoritmo".



Omar KHAYYAM
(Nishapur, actual Irán, 1048-id., 1131)

Poeta, matemático y astrónomo persa. En Samarcanda completó un importante tratado de álgebra. Bajo los auspicios del sultán de Seljuq, Malik-Shah, realizó observaciones astronómicas para la reforma del calendario, además de dirigir la construcción del observatorio de la ciudad de Isfahán. De nuevo en Nishapur, tras peregrinar a La Meca, se dedicó a la enseñanza y a la astrología. La fama de Khayyam en Occidente se debe fundamentalmente a una colección de cuartetos cuya autoría se le atribuye y que fueron versionados en 1859 por el poeta británico Edward Fitzgerald.

álgebra, una presentación sistemática de la teoría fundamental de ecuaciones, con ejemplos y demostraciones incluidas.

En las civilizaciones antiguas se escribían las expresiones algebraicas utilizando abreviaturas solo ocasionalmente; sin embargo, en la Edad Media los matemáticos árabes describían cualquier potencia de la incógnita x, y desarrollaron el álgebra fundamental de los polinomios, aunque sin usar los símbolos modernos. Esta álgebra incluía multiplicar, dividir y extraer raíces cuadradas de polinomios, así como el conocimiento del teorema del binomio. El matemático persa Omar Khayyam mostró cómo expresar las raíces de ecuaciones cúbicas utilizando los segmentos obtenidos por la intersección de secciones cónicas, aunque no pudo encontrar una fórmula para las raíces.

En el siglo XVI los italianos Scipione del Ferro, Tartaglia

Scipione DEL FERRO
(1465 - 1526, Bologna hoy Italia)

Aunque no es un matemático muy conocido, su papel en la historia de la Matemática tiene que ver con la resolución de la ecuación de tercer grado. Sería Scipione del Ferro, el primero en estudiar con un método ortodoxo, la obtención de las raíces o soluciones de las ecuaciones cúbicas.
Desde la época de los babilonios, 2500 a. C.,cuando estos ya conocían la solución de las ecuaciones de segundo grado, (para aplicarlo a sus construcciones) y hasta el s. XVI no hubo avances significativos con respecto a este tema. Scipione del Ferro se educó en la Universidad de Bolonia donde fue profesor de Aritmética y Geometría .
No han sobrevivido escritos de del Ferro, ello se debe a la resistencia que tenía a divulgar sus trabajos, prefería comunicarlos a un reducido grupo de alumnos y amigos.

Niccolò FONTANA TARTAGLIA
(1500 - 13 de diciembre 1557)
Matemático italiano apodado *Tartaglia* (el tartamudo) llegó a ser uno de los principales matemáticos del siglo XVI. Enseñó y explicó esta ciencia sucesivamente en Verona, Vicenza, Brescia y finalmente Venecia, donde falleció. Su aprendizaje fue esencialmente autodidacta. Desarrolló la fórmula general para resolver las ecuaciones de tercer grado. Realizó los primeros estudios de aplicación de las matemáticas a la artillería en el cálculo de la trayectorias de los proyectiles, así como por la expresión matemática para el cálculo del volumen de un tetraedro cualquiera en función de las longitudes de sus lados, la llamada *Fórmula de Tartaglia*.

y Gerolamo Cardano resolvieron la ecuación cúbica general en función de las constantes que aparecen en la ecuación. Ludovico Ferrari encontró la solución para la ecuación de cuarto grado y, como consecuencia, ciertos matemáticos de los siglos posteriores intentaron encontrar la fórmula de las raíces de las ecuaciones de quinto grado y superior. Sin embargo, a principios del siglo XIX el matemático noruego Abel Niels y el francés Évariste Galois demostraron que no es posible la existencia de dicha fórmula.

Un avance importante en el álgebra fue la introducción, en el siglo XVI, de símbolos para las incógnitas y para las operaciones y potencias algebraicas. Debido a este avance, el *Libro III de la Geometría* (1637), escrito por el francés René Descartes, se parece bastante a un texto moderno de álgebra. Sin embargo, la contribución más


HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

HAbes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cossa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam septuaginta euaserint. Neque solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc aũt librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & planè inexhausto totius Arithmeticæ thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitarentur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

Artis magnae, sive de regulis algebraicis, más conocido como Ars Magna (en latín Gran Obra), es un importante libro de matemática escrito originalmente en latín por Gerolamo Cardano en 1545.

René DESCARTES
(La Haya, 1596 - Estocolmo, 1650)
Filósofo y matemático francés. Su primera obra publicada (anónima) fue el «Discurso del método», preámbulo a los tres tratados sobre «Dióptrica», «Meteoros» y «Geometría» (1637), conjunto que tituló «Ensayos filosóficos». Son incuestionables los aportes de Descartes en lo científico (simplificó las notaciones algebraicas, creó la geometría analítica y fundamentó el determinismo físico y biológico).

Abel NIELS
(1802-1829)
Matemático noruego nacido en Finnoy y fallecido en Froland. Nació en el seno de una familia muy numerosa, hijo de un pastor protestante. A los dieciséis años su maestro le aconsejó leer los grandes libros de los matemáticos más eminentes, incluidas las obras de Gauss. Abordó el problema de la solución de la ecuación de quinto grado (recordemos que las de tercer y cuarto grado ya habían sido resueltas en tiempos de Cardano). Cultivó la rama del análisis matemático referente a la teoría de las funciones multiperiódicas o trigonometría superior. También estudió por primera vez ciertas entidades matemáticas que fueron llamadas más tarde "funciones abelianas" y cuya teoría se denomina actualmente teoría de grupos.

importante de Descartes a las matemáticas fue el descubrimiento de la Geometría Analítica, que reduce la resolución de problemas geométricos a la resolución de problemas algebraicos.

Durante el siglo XVIII se continuó trabajando en la teoría de ecuaciones y en 1799 el alemán Carl Friedrich Gauss publicó la demostración de que toda ecuación polinómica tiene al menos una raíz en el sistema de los números complejos. En los tiempos de Gauss, el álgebra había entrado en su etapa moderna. El foco de atención se trasladó de las ecuaciones polinómicas al estudio de la estructura de sistemas matemáticos abstractos, dando origen al álgebra moderna o abstracta. El álgebra moderna ha seguido evolucionando, obteniéndose con ella resultados importantes y encontrando aplicaciones en todas las ramas de las matemáticas y en muchas otras ciencias.

Karl Friedrich GAUSS
(Brunswick, actual Alemania, 1777 - Gotinga, *id.*, 1855)
Matemático, físico y astrónomo alemán. Desde muy temprana edad dio muestras de una prodigiosa capacidad para las matemáticas.
Realizó sus estudios secundarios y universitarios en la Universidad de Gotinga entre 1795 y 1798. Su tesis doctoral (1799) versó sobre el teorema fundamental del álgebra (que establece que toda ecuación algebraica de coeficientes complejos tiene soluciones igualmente complejas), que Gauss demostró.
En 1801 Gauss publicó una obra destinada a influir de forma decisiva en la conformación de la matemática del resto del siglo, y particularmente en el ámbito de la teoría de números, las *Disquisiciones aritméticas* que marcaron el punto de partida de la moderna teoría de los números algebraicos.
También mereció su atención el fenómeno del magnetismo, que culminó con la instalación del primer telégrafo eléctrico (1833). Íntimamente relacionados con sus investigaciones sobre dicha materia fueron los principios de la teoría matemática del potencial, que publicó en 1840.
Le mereció en vida el apelativo de «príncipe de los matemáticos».

Introducción

En la unidad anterior la atención estaba centrada en afirmaciones que involucran números particulares (números reales); ahora el interés está en afirmaciones de carácter más general en las cuales aparecen letras, llamadas ***variables***, que representan números cualesquiera de ciertos conjuntos; ingresamos así en los terrenos propios del ***álgebra***. Esta habilidad de hacer afirmaciones generales en lenguaje matemático es de gran valor en la ciencia pues permite formular relaciones concisas entre cantidades que varían.

Veremos en esta unidad expresiones en las cuales se combinan números reales, variables y operaciones (***expresiones algebraicas***); igualmente presentaremos algunos contextos donde se emplean dichas expresiones teniendo en cuenta que las reglas para realizar operaciones con las variables son las mismas utilizadas al operar con números reales, y por último, definiremos un tipo particular de expresiones llamadas ***polinomios***.

Situación inicial

Se dispone de dos tipos de baldosas para cubrir el piso de una habitación: unas azules y otras blancas. Cada baldosa azul cuesta $\$2$ y cada blanca $\$3$.

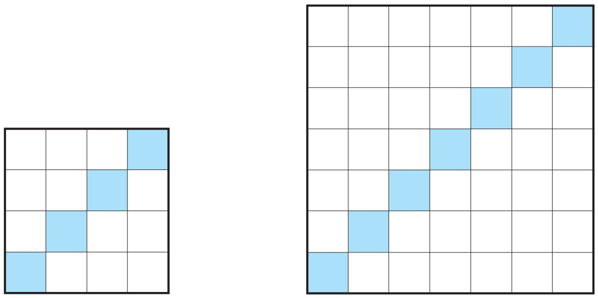


Figura 2.1

1. Para un diseño como el que se muestra en la figura 2.1 (aplicable a pisos cuadrados), ¿cuál es el precio de todas las baldosas, si el número de baldosas en cada lado es:

a) 4
b) 7
c) 20
d) 45
e) *n*

2. Si el diseño es como el de la figura 2.2, en el cual las baldosas blancas están solamente en el contorno, ¿cuál es el precio de las baldosas si el piso es de:

   a) 5 baldosas de largo por 4 de ancho
   b) 20 baldosas de largo por 16 de ancho
   c) n baldosas de largo por m de ancho?

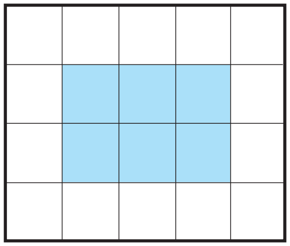


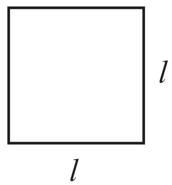
Figura 2.2

2.1. Simplificación de expresiones algebraicas

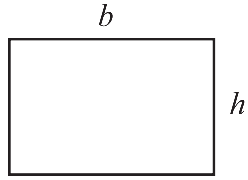
¿A cuántos minutos equivalen 3 horas y 20 minutos? La respuesta la obtenemos multiplicando 60 por 3 y luego sumando 20, esto es: $60 \times 3 + 20 = 180 + 20 = 200$ minutos. Si en lugar de 3 horas pensamos en cualquier otro número entero no negativo de horas, el proceso a seguir se recoge en la expresión $60x + 20$, llamada ***expresión algebraica***, pues involucra el uso de una letra, la x, representando ésta a un número cualquiera del conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$; la x en esta expresión desempeña el papel de ***variable***.

Veamos otros ejemplos donde se usan expresiones algebraicas:

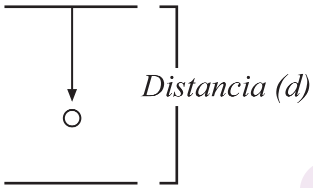
- El perímetro P de un cuadrado de lado l se puede indicar con la expresión $4l$. El lado de un cuadrado de área A está dado por $\sqrt{A}$. Con las variables l y A se representan números reales positivos cualesquiera.



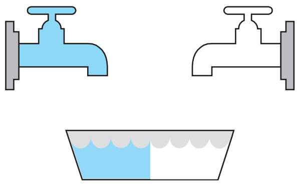
- El perímetro P de un rectángulo de lados b y h es $2b+2h$. El área del rectángulo es $b \cdot h$. En este caso empleamos dos variables, la b y la h, las cuales representan valores reales positivos cualesquiera.



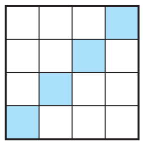
- La cinemática nos dice que la distancia d en metros, que recorre un cuerpo que se deja caer libremente después de transcurridos t segundos, y antes de llegar al piso, se puede hallar con la expresión $4{,}9t^2$; la variable t indica cualquier número real positivo no mayor al tiempo de caída.



- Retomando la *situación inicial* de la sección 1.2, si cuando solo ingresa agua al recipiente el tiempo de llenado es x horas, y cuando solo ingresa leche el tiempo es y horas, entonces cuando ingresan simultáneamente, el tiempo t de llenado es $\dfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = \dfrac{xy}{x+y}$ horas.



- Volviendo a la parte 1 de la *situación inicial* de esta unidad, el precio de las n baldosas azules es $2n$ pesos y el de las $(n^2 - n)$ baldosas blancas $3(n^2 - n)$ pesos; por tanto, el precio de todas las baldosas es $2n + 3(n^2 - n)$. (¿En qué conjunto de valores asumimos a n como variable?).



Las expresiones algebraicas de los ejemplos anteriores pueden ser ***evaluadas*** en valores particulares de la(s) variable(s) haciendo las sustituciones correspondientes y realizando las operaciones indicadas.

Evalúe las expresiones algebraicas anteriores para:

$$l = 6{,}5;\ \ A = 49;\ \ b = 5;\ \ h = 4;\ \ t = 2;\ \ x = 3;\ \ y = 4;\ \ n = 20.$$

Es deseable simplificar los cálculos al hacer la evaluación de una expresión larga, como en $2n + 3(n^2 - n)$; para esto se busca una forma abreviada que sea equivalente. En este caso, aplicando la propiedad distributiva llegamos a $2n + 3n^2 - 3n$. En esta expresión identificamos tres términos: $2n$, $3n^2$ y $-3n$. En cada término conviene distinguir la parte literal y el coeficiente:

en el término $2n$, la parte literal es n y el coeficiente es 2
en el término $3n^2$, la parte literal es n^2 y el coeficiente es 3
en el término $-3n$, la parte literal es n y el coeficiente es -3

Observamos que hay dos **términos con la misma parte literal**: $2n$ y $-3n$ (términos semejantes). Estos se pueden expresar en uno sólo utilizando las propiedades conmutativa y distributiva:

$$2n + 3n^2 - 3n = 3n^2 + 2n - 3n = 3n^2 + (2 - 3)n = 3n^2 - n$$

Esta última expresión contiene ahora sólo dos términos.

Evalúe la expresión $3n^2 - n$ para $n = 20$ y compare el resultado con el obtenido arriba.

¿Cuál es el coeficiente del término $-n$?

En el ejemplo anterior se ha mostrado el proceso que se sigue para simplificar expresiones algebraicas:

se identifican los términos semejantes
y luego se suman los coeficientes de dichos términos.

Dos términos son semejantes si tienen la misma parte literal

EJEMPLOS

Simplificación de expresiones:

1. La expresión $-15a + 9a$ se simplifica:

$$(-15 + 9)\,a = -6a$$

2. $-8ab + (-7ab) = -15ab$

3. $3x + 5y - 9x + 6y = 3x - 9x + 5y + 6y = -6x + 11y$

4. $7x - 5 + 8y - 4 = 7x + 8y - 5 - 4 = 7x + 8y - 9$

5. $x^2 + 2x - 7x^2 + 8x + 1 = -6x^2 + 10x + 1$

6. $\frac{1}{2}x + y - x + 10 = -\frac{1}{2}x + y + 10$

7. $7\sqrt{m} - 9\sqrt{n} + 4\sqrt{n} - 3\sqrt{m} = 4\sqrt{m} - 5\sqrt{n}$

8. $(2a - 8) + (-6a + 3)$; en este caso suprimimos primero los paréntesis sin cambiar los signos, pues están precedidos de signo positivo:

$$(2a - 8) + (-6a + 3) = 2a - 8 - 6a + 3 = -4a - 5$$

9. $(2a - 8) - (-6a + 3)$; suprimimos primero los paréntesis cambiando los signos de los términos contenidos en el paréntesis que está precedido del signo menos:

$$(2a - 8) - (-6a + 3) = 2a - 8 + 6a - 3 = 8a - 11$$

10. $(2a - 8) + 2(-5 + 4)$; de nuevo suprimimos los paréntesis; en esta ocasión, aplicando la propiedad distributiva:

$$(2a - 8) + 2(-5a + 4) = 2a - 8 - 10a + 8 = -8a$$

EJERCICIO 1

A. Simplifique cada expresión algebraica:

1. $3xy - 5y + 9xy - 2y$

2. $5ab - 3a^2 + 2b^2 - 4b^2 + 7a^2$

3. $0,5x^2 - 0,7x^7 - x^2 + x^4$

4. $3\sqrt{x} - 5\sqrt{y} + 9\sqrt{x} - 8\sqrt{y}$

5. $\frac{5}{4}n^2m - \frac{2}{3}n^2 + \frac{3}{8}n^2m$

6. $\frac{3}{2}x^2y^3 - \frac{1}{6}x^4y^3 - \frac{3}{4}x^4y^3$

7. $5t^2 + 3t - 18t^2 - 9t$

8. $5\sqrt[3]{z} - 2\sqrt[3]{z} + 6\sqrt[3]{y}$

9. $\frac{1}{3}xy - \frac{5}{2}y^2 - \frac{1}{3}xy + \frac{3}{2}xy^2$

10. $\frac{1}{3}ab^3 - \frac{5}{3}a^2 + \frac{1}{3}b^3 + \frac{3}{2}ab^3$

B. Algunas expresiones del ***lenguaje usual*** u ***ordinario*** se pueden llevar o traducir al ***lenguaje matemático*** utilizando expresiones algebraicas. Por ejemplo, “el triple de un número disminuido en dos” se puede escribir como $3x - 2$; la x aquí representa un número cualquiera dentro de un conjunto de números no especificado (cuando no se dé explícitamente el conjunto, asumimos el conjunto numérico más amplio para el cual tienen sentido el contexto en consideración y las operaciones indicadas; tenga presente el orden en que se realizan las operaciones).

Escriba en lenguaje matemático:

1. El producto de un número n y siete

2. La suma de un número m y doce

3. El cuadrado de un número x disminuido en seis

4. La diferencia del cubo de un número z y ocho

5. Seis menos que el cociente de un número a y cuatro

6. La raíz cuadrada de la suma de trece y el doble de un número b

7. La mitad de la suma de dos números

8. El cociente de cinco veces un número y diez
9. La diferencia de los cuadrados de dos números
10. El cuadrado de la suma de seis veces un número y doce
11. El cuadrado de la diferencia de dos números
12. La raíz quinta del cociente de dos números

C. Escriba en lenguaje *usual* u *ordinario*:

1. $3x + 11$
2. $a^2 - 7$
3. $\sqrt{5m + 8}$
4. $\dfrac{3x+5}{2x-7}$
5. $\sqrt{\dfrac{3z+1}{z}}$
6. $\left(\dfrac{y}{y+3}\right)^2$
7. $x^3 - y^2$
8. $\sqrt[4]{x} - 2\sqrt[3]{x}$
9. $\dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{4}$
10. $(x + x^2)^2$
11. $\sqrt{x} - \sqrt{y}$
12. $(x + x^2)^3$

D. Expresiones de las ciencias se traducen al lenguaje matemático utilizando ecuaciones (igualdad entre dos expresiones algebraicas).
Ejemplo: "La temperatura en grados Fahrenheit, F, es nueve quintos de la temperatura en grados Celcius, C, aumentando en treinta y dos", se traduce como:

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

Escriba en lenguaje matemático:

1. El cuadrado del periodo P de un planeta es igual al producto de una constante K y el cubo de la distancia media R, del planeta al Sol.
2. La utilidad U, es igual al ingreso I, menos costo total C.
3. En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa h, es igual a la suma de los cuadrados de los catetos a y b.

2.2. Polinomios

Algunas de las expresiones algebraicas encontradas en la sección anterior solo ***involucran operaciones de suma, resta, multiplicación*** o ***elevación de las variables a exponentes naturales***, como en las siguientes:

$$60x+20 \quad ; \quad 21+2a \quad ; \quad y^4z^3-7y^3z^2+\frac{4}{3}y^2z-\frac{3}{5} \quad ; \quad b\cdot h, \quad 3n^2-n \; ;$$

$$49t^2 \quad ; \quad 5x+2y-1 \quad ; \quad \frac{2}{3}x^6-\frac{1}{3}x^4+\frac{5}{4}x^2+\frac{1}{8} \quad ; \quad 2m^5-3m^4+5m^2-m$$

Expresiones como las anteriores se llaman ***polinomios***.

¿Por qué las siguientes expresiones algebraicas **no** son polinomios?

$$\sqrt{A}\; ; \; \frac{xy}{x+y}\; ; \quad 2\sqrt{x}\,y^4+\frac{1}{3}yz\; ; \quad \frac{2x+1}{3y-2}-\frac{x}{2y-3}+\frac{5}{4}\; ; \quad z^5-4z^{-3}+2$$

Veamos ahora algunos criterios que permiten clasificar a los polinomios.

- ✔ Según el ***número de términos***: los polinomios con un solo término se llaman ***monomios***; con dos, ***binomios***; con tres, ***trinomios***. De ahí en adelante se dice ***polinomios de cuatro términos***, ***de cinco***, etcétera.

- ✔ Según el *número de variables* que intervienen: polinomios en una variable, en dos variables, en tres, etcétera.

EJERCICIO 2

Dados los polinomios:

1. $60y^2-15y+20$
2. $3n^3-n$
3. $\frac{2}{3}x^6-\frac{1}{3}x^4+\frac{5}{4}x^2-\frac{6}{5}x+\frac{1}{8}$
4. bh
5. $x^2-3y+7z$
6. $2b+2h$
7. $\frac{4}{5}x^3-x^2y+\frac{7}{3}xy^2+\frac{3}{5}y^3$
8. $49t^2$

A. Clasifique cada uno de los polinomios anteriores:

- ***i)*** Según el número de términos
- ***ii)*** Según el número de variables

B. ¿Cuál es el coeficiente del tercer término del polinomio ***7.***?
¿Cuál es el coeficiente de x^4 del polinomio ***3.***?
¿Cuál es el coeficiente del primer término del polinomio ***1.***?
¿Cuál es el coeficiente de n en el polinomio ***2.***?
¿Cuál es el coeficiente del primer término del polinomio ***5.***?
¿Cuál es el coeficiente de b^3 del polinomio ***4.***?
¿Cuál es el coeficiente de t^2 del polinomio ***8.***?

2.3. Suma y resta de polinomios

$-(3a+2b)=-3a-2b$

$-(x-4y)=-x+4y$

Si en algún contexto hay que sumar cantidades compuestas, como por ejemplo 3 horas 20 minutos con 2 horas 15 minutos, procedemos sumando las cantidades correspondientes a las mismas unidades; en el ejemplo, sumamos horas con horas y minutos con minutos, obteniendo 5 horas 35 minutos.

En forma análoga procedemos si se trata de sumar o restar polinomios: suprimimos los paréntesis y simplificamos los términos semejantes, como se hizo en la sección anterior.

Así, para sumar: $(3x+20)+(2x+15)$, suprimimos los paréntesis, simplificamos $3x$ con $2x$ para obtener $5x$, y 20 con 15 para obtener 35, esto es:

$$(3x+20)+(2x+15)=3x+2x+20+15=5x+35$$

Para restar, por ejemplo: $(5y-19)-(3y-11)$, suprimimos los paréntesis cambiando los signos del polinomio que está precedido de signo menos y simplificamos los términos semejantes:

$$(5y-19)-(3y-11)=5y-19-3y+11=2y-8$$

EJEMPLOS

1. $(7a - 5b) + (6a + 2b) = 7a - 5b + 6a + 2b = 7a + 6a - 5b + 2b = 13a - 3b$
2. $(9y + 8z) - (6y - 10z) = 9y + 8z - 6y + 10z = 9y - 6y + 8z + 10z = 3y + 18z$
3. $(5x^3 - 9y^2 + 7) - (8x^3 + 4y^2 - 6) = 5x^3 - 9y^2 + 7 - 8x^3 - 4y^2 + 6 = -3x^3 - 13y^2 + 13$

EJERCICIO 3

A. Efectúe las operaciones indicadas:

1. $(5a + 3) + (5a + 2)$
2. $(2y + z) - (3z - 5y)$
3. $4(2x^2 + x) - 3(5x^2 - x)$
4. $5(3yz^2 - z) - 8(z + 4yz^2)$
5. $2(0.2y^2 - 0.3y) + 0.5(y + 0.4y^2)$
6. $4\left(-\frac{5}{2}b + 3c\right) + \frac{5}{4}\left(\frac{8}{15}b - 4c\right)$
7. $\frac{3}{2}\left(4m^2n^2 - \frac{4}{3}mn\right) - \frac{5}{4}\left(8mn + \frac{12}{5}m^2n^2\right)$
8. $(8x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 5) + (3x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 9x)$
9. $\left(-\frac{5}{6}a^3b + \frac{3}{8}a^2b^2 - \frac{10}{3}\right) + \left(\frac{1}{4}a^2b^2 - \frac{8}{3}a^3b + \frac{3}{7} - \frac{5}{6}a\right)$
10. $(2x - 10x^3 + 3 + x^2) + (-2x + 10x^3 - 5 - 12x)$
11. $(-5y^2 - 3z^2 + 2y - 13z) - (9z^2 - 6y^2 + 8y + 3z)$
12. $\left(\frac{3}{4}z^3 + \frac{5}{3}z^2 - \frac{7}{2}z + \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{6}z^2 - \frac{3}{6}z^2 + \frac{4}{5} + \frac{5}{2}z\right)$
13. $(0.5a^3 + 0.7a^2 - 0.2z + 1.3) - (0.4a^3 - 0.8a^2 + 0.14z - 1.5)$

B. El resultado de sumar dos polinomios es $8y^2 - 5y + 9$. Uno de los polinomios es $3y^2 + 4$, ¿cuál es el otro?

C. La suma de $3x^2 + 7x - 5$ con otro polinomio es $9x^2 - 5x + 6$, ¿cuál es el otro?

D. Al restar $7x^2 - 5x - 3$ con otro polinomio el resultado es $4x^2 + 2x - 8$. ¿Cuál es el otro polinomio?

E. Dé un ejemplo de dos trinomios cuya resta sea $3x^2 - 5$.

El polinomio $3x^2 - x - 4$ es de grado 2 o de segundo grado

Para polinomios en una variable, el ***grado*** del polinomio es el mayor exponente que tenga la variable; cualquier constante diferente de cero se define como un polinomio de grado cero.

¿Cuál es el grado de un polinomio que es igual a la constante cero?

Una forma muy usada de escribir un polinomio en una variable consiste en escribir primero el término donde se encuentra el exponente más grande de la variable, luego el segundo más grande y así sucesivamente; terminado este proceso se dice que el polinomio está escrito en ***orden descendente***.

EJERCICIO 4

A. Halle el grado de cada polinomio:

1. $3x - x^3 + 1$

2. $5y^2 + 3y^3 - 2 + y$

3. $x^2 - 6 + x^4 - 2x + 4x^3$

4. $2 - z^4 + z^6 - 3z^3 + z - z^5$

5. $\frac{5}{4}n^2 - \frac{3}{8}n + \frac{1}{2}$

6. $\frac{7}{2} - \frac{3}{4}y^2 + y^8 - \frac{1}{3}y^4 + \frac{2}{5}y$

B. Ordene en forma descendente los polinomios anteriores.

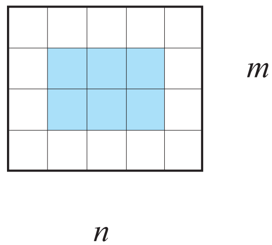
C. Dé un ejemplo de dos polinomios de grado tres cuya suma sea un polinomio de grado dos.

D. Dé un ejemplo de dos polinomios, cada uno con tres términos, cuya resta sea un polinomio de grado uno.

E. Si ***x*** representa el menor de tres enteros consecutivos, exprese como un polinomio en ***x*** la suma de dichos enteros.

2.4. Multiplicación de polinomios

Regresando a la parte dos de la situación inicial, cuando el piso tiene n baldosas de largo por m baldosas de ancho:



La cantidad de baldosas blancas la podemos representar con la expresión:

$$2n + 2m - 4 \text{ (¿por qué?)}$$

Como el precio de cada baldosa blanca es \$3, entonces éstas cuestan:

$$3(2n + 2m - 4) = 6n + 6m - 12$$

Ahora, la cantidad de baldosas azules es: $(n - 2)(m - 2)$, y ya que cada una de éstas vale \$2, el precio de las azules es:

$$2(n - 2)(m - 2)$$

Por tanto, el precio de todas las baldosas es:

$$6n + 6m - 12 + 2(n-2)(m-2)$$

Es posible escribir una expresión más breve, equivalente a la anterior, una vez que desarrollemos el producto $2(n-2)(m-2)$. Antes de hacer esto, revisemos cómo se multiplican polinomios.

Consideremos en primer lugar la ***multiplicación de monomios***. Para multiplicar 2 monomios, como por ejemplo $3x^2$ y $7x^3$, multiplicamos los coeficientes 3 y 7 y a continuación escribimos el resultado de multiplicar x^2 con x^3 (ver leyes de los exponentes):

$$(3x^2)(7x^3) = (3 \cdot 7)(x^2 \cdot x^3) = 21x^5$$

$x^3 . x^4 = x^7$

$(x^2)^3 = x^6$

EJEMPLOS

1. $(-2xy^2)(3xy) = -6x^2y^3$
2. $\left(\frac{2}{3}mn^4\right)\left(-\frac{3}{5}mn^5p\right) = -\frac{2}{5}m^2n^9p$

Ahora, consideremos ***monomios por polinomios***, como por ejemplo: $3x(4x-2)$. Utilizando la propiedad distributiva, multiplicamos el monomio por cada uno de los términos del polinomio:

$$3x(4x-2) = (3x)(4x) + 3x(-2) = 12x^2 - 6x$$

EJEMPLOS

1. $(-2m + 3n)(4m^2) = (-2m)\,(4m^2) + 3n\,(4m^2) = -8m^3 + 12nm^2$

Por último, la ***multiplicación entre polinomios***; ejemplo: $(3x-5)(4x-2)$.

En este caso, aplicamos dos veces la propiedad distributiva:

$$\begin{aligned}(3x-5)(4x-2) &= (3x)(4x-2)+(-5)(4x-2)\\ &= (3x)(4x)+(3x)(-2)+(-5)(4x)+(-5)(-2)\\ &= 12x^2-6x-20x+10\end{aligned}$$

Simplificando términos semejantes, se llega a: $12x^2-26x+10$.

Para hallar el producto de dos polinomios multiplicamos cada término del primer polinomio por cada uno de los términos del segundo polinomio y luego simplificamos términos semejantes.

EJEMPLOS

1. $(-2m+3n)(4m^2+n) = (-2m)(4m^2)+(3n)(4m^2)+(-2m)(n)+(3n)(n) =$

$-8m^3+12m^2n-2mn+3n^2$

Volviendo a la situación del comienzo de esta sección, la expresión para el precio de las baldosas la podemos simplificar así:

Precio total:

$$\begin{aligned}&6n+6m-12+2(n-2)(m-2)=\\ &6n+6m-12+2(nm-2m-2n+4)=\\ &6n+6m-12+2mn-4m-4n+8=2m+2mn+2n-4\end{aligned}$$

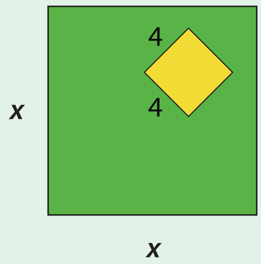
Utilice la expresión anterior para determinar el precio de las baldosas cuando el piso tiene 20 baldosas de largo por 16 de ancho (es decir, cuando $m=20$ y $n=16$).

EJERCICIO 5

A. Halle el producto de los siguientes polinomios:

1. $(2a^3b^4)(6a^2b^3)$
2. $(-3x^5y^3)(7x^3y)(xy^2)$
3. $(5m^4n^6)(11m^3n)$
4. $(x-6)(x+2)$
5. $(y^2+3)(y+9)$
6. $(z^3-4)(z+1)$
7. $(y-5)(y-3)$
8. $(m+2)(m+4)$
9. $(z-4)(z+7)$
10. $(x^2-4)(x^2+12)$
11. $(2a+5b)(2a-7b)$
12. $(3x-8)(3x-5)$
13. $4y^3(2y^2-7y+1)$
14. $2ab(3a^2+6b^2-5a^2b^3)$
15. $(z^2+3z-9)(z+3)$
16. $(9y^2+6y+4)(3y-2)$
17. $(5xy^2+2x^2y)(3xy+7)$
18. $(-2c^3-4c^2+c+1)(-5c)$
19. $(x^3+2x^2-x+4)(x^2-5x+3)$
20. $(y+2)(y^2+2y+4)$
21. $(z^2-z+2)(z^2+z-1)$
22. $(x+3)(x^2-3x+9)$
23. $(0.5m-0.2n-0.4)(0.1m+0.3n)$
24. $(0.3x^2+1.2x-0.6)(x+0.2)$

B. Una arenera se ubica en un prado, como se muestra en la figura.
Exprese el área, en términos de x, de la región que está solo con prado



2.4.1. Productos especiales

Así como en la multiplicación de números reales sucede que un factor puede aparecer repetido varias veces, también esto es común al trabajar con expresiones algebraicas; por ejemplo:

$$(x+4)(x+4)\ ,\ (y-2)(y-2)(y-2)$$

son productos especiales que representamos en forma de potencias, respectivamente, como:

$$(x+4)^2\ ,\ (y-2)^3$$

Observemos el proceso cuando un binomio $a+b$ se eleva al cuadrado y al cubo:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\ &= a^2+ab+ab+b^2\\ &= a^2+2ab+b^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)(a+b)\\ &= (a^2+2ab+b^2)(a+b)\\ &= a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+ab^2+b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

$(a+b)^2=$
$a^2+2ab+b^2$

Abreviando:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

Exprese en forma verbal el proceso en que se desarrolla $(a+b)^2$E

EJEMPLOS

1. $(x+4)^2=x^2+2(x)(4)+4^2=x^2+8x+16$
2. $(z^4+3z^2)^2=(z^4)^2+2(z^4)(3z^2)+(3z^2)^2=z^8+6z^6+9z^4$
3. $(y+2)^3=y^3+3y^2(2)+3(y)(2)^2+2^3=y^3+6y^2+12y+8$

EJERCICIO 6

Utilizando los esquemas anteriores, desarrollemos las siguientes potencias:

1. $(x+6)^2 =$

2. $(2x+5y)^2 =$

3. $(x^3+3x^2)^2 =$

4. $(2y+3)^3 =$

5. $(4y+3z)^3 =$

6. $(2z^2+z)^3 =$

Siguiendo el proceso descrito para el cuadrado y el cubo del binomio $a+b$, complete:

$$(a-b)^2 =$$

$$(a-b)^3 =$$

EJEMPLOS

1. $(x-5)^2 = x^2 - 2(x)(5) + 5^2 = x^2 - 10x + 25$

2. $(2y-3z)^2 = (2y)^2 - 2(2y)(3z) + (3z)^2 = 4y^2 - 12yz + 9z^2$

3. $(y-2)^3 = y^3 - 3(y)^2(2) + 3(y)(2)^2 - 2^3 = y^3 - 6y^2 + 12y - 8$

EJERCICIO 7

Desarrolle:

1. $(x-4)^2 =$

2. $(3x-2)^2 =$

3. $(y-2)^3 =$

4. $(2x-1)^3 =$

5. $(2y-3x)^3 =$

6. $(4m-5n)^2 =$

Otro producto bastante común es el que surge cuando se multiplica la diferencia de dos términos por la suma del mismo par de términos, por ejemplo $(x-3)(x+3)$; veamos:

$$(a-b)(a+b)=a^2+ab-ab-b^2=a^2-b^2$$

Observamos que el resultado es una diferencia de cuadrados.

Tenemos entonces otro producto especial:

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

EJEMPLOS

Utilicemos el esquema anterior para efectuar las siguientes multiplicaciones:

1. $(x-3)(x+3)=x^2-3^2=x^2-9$
2. $(3x+2y)(3x-2y)=(3x)^2-(2y)^2=9x^2-4y^2$

EJERCICIO 8

Desarrolle los siguientes productos especiales:

1. $(x-1)^2$
2. $(y+3)^2$
3. $(z+3)^3$
4. $(2y+1)^3$
5. $(a+4b)^2$
6. $(2x+y)^3$
7. $(x+3)(x+3)$
8. $(2y+1)(2y-1)$
9. $(z-6)(z-6)$
10. $(3x^2-2y^2)^2$
11. $(7a-2b)(7a+2b)$
12. $(a^2+2)^3$
13. $(x+2y)(x+2y)$
14. $(m^2+2n^2)(m^2+2n^2)$
15. $(3m-4n)^2$
16. $\left(\frac{1}{3}a-b\right)\left(\frac{1}{3}a+b\right)$
17. $\left(x^2+\frac{1}{4}\right)\left(x^2-\frac{1}{4}\right)$
18. $\left(z+\frac{1}{2}\right)^3$
19. $(x+0,2)(x-0,2)$
20. $(0,1y-z^3)(0,1y+z^3)$
21. $(0,5m-0,3n)^2$

$(a+b)(a-b)=$
a^2-b^2

2.5. División de polinomios

De la multiplicación $5 \times 4 = 20$, se pueden extraer las siguientes divisiones:

$$20 \div 4 = 5 \text{ y } 20 \div 5 = 4$$

Así, en la división $20 \div 4$ se busca un número que multiplicado por 4 dé como resultado 20, dicho número es 5.

Procediendo de manera similar con la multiplicación de monomios, puesto que:

$$(6x)(3x^2) = 18x^3$$

entonces,

$$(18x^3) \div (6x) = 3x^2$$

es un ejemplo de ***división entre monomios***.

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

Escriba una división a partir de cada multiplicación:

$$(8y^4)\,(5y^3) = 40y^7$$
$$(3ab^2)\,(7a^3b) = 21a^4b^3$$

Volvamos a la división de los monomios $18x^3 \div 6x$; el resultado, o ***cociente***, es una expresión que multiplicada por el ***divisor***: $6x$, da como resultado el ***dividendo***: $18x^3$.

Para obtener este cociente procedemos dividiendo o simplificando los coeficientes 18 y 6, y luego, con las propiedades de los exponentes hallamos el cociente entre x^3 y x.

$$18x^3 \div 6x = \frac{18x^3}{6x} = \frac{18}{6}\,\frac{x^3}{x} = 3x^2$$

EJEMPLOS

1. $$\frac{21a^6b^4}{3a^2b^3}=\frac{21}{3}\cdot\frac{a^6}{a^2}\cdot\frac{b^4}{b^3}=7a^{6-2}b^{4-3}=7a^4b$$

2. $$\frac{24x^3y^6}{30xy^3}=\frac{24}{30}\cdot x^{3-1}y^{6-3}=\frac{4}{5}x^2y^3$$

3. $$-\frac{36m^5n^7}{54m^8n^2}=-\frac{36}{54}m^{5-8}n^{7-2}=-\frac{2}{3}m^{-3}n^5=-\frac{2n^5}{3m^3}$$

De manera similar, podemos acercarnos a la división de un ***polinomio por un monomio*** o de ***dos polinomios***.

El producto de $(4x^3-7x^4)(4x^2)=16x^5-28x^6$, de manera similar al producto de monomios, se puede expresar como las divisiones:

$(16x^5-28x^6)\div(4x^2)$: división de un polinomio por un monomio o
$(16x^5-28x^6)\div(4x^3-7x^4)$: división de dos polinomios

Veamos la ***división de un polinomio por un monomio***. En la división de $16x^5-28x^6$ por $4x^2$, procedemos dividiendo cada término del polinomio (numerador o ***dividendo***) por el monomio (denominador o ***divisor***):

$$\frac{16x^5-28x^6}{4x^2}=\frac{16x^5}{4x^2}-\frac{28x^6}{4x^2}=4x^3-7x^4$$

EJEMPLOS

1. $$\frac{-9y^7+27y^4-3y^2}{3y^2}=\frac{-9y^7}{3y^2}+\frac{27y^4}{3y^2}-\frac{3y^2}{3y^2}=-3y^5+9y^2-1$$

2. $$\frac{25z^4-35z^3+15z}{5z^2}=\frac{25z^4}{5z^2}-\frac{-35z^3}{5z^2}+\frac{15z}{5z^2}=5z^2-7z+\frac{3}{z}$$

Finalmente, la ***división entre polinomios***, la ilustramos dividiendo $x^2 - 5x + 6$ entre $x - 2$. Procedemos utilizando el siguiente algoritmo:

- ✔ Verificamos que los exponentes de la variable estén ordenados en forma descendente, tanto en el dividendo como en el divisor.

- ✔ Dividimos el primer término del dividendo entre el primer término del divisor. El resultado obtenido lo multiplicamos por el divisor (al multiplicar se cambian los signos y se colocan debajo del término semejante del dividendo):

$$\begin{array}{rr|l l} \text{Dividendo} \longrightarrow & x^2 - 5x + 6 & \underline{\;x - 2\;} & \longleftarrow \text{Divisor} \\ & -x^2 + 2x\phantom{{}+6} & \;x & \end{array}$$

- ✔ Simplificamos términos semejantes y bajamos el siguiente término. Repetimos el proceso hasta bajar el último término.

$$\begin{array}{rr|l l} & x^2 - 5x + 6 & \underline{\;x - 2\;} & \\ & \underline{-x^2 + 2x}\phantom{{}+6} & \;x - 3 & \longleftarrow \text{Cociente} \\ & -3x + 6 & & \\ & \underline{3x - 6} & & \\ \text{Residuo} \longrightarrow & 0 & & \end{array}$$

¿Encuentra algún parecido con la división entre números reales?

Retomemos la división $(16x^5 - 28x^6) \div (4x^3 - 7x^4)$ y utilicemos el algoritmo descrito en el ejemplo anterior:

$$\begin{array}{r|l} 16x^5 - 28x^6 & \underline{\;4x^3 - 7x^4\;} \\ \underline{-16x^5 + 28x^6} & \;4x^2 \\ 0 & \end{array}$$

El resultado, $4x^2$, corresponde a lo esperado a partir del producto de la página 96: $(4x^3 - 7x^4)\,(4x^2) = 16\,x^5 - 28\,x^6$

EJEMPLOS

A. Dividir $x^2 + 8x + 15$ entre $x + 3$:

$$
\begin{array}{rrl}
\textit{Dividendo} \longrightarrow & x^2 + 8x + 15 & \underline{\big|\, x + 3} \quad \longleftarrow \textit{Divisor} \\
& \underline{-x^2 - 3x \quad\quad} & \quad x + 5 \quad \longleftarrow \textit{Cociente} \\
& 5x + 15 & \\
& \underline{-5x - 15} & \\
& 0 & \quad\quad\quad\quad \longleftarrow \textit{Residuo}
\end{array}
$$

Realicemos la prueba para la división anterior:

Para verificar la división utilizamos el producto: multiplicamos el *cociente* por el *divisor* y sumamos el *residuo*, el resultado debe ser el *dividendo*.

$$(x + 5)(x + 3) + 0 = x^2 + 3x + 5x + 15 = x^2 + 8x + 15$$

B. Dividir $x^2 - 36$ entre $x + 6$

$$
\begin{array}{rl}
x^2 \quad\quad - 36 & \underline{\big|\, x + 6} \\
\underline{-x^2 - 6x \quad\quad} & \quad x - 6 \quad \longleftarrow \textit{Cociente} \\
-6x - 36 & \\
\underline{6x + 36} & \\
0 &
\end{array}
$$

C. Dividir $x^2 + 8x - 10$ entre $x + 3$

$$
\begin{array}{rl}
x^2 + 8x - 10 & \underline{\big|\, x + 3} \\
\underline{-x^2 - 3x \quad\quad} & \quad x + 5 \\
5x - 10 & \\
\underline{-5x - 15} & \\
-25 & \longleftarrow \textit{Residuo}
\end{array}
$$

EJEMPLOS

D. Dividir $y^2 + 24$ entre $y - 7$

$$
\begin{array}{rrr|l}
y^2 & & +24 & y-7 \\
\cline{4-4}
-y^2 & +7y & & y+7 \\
\cline{1-2}
 & 7y & +24 & \\
 & -7y & +49 & \\
\cline{2-3}
 & & 73 &
\end{array}
$$

EJERCICIO 9

A. Realice las siguientes divisiones:

1. $20a^3 \div 5a^2$
2. $36x^3y^4 \div 6x^2y^2$
3. $55m^4n^6 \div 11m^3n$
4. $(y^2 - 8y + 16) \div (y - 4)$
5. $(x^2 + 10x + 25) \div (x - 5)$
6. $(z^2 + 7z - 8) \div (z - 1)$
7. $(y^2 - 5y + 6) \div (y - 3)$
8. $(x^2 - 6x - 10) \div (x + 2)$
9. $(y^2 - 9) \div (y - 3)$
10. $(6x^3 - 16x^2 + 5x + 2) \div (3x - 2)$
11. $(x^2 - 49) \div (x - 7)$
12. $(10z^3 + 25z^2 + 10z - 8) \div (2z - 1)$
13. $(x^3 - 125) \div (x + 5)$
14. $(w^5 - 32) \div (w + 2)$
15. $(y^4 - 81) \div (y - 3)$
16. $\dfrac{42z^5 - 35z^4 + 14z^2}{7z^2}$
17. $\dfrac{36y^6 - 24y^4 + 48y^3}{6y^2}$
18. $\dfrac{28x^3 + 5x^2 - 8x + 3}{4x + 3}$
19. $\dfrac{8y^3 - 54y + 14}{2y - 5}$

B. Encuentre el valor de c para que se cumpla que la división de los polinomios:

$(x^2 - 9x + c) \div (x - 2)$ sea exacta (residuo igual a 0).

2.6. EJERCICIOS FINALES DE LA UNIDAD 2

A. Escriba una expresión algebraica que cumpla cada grupo de condiciones:

1. Con un término, dos variables y de grado dos.
2. Con tres términos, una variable y coeficientes enteros.
3. Con dos términos, una variable y de grado uno.
4. Con tres términos, las variables *x, y, z* y coeficientes racionales no enteros.

B. Encuentre el valor númerico de cada polinomio:

1. $3m - 2n + 4mn$ **si** $m = -2, \quad n = 5$
2. $6x^3 - y^2 + 2xy$ **si** $x = \frac{2}{3}, \quad y = -\frac{5}{6}$
3. $\frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{2}b^2 + \frac{3}{8}ab$ **si** $a = -4, \quad b = 3$
4. $\frac{5}{6}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}x$ **si** $x = 6$
5. $3m^3 - 2n^4 - 6m - 7n^2 + 5$ **si** $m = -1, \quad n = \sqrt{2}$

C. Ordene los polinomios en forma descendente:

1. $8x^4 - 5x^2 + \frac{3}{7}x + \frac{3}{4} - x^5 + 2x^3$
2. $5y^3 - 3y^7 + \frac{3}{5}y^2 + \frac{11}{3}y^5 - \frac{3}{5} + \sqrt{2}\,y$
3. $a^4b^2 - 8a^5b + \frac{5}{6}a^3b^3 + \frac{3}{4}a^2b^4 - a^6 + 3b^6 - ab^5$
   (ordene con respecto a *b*)
4. $-y^8z^5 + 9y^5z + \frac{2}{3}y^6z^4 - \frac{11}{7}y^2z^9 + y^{10} - yz^3$
   (ordene con respecto a *y*)

D. Escriba tres términos semejantes a cada término dado:

1. $5mn$

2. $\frac{7}{3}a^2b$

3. $-x^3y^2$

4. $6m^2n^2p$

5. $-\frac{1}{2}ab$

E. Simplifique cada polinomio:

1. $2a + 3b - c + 5a - 7c + 11b - 9c$

2. $\frac{3}{2}m - 2n + \frac{5}{4}n^2 - 3m + \frac{4}{3}n^2 + \frac{2}{5}n$

3. $\frac{3}{4}x - 7y + \frac{5}{6}xy - 12y + \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}xy$

4. $-3a^2 + 2b^2 - ab + \frac{3}{2}ab - \frac{4}{3}b^2 + 13a^2$

5. $\frac{7}{3}x^2 - \frac{6}{5}y^3 + \frac{4}{9}x^2 + \frac{7}{6}xy + \frac{3}{2}y^3$

F. Realice las operaciones indicadas:

1. $(-3m + 5n) + (8n - 14m - 3) - (12 + 9n - 7m)$

2. $(4xy^2 - 13x^2y - 6x) - (12x + 15xy^2 + 8x^2y) + (4x - 11x^2y)$

3. $\left(\frac{3}{4}ab - \frac{5}{2}bc + \frac{3}{5}ac\right) + (ab - bc + ac)$

4. $\left(\frac{7}{2}mn - \frac{3}{5}n^2 + \frac{1}{3}m^2\right) - \left(\frac{12}{5}n^2 + \frac{9}{2}mn - \frac{5}{3}m^2\right)$

5. $\left(7x^5 + \frac{3}{7}x^3 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{1}{4}\right) - \left(10x^5 + \frac{8}{7}x^3 - \frac{4}{5}x^2 + \frac{7}{4}x - \frac{7}{4}\right)$

6. Reste $3x - 2y + 5z$ de $11y - 9x + 2z$

7. De $11a - 9b + 3c - 5d$ reste $15c - 4b + 12a - 9d$

8. De la suma de $2m^2 - 5n^2 + 8mn$ con $-13n^2 - 10m^2 + 11\,mn$, reste $8m^2 - 6n^2 + 7\,mn$

G. Halle el producto de:

1. $(3m^3n^5)(8m^2n)$

2. $(-9a^4b^2)(6a^2b)(ab^4)$

3. $(3x^6y^7)(9x^5y)$

4. $(m+3)(m-9)$

5. $(a^2-1)(a+1)$

6. $(y^4-2)(y-8)$

7. $(3n-4)(2n-1)$

8. $(x+11)(x-9)$

9. $(y^2+6)(y^2+2)$

10. $5z^2(2z^3+2z-3)$

11. $(m^3-2m^2-m+5)(m-1)$

12. $(9a^2b-5ab^2)(2a^2b+6ab^2)$

13. $(0.4a^2-0.3a+1)(0.2a+5)$

14. $\left(\frac{3}{2}x^3-\frac{5}{4}x^2+\frac{7}{6}x\right)(12x^2+4x-2)$

15. $\left(\frac{3}{2}y-\frac{2}{5}\right)\left(\frac{9}{4}y^2+\frac{3}{5}y+\frac{4}{25}\right)$

H. Desarrolle los productos especiales:

1. $(m-8)^2$

2. $(a+9)^2$

3. $(x-4)^3$

4. $(3m+2n)^3$

5. $(x-7y^2)^2$

6. $(5x^3-2y^4)^3$

7. $(m-8)(m+8)$

8. $(3x^4+2y)(3x^4-2y)$

9. $(a^3-7)(a^3+7)$

10. $(6a^3-4b^3)^2$

11. $(m^3+8n^4)(m^3-8n^4)$

12. $(x^4+3)^3$

13. $\left(\frac{5}{2}m-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{5}{2}m+\frac{3}{4}\right)$

14. $\left(\frac{3}{7}a^2-\frac{5}{8}\right)\left(\frac{3}{7}a^2+\frac{5}{8}\right)$

15. $\left(m^2+\frac{2}{3}n^2\right)^3$

16. $(0.8a+0.5b)^2$

17. $(0.1y-z^3)(0.1y-z^3)$

18. $(y^2-0.4)(y^2+0.4)$

I. Halle el cociente de cada una de las divisiones:

1. $35m^6 \div 5m^5$
2. $77a^5b^6 \div 11a^3b^3$
3. $125x^7y^4 \div 25x^4y$
4. $(2 + x^2 - 4x) \div (x - 2)$
5. $(m^2 - 18m + 81) \div (m - 9)$
6. $(x^2 + 28 - 11x) \div (x - 4)$
7. $(-36 + a^2 - 9a) \div (a - 3)$
8. $(13n + n^2 + 42) \div (n + 2)$
9. $(b^2 - 25) \div (b - 5)$
10. $(8a^3 - 16a^2 - 4a + 2) \div (2a - 3)$
11. $(y^2 - 64) \div (y + 8)$
12. $(m^4 + 625) \div (m - 5)$
13. $(a^5 + 243) \div (a + 3)$
14. $\dfrac{63m^6 - 27m^4 - 8m^2}{9m^2}$
15. $\dfrac{105a^8 - 75a^5 + 45a^4}{15a^3}$

J. Calcule los valores para ***k*** y ***s*** de modo que la división entre los polinomios sea exacta:

1. $(x^4 - 2x^3 - 2x^2 + kx - s) \div (x^2 - 2x + 1)$
2. $(2m^4 + m^3 + km - s) \div (2m - 3)$

K. Compruebe que:

1. $\dfrac{1}{2}[(x + y)^2 - (x^2 + y^2)] = xy$
2. $\left(x^2 + y^2\right)^2 - \left(x^2 - y^2\right)^2 = 4x^4y^4$
3. $\dfrac{1}{3xy}[(x + y)^3 - (x^3 + y^3)] = x + y$

UNIDAD

3

Factorización

EL ÁLGEBRA COMO HERRAMIENTA DE LA CIENCIA

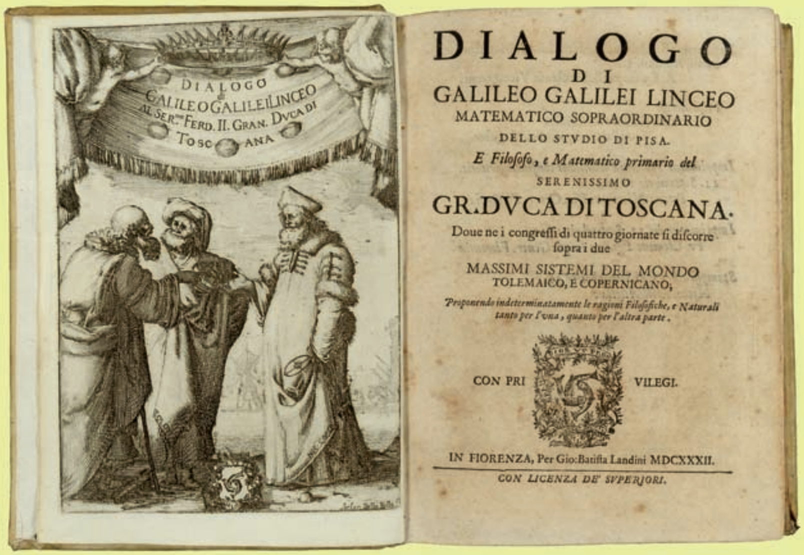
Durante el Renacimiento se realizaron grandes progresos para obtener soluciones exactas a ecuaciones algebraicas gracias a los trabajos de Tartaglia y Ferrari, pero estas ecuaciones no eran muy utilizadas para resolver problemas prácticos. Sin embargo, en el Renacimiento surgió otra tendencia: la aplicación del álgebra a la solución de problemas de las ciencias.

No hay mejor ejemplo de la confianza de un científico en el álgebra como lenguaje para expresar ideas, que el trabajo del científico, matemático e inventor italiano Galileo Galilei (1564-1642). El enfoque algebraico de Galileo rompió con el pasado. Por más de 1000 años la geometría de la regla y el compás había sido el lenguaje para expresar muchas de las ideas en las investigaciones científicas, como lo hicieron los matemáticos y científicos griegos. Esto comenzó a cambiar durante el Renacimiento.

Uno de los libros más conocidos de Galileo, *Diálogos sobre dos nuevas ciencias,* está lleno de álgebra. No es un libro acerca del álgebra; es un libro sobre ciencia, en el cual Galileo analiza los grandes temas científicos de su época: movimiento, resistencia de materiales, palancas y otros tópicos que están en el corazón de la mecánica clásica. Para expresar sus ideas usó una versión retórica del álgebra.

GALILEO GALILEI (1564 - 1642)
Astrónomo, filósofo, matemático y físico que estuvo relacionado estrechamente con la revolución científica.
Eminente hombre del Renacimiento, mostró interés por casi todas las ciencias y artes (música, literatura, pintura). Sus logros incluyen mejoras en el telescopio, gran variedad de observaciones astronómicas, la primera ley del movimiento y un apoyo determinante para el copernicanismo. Ha sido considerado como el «padre de la astronomía moderna», el «padre de la física moderna» y el «padre de la ciencia».

(Retrato de Galileo realizado por Justus Sustermans, 1797 - 1681)



DIÁLOGO,
DE GALILEO GALILEI
Edición de 1632.
Talleres de Giovanni Batista Landini en Florencia, Italia.

En la siguiente cita, tomada de los *Diálogos*, Galileo describe sus descubrimientos sobre la capacidad de los objetos de resistirse a la fractura:

"Los prismas y cilindros que difieren en longitud y grosor ofrecen resistencia a la fractura …que son directamente proporcionales a los cubos de los diámetros de sus bases e inversamente proporcionales a sus longitudes."

Ahí, Galileo describe características físicas de objetos de la realidad con el lenguaje del álgebra. Desafortunadamente carece de una conveniente notación algebraica para expresar estas ideas.

En su uso del álgebra Galileo no estaba solo. Durante el Renacimiento los científicos descubrieron que el álgebra era a menudo la forma más conveniente que tenían para expresar sus ideas. La síntesis que se produjo entre el álgebra y la ciencia, aceleró el interés por el álgebra. Probablemente aceleró también, el progreso de las ciencias ya que produjo nuevas relaciones abstractas entre diferentes propiedades, más transparentes y fáciles de manipular. El Álgebra como *lenguaje simbólico* estaba ganando prominencia en las matemáticas. A medida que la notación mejoraba y se comprendía más profundamente la manera como podía ser usada el álgebra, la notación algebraica se convirtió en la forma estándar en que los matemáticos expresaron sus ideas en muchas ramas de las matemáticas.

Actualmente el álgebra ha permeado tanto el lenguaje de las matemáticas y las ciencias físicas, que es muy difícil pensar en expresar los contenidos de estas importantes disciplinas sin la notación algebraica en la cual se escriben.

(Tomado de *The history of mathematics, Algebra, John Tabak, 2004, Ed. Facts on file, New York*)

Introducción

En la unidad anterior presentamos las expresiones algebraicas y una clase particular de ellas: los polinomios. Vimos, igualmente, las operaciones entre éstos, y utilizamos la propiedad distributiva para hallar productos entre los mismos; ahora mostraremos el proceso inverso: dado uno, buscaremos expresarlo como multiplicación de dos o más polinomios (llamados factores); una expresión así se llama ***factorización del polinomio***.

Empezaremos por apreciar la utilidad de la factorización al permitirnos explicar por qué se dan ciertos resultados particulares después de efectuar algunos procesos aritméticos; más adelante veremos cómo nos ayuda a simplificar expresiones algebraicas y a resolver ecuaciones de grado mayor que las encontradas en la primera unidad.

Situación inicial

Primera parte

Pepe: Escribe, sin dejarme ver, un número de dos cifras, diferentes entre sí.
Paco: Listo.
Pepe: Intercambia las cifras de las unidades y las decenas para formar un nuevo número.
Paco: Sencillo.
Pepe: Resta ahora los dos números.
Paco: ¿En qué orden?
Pepe: El mayor menos el menor.
Paco: Un momento, restando me demoro. ¿Puedo usar calculadora?
Pepe: ¡Claro! igual no importa.
Paco: Ya está. ¿Me vas a adivinar el resultado o qué?
Pepe: No todo el número. Pero si me dices una de las cifras del resultado, entonces te adivino la otra.

(Paco le dice una de las cifras y Pepe, de manera acertada, le indica la que mantiene oculta).

Paco: Repitamos a ver si adivinas de nuevo.

Pepe: ¡Vale!

(De nuevo Pepe acierta. Paco queda sorprendido al ver que Pepe le dice la cifra correcta cuantas veces insiste en repetir el juego).

¿En qué se basa Pepe para "adivinar" la cifra que oculta Paco?

Segunda parte

Paco ha decidido "sacarse el clavo" y propone a su amigo Pepe algo más sorprendente.

Paco: Escribe en secreto un número de tres cifras, las tres diferentes entre sí y distintas de cero; toma también la calculadora.

Pepe:: Ya.

Paco: Para no enredarnos, llama *m* al número escogido.

Pepe: Listo el bautizo.

Paco: Suma las cifras del número *m* y al resultado llámalo *r*.

Pepe: Segundo bautizo realizado.

Paco: Escribe todos los números de dos cifras que se pueden formar con las cifras del número *m*.

Pepe: Un momento. . . ya están. Salieron cinco números.

Paco: Salen seis, revisa.

Pepe: Cierto, faltaba uno.

Paco: Suma esos seis números y llama *s* a la suma obtenida.

Pepe: ¡Vaya si está esto largo!

Paco: Ya casi terminamos. Ahora divide *s* entre *r*.

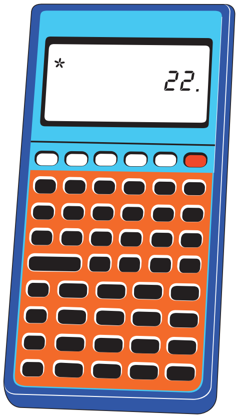
Pepe: Menos mal tengo la calculadora a mano. . . ¡Ya!

Paco: Te puedo adivinar el resultado sin que me des alguna cifra.

Pepe: No creo.

Paco: El resultado es. . .

(Pepe queda boquiabierto, pues Paco le ha dicho correctamente el resultado).



3.1. ¿Qué es factorizar?

Una aproximación con el álgebra a la primera parte de la situación inicial permite entender lo que ocurre con cualquier resultado que se obtiene cuando se siguen las instrucciones allí dadas. Representemos con las letras x y y las cifras de las decenas y de las unidades de un número cualquiera de dos cifras, respectivamente (¿qué valores pueden tomar las variables x y y?); el número corresponde a la expresión $10x + y$ (¿por qué?). Cuando se intercambian las cifras, el número al cual se llega es $10y + x$. Supongamos que x es mayor que y. Entonces, al restar el número mayor con el menor se obtiene:

$$(10x + y) - (10y + x) = 10x + y - 10y - x = 9x - 9y$$

Utilizando la ***propiedad distributiva***, podemos escribir esto último como $9(x - y)$. Hemos llegado a una multiplicación en donde uno de los factores es el número 9 y el otro factor es un entero positivo. Concluimos que el resultado es un múltiplo de 9 y que por tanto, como todos los múltiplos de 9, la suma de las cifras es también un múltiplo de 9. La cifra que falta la podemos obtener entonces restando 9 con la cifra dada.

El proceso anterior muestra cómo se pasó de unas sumas y restas a una multiplicación. Ese es el interés de esta unidad: expresar un polinomio en forma de multiplicación (***factorización*** del polinomio).

3.2. Factor común

Comenzamos con el tipo de factorizaciones que resultan de usar la propiedad distributiva. En $ab + ac$ encontramos que a es un factor que aparece en cada una de los sumandos; un factor así se llama ***factor común***.

$$ab + ac = a\,(b + c)$$

EJEMPLOS

Factorizar las expresiones algebraicas:

A. $3x + 3y$; ***B.*** $4x + 6y$; ***C.*** $4x^2 + 6x$

Solución:

A. Se puede apreciar de manera inmediata que el número 3 es factor común. Por tanto:

$$3x + 3y = 3(x + y)$$

B. Aquí no se aprecia de manera inmediata un factor común; sin embargo, si escribimos el 4 y el 6 en la forma: $2 \cdot 2x + 2 \cdot 3y$ observamos que 2 es factor o divisor común de 4 y 6. Así, tenemos:

$$4x + 6y = 2(2x + 3y)$$

C. Varias son las formas de extraer un factor común de este polinomio:

$$\begin{aligned} 4x^2 + 6x &= 2(2x^2 + 3x) \\ 4x^2 + 6x &= x(4x + 6) \\ 4x^2 + 6x &= 2x(2x + 3) \end{aligned}$$

El ejemplo anterior muestra un polinomio con coeficientes enteros que admite varias factorizaciones. En adelante, por ser útil en las aplicaciones, privilegiaremos la factorización en donde el factor común es aquel que tiene por coeficiente el ***mayor factor común*** (o máximo común divisor) de los coeficientes de los términos del polinomio y cuya parte literal está formado por las variables comunes a los términos, escritas con el menor exponente con que se encuentren. Así, en el ejemplo anterior, factorizaremos preferiblemente en la forma:

$$4x^2 + 6x = 2x(2x + 3)$$

EJEMPLOS

Factorizar:

A. $8x^3y^2 - 12x^2y$; ***B.*** $-6a^3b + 4a^2b^2 - 6a$

Solución:

A. El máximo común divisor de 8 y 12 es 4. Las variables comunes a los términos son x, y; el menor exponente de cada variable es 2 y 1, respectivamente. El factor común es, por tanto, $4x^2y$. Luego colocamos en el paréntesis lo que corresponda para que al multiplicar se obtenga el polinomio dado:

$$8x^3y^2 - 12x^2y = 4x^2y(2xy - 3)$$

B. Podemos tomar como factor común $2a$ ó $-2a$. Si escogemos $-2a$ no olvidemos la ley de los signos para que al multiplicar se obtengan los del polinomio dado:

$$-6a^3b + 4a^2b^2 - 6a = -2a(3a^2b - 2ab^2 + 3)$$

EJERCICIO 1

Factorice:

1. $12x + 30$

2. $16x - 30$

3. $5x^2 + 10x$

4. $7y^2 - 5y$

5. $9z^4 - 18z^3 + 27z^2$

6. $ax - ay$

7. $15m^2n - 20mn^2$

8. $6a^3b^2 - 12a^4b^3$

9. $a^3b^2c + ab^2c^2$

En las factorizaciones hechas hasta ahora el factor común ha sido un monomio. En ocasiones la factorización obliga a tomar como ***factor común***, polinomios con más de un término, como se ilustra a continuación:

EJEMPLOS

Factorizar:

A. $3x(x-2)-4(x-2)$; ***B.*** $(2x+1)(a+b)-(x-5)(a+b)$; ***C.*** $a(b+1)-b-1$

Solución:

A. Tomamos como factor común el binomio $(x-2)$; luego:

$$3x(x-2)-4(x-2)=(x-2)(3x-4)$$

B. Factorizando $(a+b)$ y simplificando, obtenemos:

$$\begin{aligned}(2x+1)(a+b)-(x-5)(a+b) &= (a+b)\,((2x+1)-(x-5))\\ &= (a+b)\,(2x+1-x+5)\\ &= (a+b)\,(x+6)\end{aligned}$$

C. A primera vista no se aprecia factor común, pero introduciendo en paréntesis los dos últimos términos precedidos del signo menos lo conseguimos:

$$a(b+1)-b-1=a(b+1)-(b+1)=(b+1)(a-1)$$

EJERCICIO 2

Factorice:

1. $x(x+1)+3(x+1)$

2. $4(y-1)-y(y-1)$

3. $x(z+1)+z+1$

4. $m(n-3)-n+3$

5. $x^2+1+x(x^2+1)$

6. $z(x-y+1)-2(x-y+1)$

7. $(x-2)(y+1)-(3x-4)(y+1)$

8. $(2z-1)(y+4)+(2z-1)(-5y-8)$

En algunos polinomios no se encuentra factor común (diferente de la unidad); sin embargo, se puede llegar a él haciendo ***agrupación de términos***, como por ejemplo en $ac + bc + ad + bd$. Observamos que no hay factor común en todos los términos pero sí que c es factor común en los dos primeros términos y d es factor común en los dos últimos. Agrupando los dos primeros términos y los dos últimos, y factorizando c y d respectivamente, conseguimos el factor común $(a+b)$ y procedemos como en el caso anterior:

$$\begin{aligned} ac + bc + ad + bd &= (ac + bc) + (ad + bd) \\ &= c(a + b) + d(a + b) \\ &= (a + b)(c + d) \end{aligned}$$

$$1 - x = -(x - 1)$$
$$-b - a = -(a + b)$$

EJEMPLOS

Factorizar:

A. $x^3 - 2x^2 + 4x - 8$; ***B.*** $x^3 - 2x^2 - 6x + 12$

Solución:

A.
$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 + 4x - 8 &= (x^3 - 2x^2) + (4x - 8) \\ &= x^2(x - 2) + 4(x - 2) \\ &= (x - 2)(x^2 + 4) \end{aligned}$$

B.
$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 - 6x + 12 &= (x^3 - 2x^2) - (6x - 12) \\ &= x^2(x - 2) - 6(x - 2) \\ &= (x - 2)(x^2 - 6) \end{aligned}$$

EJERCICIO 3

Factorice:

1. $x^3 - 2x^2 + 6x - 12$
2. $y^3 - 3y^2 + 4y - 12$
3. $z^3 + 6z^2 - 2z - 12$
4. $3a^3 - 2a^2 - 6a + 4$
5. $a^2 + ax + ay + xy$
6. $x^3 + x^2 - x - 1$
7. $2xy - 2xz + 2x - y + z - 1$
8. $x^3 + x^2 + 1 - x^3y - x^2y - y$

3.3. Diferencia o suma de potencias con exponentes iguales

3.3.1. Binomios de la forma $x^n - y^n$

Consideremos ahora la factorización de binomios como $x^5 - y^5$, $x^4 - y^4$, $x^3 - y^3$, $x^2 - y^2$. Aun cuando en estos binomios no hay factor común, tienen, sin embargo, una estructura parecida: son ***diferencias de potencias con exponentes iguales***. ¿Cómo factorizar esta clase de binomios? Algo que comparten estos binomios es que todos se pueden factorizar de tal manera que $x - y$ es uno de los factores: $x^5 - y^5 = (x-y)(\ldots)$; $x^4 - y^4 = (x-y)(\ldots)$; etcétera.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & & & & -y^4 & x - y \\
\cline{6-6}
-x^4 & +x^3y & & & & x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 \\
\cline{1-2}
 & x^3y & & & & \\
 & -x^3y & +x^2y^2 & & & \\
\cline{2-3}
 & & x^2y^2 & & & \\
 & & -x^2y^2 & +xy^3 & & \\
\cline{3-4}
 & & & xy^3 & -y^4 & \\
 & & & -xy^3 & +y^4 & \\
\cline{4-5}
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

¿Cómo encontrar los factores indicados con $(\ldots)$? Una respuesta es: ¡dividiendo!

Los resultados de las divisiones son:

$$
\begin{aligned}
(x^5 - y^5) \div (x - y) &= x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 \\
(x^4 - y^4) \div (x - y) &= x^3 + x^2y + xy^2 + y^3
\end{aligned}
$$

Por tanto, se tiene:

$$(x^5 - y^5) = (x - y)\,(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$$

$$(x^4 - y^4) = (x - y)\,(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)$$

Compruebe las factorizaciones que se acaban de realizar.

En las factorizaciones anteriores ¿qué regularidades encuentra en la disposición de las variables y sus respectivos exponentes?

Siguiendo un patrón similar al encontrado en los ejemplos anteriores, factorice los siguientes binomios:

$$\begin{aligned} x^6 - y^6 &= \\ x^3 - y^3 &= \\ x^2 - y^2 &= \end{aligned}$$

Los binomios considerados anteriormente poseen la forma $x^n - y^n$; si n es 2 se tiene una ***diferencia de cuadrados***: $x^2 - y^2$; si n es 3 una ***diferencia de cubos***: $x^3 - y^3$

$x^3 - 1 =$
$(x - 1)(x^2 + x + 1)$

Verbalice la factorización de una diferencia de cuadrados empleando el término raíces.

EJEMPLOS

Factorizar:

A. $x^2 - 100$	**C.** $a^2 - \dfrac{1}{16}$	**E.** $x^3 - 1$	**G.** $m^6 - \dfrac{1}{64}n^3$
B. $9y^2 - 25z^2$	**D.** $(y+7)^2 - (y-4)^2$	**F.** $27a^3 - 8b^3$	**H.** $16\,a^4 - b^4$

Solución:

A. Expresando 100 como el cuadrado de 10, tenemos una diferencia de cuadrados; lo factorizamos como la diferencia por la suma de las raíces de los términos:

$$x^2 - 100 = x^2 - 10^2 = (x - 10)(x + 10)$$

B. $9y^2 - 25z^2 = (3y)^2 - (5z)^2 = (3y - 5z)(3y + 5z)$

C. $a^2 - \dfrac{1}{16} = a^2 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 = \left(a - \dfrac{1}{4}\right)\left(a + \dfrac{1}{4}\right)$

D. $(y+7)^2 - (y-4)^2 = [(y+7) - (y-4)][(y+7) + (y-4)]$

Suprimiendo los paréntesis y luego simplificando:

$(y+7)^2 - (y-4)^2 = (y + 7 - y + 4)(y + 7 + y - 4) = 11(2y+3)$

E. $x^3 - 1 = x^3 - 1^3 = (x-1)(x^2 + x + 1)$

F. $27a^3 - 8b^3 = (3a)^3 - (2b)^3 = (3a - 2b)(9a^2 + 6ab + 4b^2)$

G. $m^6 - \dfrac{1}{64}n^3 = \left(m^2\right)^3 - \left(\dfrac{1}{4}n\right)^3$

$$= \left(m^2 - \frac{1}{4}n\right)\left(m^4 + \frac{1}{4}m^2n + \frac{1}{16}n^2\right)$$

H. $16a^4 - b^4 = (2a - b)(2^3a^3 + 2^2a^2b + 2ab^2 + b^3)$

$16a^4 - b^4 = (2a - b)(8a^3 + 4a^2b + 2ab^2 + b^3)$

$x^2 - y^2 =$
$(x - y)(x + y)$

Factorice el ejemplo anterior utilizando diferencia de cuadrados (compare con el resultado obtenido utilizando diferencia de potencia a la cuatro).

EJERCICIO 4

Factorice:

1. $a^2 - 9$
2. $4m^2 - 1$
3. $x^2 - 100y^2$
4. $16 - 25c^2$
5. $-81 + 16d^2$ (organice)
6. $-y^2 + 121x^2$
7. $y^2 - \frac{1}{25}$
8. $\frac{4}{9}z^2 - \frac{1}{36}$
9. $-\frac{1}{16}n^4 + \frac{49}{4}m^2$
10. $0.04x^2 - 0.81y^2$
11. $0.01a^2 - 0.64b^2$
12. $-0.16b^2 + 0.36a^2$
13. $(a+4)^2 - (a-1)^2$
14. $(x-7)^2 - (x-2)^2$
15. $-c^6 + 64b^3$
16. $\frac{1}{125}a^3 - b^3$
17. $0.027x^3 - 0.008y^3$
18. $m^3 - 127n^3$
19. $a^6 - 64b^6$
20. $x^5 - 243y^5$
21. $y^4 - z^4$

3.3.2. Binomios de la forma $x^n + y^n$

Pasemos ahora a factorizar binomios como $x^5 + y^5$, una suma de potencias con exponentes iguales.

Compruebe la siguiente multiplicación:

$$(x+y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4) = x^5 + y^5$$

La factorización de $x^5 + y^5$:

$$x^5 + y^5 = (x+y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$$

no presenta cambios en cuanto a la disposición de los exponentes sino en los signos con respecto a la factorización de $x^5 - y^5$.

- Describa la disposición de los signos en la factorización de $x^5 + y^5$
- Factorice: $x^3 + y^3 =$
- Compruebe la factorización anterior

Esta manera de factorizar sumas de potencias iguales se cumple cuando n es impar, como en los casos anteriores para $n = 5$ y $n = 3$; ***si n es par, no se cumple esa forma de factorizar***, como puede verificarse para $n = 4$ y $n = 2$.

- Compruebe que $(x + y)(x^3 - x^2y + xy^2 - y^3)$ es diferente de $(x^4 + y^4)$ y que $(x + y)(x - y)$ lo es de $(x^2 + y^2)$

$x^2 + y^2$ es un polinomio ¡no factorizable!

$x^2 + y^2$ no es factorizable

EJEMPLOS

Factorizar:

A. $64\,m^3 + n^3$; ***B.*** $x^5 + 32y^5$

Solución:

A. $$64m^3 + n^3 = (4m)^3 + n^3 = (4m + n)((4m)^2 - (4m)(n) + n^2)$$
$$= (4m + n)(16m^2 - 4mn + n^2)$$

B. $$x^5 + 32y^5 = x^5 + (2y)^5$$
$$= (x + 2y)(x^4 - x^3(2y) + x^2(2y)^2 - x(2y)^3 + 2y^4)$$
$$= (x + 2y)(x^4 - 2x^3y + 4x^2y^2 - 8xy^3 + 16y^4)$$

EJERCICIO 5

Factorice:

1.	$8y^3 + z^3$	**4.**	$x^7 + 1$	**7.**	$32c^5 + d^5$
2.	$125x^3 + 64y^3$	**5.**	$m^5 + 243y^5$	**8.**	$m^5 + 1$
3.	$a^3 + 343b^3$	**6.**	$m^7 + n^7$	**9.**	$y^3 + 1$

3.4. Trinomios

3.4.1. Trinomios de la forma $x^2 + bx + c$

Busquemos características comunes en las siguientes multiplicaciones:

$$(x+2)(x+3) = x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 + 5x + 6$$
$$(x+6)(x-4) = x^2 - 4x + 6x - 24 = x^2 + 2x - 24$$
$$(x-3)(x+7) = x^2 + 7x - 3x - 21 = x^2 + 4x - 21$$
$$(x-9)(x-2) = x^2 - 2x - 9x + 18 = x^2 - 11x + 18$$

Podemos notar que son multiplicaciones entre binomios; en cada uno a la variable x se le suma o resta un número entero, es decir, son de la forma $(x + m)(x + n)$, donde m y n son números enteros.

$$(x+m)(x+n) = x^2 + nx + mx + mn = x^2 + (m+n)\,x + mn$$

Los resultados son trinomios que tienen la forma $x^2 - bx + c$, donde b y c son números enteros; entre los números m, n, b y c se cumple:

$$c = m \cdot n \;\text{ y }\; b = m + n$$

3

De modo que si se va a factorizar un trinomio como $x^2 + 5x + 6$ revertimos el proceso preguntándonos por dos números que multiplicados den $+6$ y que sumados den $+5$; esos números son $+2$ y $+3$. Factorizamos, entonces, como producto de binomios:

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$$

De igual forma, para factorizar $x^2 + 2x - 24$ buscamos dos enteros que multiplicados den -24 y que sumados den $+2$. Los números son $+6$ y -4.
Por lo tanto,

$$x^2 + 2x - 24 = (x + 6)(x - 4)$$

EJERCICIO 6

Factorice:

1. $x^2 + 8x + 15$
2. $x^2 - 2x - 15$
3. $y^2 - 4y - 5$
4. $y^2 - 14y + 45$
5. $z^2 - 2 + z$ (ordene primero)
6. $z^2 + 3 + 4z$
7. $-x^2 + 5x + 36$ (factorice -1 primero)
8. $-y^2 + 2y + 35$

$x^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$ siempre y cuando $c = m \cdot n$ y $b = m + n$

3.4.2. Trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$

Consideremos ahora factorizaciones de trinomios, como $2x^2 - 5x - 12$.

Difiere de los anteriores en que el coeficiente de x^2 ya no es 1. Hay varios métodos para factorizar esta clase de trinomios; presentaremos aquí uno de ellos.

El método que vamos a presentar consiste en reescribir apropiadamente el polinomio dado, agrupar términos y, por último, extraer un factor común.

Ilustramos el proceso factorizando el polinomio $2x^2 - 5x - 12$.

- ✔ Ordenado ya el polinomio (en la forma estándar), multiplicamos el coeficiente de x^2 y el término independiente: $2(-12) = -24$.
- ✔ Buscamos ahora dos números que multiplicados den -24 y sumados den -5 (el coeficiente de x). Esos números son -8 y $+3$.
- ✔ Reescribimos el término en x del polinomio dado, usando los números que acabamos de encontrar: $2x^2 - 5x - 12 = 2x^2 - 8x + 3x - 12$.
- ✔ Agrupamos y sacamos factor común en cada grupo:

$$2x^2 - 8x + 3x - 12 = (2x^2 - 8x) + (3x - 12) = 2x(x-4) + 3(x-4)$$

- ✔ Factorizamos el polinomio utilizando factor común:

$$2x(x-4) + 3(x-4) = (x-4)(2x+3)$$

- ✔ Reunimos lo realizado:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 5x - 12 &= 2x^2 - 8x + 3x - 12 \\ &= (2x^2 - 8x) + (3x - 12) \\ &= 2x(x-4) + 3(x-4) \\ &= (x-4)(2x+3) \end{aligned}$$

Compruebe que al efectuar $(x-4)(2x+3)$ se obtiene $2x^2 - 5x - 12$

EJEMPLOS

Factorizar: $3x^2+5xy+2y^2$

Solución:

Buscamos dos números que multiplicados den 3(2) = 6 y sumados den 5. Los números son 3 y 2. Entonces, siguiendo el proceso descrito en el ejemplo anterior, escribimos:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 5xy + 2y^2 &= 3x^2 + 3xy + 2xy + 2y^2 \\ &= 3x(x+y) + 2y(x+y) \\ &= (x+y)(3x+2y) \end{aligned}$$

3

EJERCICIO 7

Factorice:

1. $2x^2 + 5x - 3$
2. $3x^2 - x - 2$
3. $3z^2 - 25z - 28$
4. $6y^2 - 11y + 4$
5. $8z^2 - 7 + 10z$
6. $6y^2 + 12 + 17y$
7. $-4x^2 - 16x - 15$
8. $-8x^2 - 33x - 4$

3.4.3. Trinomio cuadrado perfecto

Reversamos ahora el proceso correspondiente al producto especial en el cual se eleva un binomio al cuadrado y se obtiene un trinomio (***trinomio cuadrado perfecto***).

Factorizamos estos trinomios por medio de alguna de las formas:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$
$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

EJEMPLOS

Factorizar las expresiones dadas: ***A.*** $x^2 + 6xy + 9y^2$ ***B.*** $9x^2 - 12xy + 4y^2$

Solución:

A. Como el trinomio se puede escribir en la forma $x^2 + 2(x)(3y) + (3y)^2$, se trata de un trinomio cuadrado perfecto; por lo tanto, factorizamos en la forma:

$$x^2 + 6xy + 9y^2 = (x + 3y)^2$$

B. Ya que $9x^2 - 12xy + 4y^2 = (3x)^2 - 2(3x)(2y) + (2y)^2$, factorizamos:

$$9x^2 - 12xy + 4y^2 = (3x - 2y)^2$$

EJERCICIO 8

Factorice:

1. $x^2 + 8x + 16$
2. $x^2 - 2xy + y^2$
3. $16y^2 - 56y + 49$
4. $4a^2 - 12ab + 9b^2$
5. $z^2 + 25 + 10z$ (ordene primero)
6. $-z^2 + 14z - 49$ (factorice -1)
7. $-36m^2 - 60mn - 25n^2$
8. $c^4 - 18c^2 + 81$

En la factorización del polinomio $x^3 - 9x$ observamos que el polinomio tiene a x como factor común, luego:

$$x^3 - 9x = x(x^2 - 9)$$

Después de factorizar, uno de los factores, $x^2 - 9$, se puede seguir factorizando, entonces:

$$x^3 - 9x = x(x^2 - 9) = x(x - 3)(x + 3)$$

Los factores que quedaron al final, no se pueden factorizar más. Cuando no se puede continuar factorizando, la factorización se ha hecho *completamente*.

EJEMPLO

Factorizar completamente $5mx^2 - 15mx + 10m$

Solución:

Primero extraemos factor común:

$$5mx^2 - 15mx + 10m = 5m(x^2 - 3x + 2)$$

El primer factor no se puede factorizar más. Con el segundo factor se continúa el proceso, luego la factorización completa es:

$$5mx^2 - 15mx + 10m = 5m(x^2 - 3x + 2) = 5m(x - 2)(x - 1)$$

Para factorizar completamente un polinomio es conveniente tener en cuenta:

- ✔ Ordenar el polinomio.
- ✔ Identificar si hay factor común y extraerlo.
- ✔ Si el número de términos es dos o tres, remitirse a la factorización de binomios o trinomios.

EJERCICIO 9

Factorice completamente los siguientes polinomios:

1. $5abc^2 - 5bc$
2. $28a^5 - 63a^3$
3. $3x^9 + 3x^4y^5$
4. $3x^5 + 81x^2$
5. $2my^3 + 2m + y^3 + 1$
6. $5x^4 - 40xy^3$
7. $4ax^2 - 20ax + 24a$
8. $3ax^2 - 12a + 2x^2 - 8$
9. $5m^3n - 45mn^3$
10. $9(a+4) - c^2(a+4)$
11. $y^2 + 8y + 16 - 25z^2$
12. $30x^5 + 35x^4 - 15x^3$
13. $2x^4 - 3x^3 - 9x^2$
14. $35xy^2 - 21xy - 14x$
15. $3bz^2 - 24bz + 48b$
16. $a^2b^2 - 9a^2 - 4b^2 + 36$
17. $(x^2 - 4x + 3)y^2 - (x^2 - 4x + 3)16$
18. $8\ az^2 - 36az - 20a$

3.5. Expresiones racionales

Volvamos a la segunda parte de la situación inicial. Sea xyz un número cualquiera de tres cifras, donde las variables $x,\ y,\ z$ representan las cifras (diferentes entre sí) de las centenas, decenas y unidades, respectivamente.
Debido al valor posicional de las variables, el número corresponde a la expresión: $m = 100x + 10y + z$.

La suma de todos los números de dos cifras, que resultan de las combinaciones posibles, es:

$$s = (10x + y) + (10y + x) + (10x + z) + (10z + x) + (10y + z) + (10z + y)$$

Sumamos términos semejantes: $s = 22x + 22y + 22z$

La suma de las cifras es $r = x + y + z$

Dividimos s por r :

$$\frac{s}{r} = \frac{22x + 22y + 22z}{x + y + z}$$

En el numerador factorizamos 22, que es factor común:

$$22(x + y + z)$$

Y luego simplificamos:

$$\frac{s}{r} = \frac{22x + 22y + 22z}{x + y + z} = \frac{22(x + y + z)}{x + y + z} = 22$$

Esto indica que para cualquier número de tres cifras, diferentes entre sí, al seguir las indicaciones mencionadas en la situación inicial, ***¡el resultado siempre es 22!***

En esta sección trabajaremos con expresiones como

$$\frac{22x + 22y + 22z}{x + y + z}$$

que se obtienen al dividir dos polinomios.

El cociente de dos expresiones en las cuales tanto el numerador como el denominador son polinomios, se llama expresión racional.

3

Tome dos números enteros distintos y halle la diferencia de sus cuadrados; reste los dos números iniciales, y finalmente halle el cociente entre los dos resultados obtenidos. Repita el proceso anterior con otro par de números diferentes.
Recoja en la siguiente tabla varios de los resultados del grupo.
¿Qué relación hay entre la última columna y las dos primeras?

La expresión $\dfrac{x^2-y^2}{x-y}$ de la última columna es otro ejemplo de una expresión racional.

Veremos más adelante la manera de simplificar expresiones como ésta utilizando factorización.

Primer número: x	Segundo número: y	Diferencia de cuadrados: $M=x^2-y^2$	Resta de números: $N=x-y$	Cociente: $\dfrac{M}{N}$

Ejemplos de expresiones racionales:

$$\frac{-24x^3y^5}{18x^2y^3}\ ;\ \frac{2y+4}{3y+6}\ ;\ \frac{x^2-4}{x-2}\ ;\ \frac{n^2-4n-5}{n^2-25}\ ;\ \frac{x^2+8x+16}{x^2-3x-28}$$

Comencemos simplificando expresiones racionales identificando un factor común en el numerador y el denominador y luego los cancelamos:

EJEMPLOS

Simplificar las expresiones racionales dadas:

A. $\dfrac{-24x^3z^5}{18x^2z^3}$ ***B.*** $\dfrac{2y+4}{3y+6}$ ***C.*** $\dfrac{a^4-a^6}{a^3-a^5}$

Solución:

A. Un factor común del numerador y el denominador es $6x^2z^3$; entonces

$$\frac{-24x^3z^5}{18x^2z^3}=\frac{\cancel{(6x^2z^3)}(-4xz^2)}{\cancel{(6x^2z^3)}(3)}=\frac{-4xz^2}{3}$$

También podemos llegar al anterior resultado aplicando las propiedades de las potencias, como vimos en la sección 2.5:

$$\frac{-24x^3z^5}{18x^2z^3}=\frac{-24}{18}\,\frac{x^3}{x^2}\,\frac{z^5}{z^3}=\frac{-4}{3}x^{3-2}\,z^{5-3}=-\frac{4}{3}xz^2$$

B. Factorizamos y luego simplificamos:

$$\frac{2y+4}{3y+6}=\frac{2\cancel{(y+2)}}{3\cancel{(y+2)}}=\frac{2}{3}$$

C. $\dfrac{a^4-a^6}{a^3-a^5}=\dfrac{a^4\cancel{(1-a^2)}}{a^3\cancel{(1-a^2)}}=a$

Para simplificar una expresión racional, factorizamos numerador y denominador, identificamos factores comunes y luego los cancelamos.

Volvamos a la situación planteada al inicio de esta sección. La diferencia de los cuadrados de los números se escribe como: $x^2 - y^2$; la de los números: $x - y$, y por último, el cociente como: $\dfrac{x^2 - y^2}{x - y}$.

Por consiguiente, hay que simplificar la expresión $\dfrac{x^2 - y^2}{x - y}$.

Factorizando el numerador (diferencia de potencias iguales) y simplificando el factor común $x - y$, se obtiene:

$$\frac{x^2 - y^2}{x - y} = \frac{\cancel{(x - y)}(x + y)}{\cancel{(x - y)}} = x + y$$

Así, el cociente que se obtiene es la ***suma*** de los números tomados.

Compruebe este resultado con los números que aparecen en la tabla inicial.

EJEMPLOS

Simplificar las expresiones racionales dadas:

D. $\dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ ***E.*** $\dfrac{y + 3}{y^2 - 9}$ ***F.*** $\dfrac{x^3 - 64}{x - 4}$ ***G.*** $\dfrac{y + 1}{y^3 - 1}$ ***H.*** $\dfrac{x^2 + 8x + 16}{x^2 - 3x + 28}$

I. $\dfrac{n^2 - 4n - 5}{n^2 - 25}$ ***J.*** $\dfrac{6x^2 - 19x - 7}{4x^2 - 28 + 49}$ ***K.*** $\dfrac{y^2 - 2y - 15}{5 - y}$

Solución:

D. $$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{\cancel{(x - 2)}(x + 2)}{\cancel{(x - 2)}} = x + 2$$

E. $$\frac{y+3}{y^2-9}=\frac{\cancel{(y+3)}}{\cancel{(y+3)}(y-3)}=\frac{1}{y-3}$$

F. Factorizamos el numerador como una diferencia de cubos y luego simplificamos:

$$\frac{x^3-64}{x-4}=\frac{\cancel{(x-4)}(x^2+4x+16)}{\cancel{(x-4)}}=x^2+4x+16$$

G. $$\frac{y+1}{y^3+1}=\frac{\cancel{(y+1)}}{\cancel{(y+1)}(y^2-y+1)}=\frac{1}{y^2-y+1}$$

H. Factorizamos los trinomios y luego simplificamos:

$$\frac{x^2+8x+16}{x^2-3x-28}=\frac{(x+4)^2}{(x-7)(x+4)}=\frac{(x+4)\cancel{(x+4)}}{(x-7)\cancel{(x+4)}}=\frac{x+4}{x-7}$$

I. $$\frac{n^2-4n-5}{n^2-25}=\frac{\cancel{(n-5)}(n+1)}{\cancel{(n-5)}(n+5)}=\frac{n+1}{n+5}$$

J. $$\frac{6x^2-19x-7}{4x^2-28x+49}=\frac{\cancel{(2x-7)}(3x+1)}{(2x-7)^2}=\frac{3x+1}{2x-7}$$

K. Al factorizar el numerador no se obtiene directamente el mismo factor del denominador

$$\frac{y^2-2y-15}{5-y}=\frac{(y-5)(y+3)}{5-y}$$

Si en el denominador factorizamos -1 y organizamos el binomio, podemos simplificar:

$$\frac{y^2-2y-15}{5-y}=\frac{(y-5)(y+3)}{5-y}=\frac{\cancel{(y-5)}(y+3)}{-\cancel{(y-5)}}=-(y+3)$$

EJERCICIO 10

A. Simplifique:

1. $\dfrac{x^3+3x^2}{x+3}$

2. $\dfrac{3a^2+6a^5}{12a^4+9a^6}$

3. $\dfrac{4-b}{b-4}$

4. $\dfrac{2m^5-m^4}{m^2-2m^3}$

5. $\dfrac{y^4-z^4}{y^3-z^3}$

6. $\dfrac{x^5+y^5}{x^3+y^3}$

7. $\dfrac{ac-3ad+2bc-6bd}{2ac+bc-6ad-3bd}$

8. $\dfrac{3a^2m^2-12a^2}{9am^2-27am+18a}$

9. $\dfrac{5x^2y^2-5x^2y+30x^2}{10xy^2-60xy+90x}$

10. $\dfrac{y^2+3y-18}{y^2-36}$

11. $\dfrac{2x^2-5x-3}{2x^2+9x+4}$

12. $\dfrac{n^2+7n-30}{n^2+8n-20}$

13. $\dfrac{y^2+8y+15}{y^2+y-6}$

14. $\dfrac{m^2-81n^2}{m^2-11mn+18n^2}$

15. $\dfrac{a^2+2a+4}{a^3-8}$

16. $\dfrac{b^2-10b+21}{b^2-11b+28}$

17. $\dfrac{2x+3}{6x^2+7x-3}$

18. $\dfrac{4m^2-12m+9}{2m-3}$

B. En medicina, la expresión racional $\dfrac{DA}{A+12}$ se usa para determinar la dosis de medicamentos que se prescribe a los niños. En esta expresión, A representa la edad del niño y D la dosis que se aplica a un adulto. ¿Cuál es la diferencia en la dosis para un niño de 3 años y para otro de 7 años? Dé la respuesta como una expresión racional simplificada en términos de D.

3

3.6. EJERCICIOS FINALES DE LA UNIDAD 3

A. Represente $4x^2 + 12x$ como producto de factores, de tres maneras.

B. Factorice (factor común):

1. $9g - 3h$

2. $12c^3d^4 + 3cd^3 - 3cd^2$

3. $6 - 2w - 3z + wz$

4. $m^2 - 3m^3$

5. $4x(y - 1) + 5z(y - 1)$

6. $3ux + 3vx - 3uy - 3vy$

7. $12a^2b^2 + 2a^3b$

8. $6g(2 - a) - 5h(2 - a)$

9. $sr + 3s + 2rt + 6t$
(ayuda: agrupe términos)

C. Factorice diferencia o suma de potencias con exponentes iguales:

1. $y^5 - 2^5$

2. $x^4 - 1$

3. $a^3 - 64$

4. $y^3 + 64x^3$

5. $8b^3 - 1$

6. $x^2 - 49$

7. $y^6 + 1$

8. $243 + x^5$

D. Factorice los siguientes trinomios:

1. $c^2 + c - 12$

2. $d^2 + 7d - 18$

3. $x^2 - 10 - 3x$
(ayuda: ordene primero)

4. $-30 + a + a^2$

5. $2h^2 - 7h - 15$

6. $12k^2 + 2k - 24$

7. $3s^2 + 7st + 2t^2$

8. $3x^2 + 10xy + 8y^2$

9. $-5a^2 + 36ab - 7b^2$

E. Factorice los siguientes trinomios cuadrados perfectos:

1. $x^2 + 14x + 49$

2. $9x^2 - 24xy + 16y^2$

3. $-30m^2n + 25m^4 + 9n^2$

4. $y^2 - 6y + 9$

5. $4z^2 + 12z + 9$

6. $28a^3b + 49a^6 + 4b^2$

F. Factorice completamente:

1. $2w^2 - 72$
2. $xy - 6y + xz - 6z$
3. $-8y^2 + 26y - 15$
4. $6y^5 - 54y$
5. $x^2(y - 3) - 16(y - 3)$
6. $3z^4 - z^2 - 4$
7. $3s^3 + 81$
8. $5x^2 + 10xy + 5y^2$
9. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{1}{25}$
10. $x^3 + \dfrac{1}{8}$
11. $4b^2c - 7b^2 - 36c + 63$
12. $10x^2 + 19x - 15$
13. $y - y^3$
14. $x^2y - 2xy + y - 3x^2z + 6xz - 3z$

G. Simplifique cada expresión racional:

1. $\dfrac{x^2 + 2x}{x^2 - 4}$
2. $\dfrac{3y - 9}{y^2 - 6y + 9}$
3. $\dfrac{x^2 + 7x - 18}{x^2 - 3x + 2}$
4. $\dfrac{x - 1}{1 - x}$
5. $\dfrac{y^2 - 9y + 20}{y^2 + 2y - 35}$
6. $\dfrac{z^2 - 14z + 49}{z^2 - 49}$
7. $\dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$
8. $\dfrac{y^3 + 3y^2}{y^2 - 9}$
9. $\dfrac{a^2 - 14a + 45}{a^2 - 16a + 63}$

UNIDAD

4

Ecuaciones

BREVE HISTORIA DE LAS ECUACIONES

El álgebra es familiar a la mayoría de las personas en forma de ecuaciones que hay que resolver, bien sea en ejercicios escolares o para modelar problemas en cualquier disciplina.

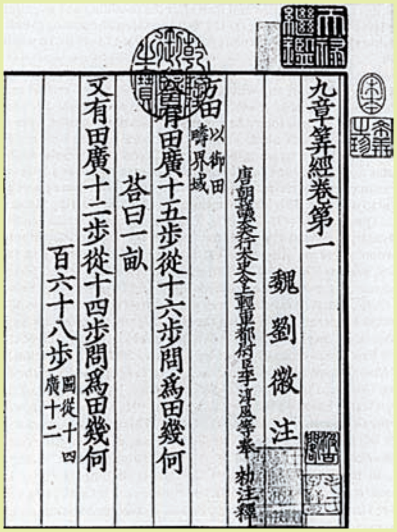
La representación de cantidades desconocidas por medio de símbolos, la cual es fundamental en el álgebra, evolucionó de manera bastante lenta. Aunque los antiguos matemáticos egipcios y sumerios trabajaron problemas que involucraban cantidades desconocidas, no los expresaron en forma de ecuaciones como lo hacemos hoy en día. No fue sino hasta el siglo XVI cuando empezaron a escribirse en la forma que nos es familiar.

TABLETA DE ARCILLA de Babilonia.
(1800 - 1600 A de C.)
Evidencia de las matemáticas en Babilonia. Pieza perteneciente a la Colección de la Universidad de Yale.
(Foto de Bill Casselman del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Columbia Británica).

Tenemos en la actualidad varios métodos para resolver ecuaciones, incluyendo el uso de gráficas. Esto fue posible gracias al resultado de René Descartes quien reunió la Geometría y el Álgebra en el sistema de coordenadas cartesianas el cual permite que una ecuación sea representada de manera gráfica.

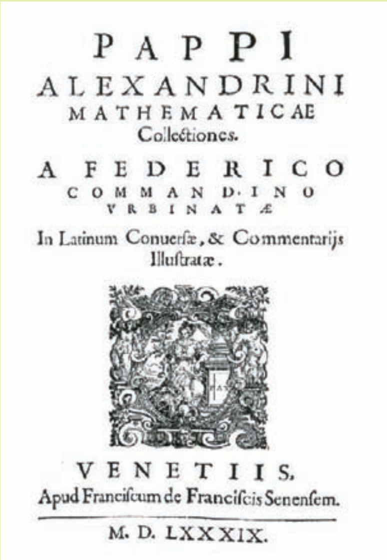
Es imposible desligar el álgebra elemental de la geometría ya que fue en la geometría de dos y tres dimensiones que las primeras ecuaciones algebraicas surgieron asociadas a problemas prácticos muy específicos donde no se disponía de una sistematización que pudiera reconocerse como el álgebra actual; sin embargo, estos problemas proveen los orígenes del álgebra como fue formulada posteriormente.

Las tabletas de arcilla de los babilónicos que se encuentran en el Museo Británico incluyen muchos problemas que ahora se formularían como ecuaciones cuadráticas o cúbicas. Éstas es-



九章筭經卷第一
魏 劉徽 注
唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉 勅注釋
方田 以御田疇界域
今有田廣十五步從十六步問爲田幾何
荅曰一畝
又有田廣十二步從十四步問爲田幾何
百六十八步 圖從十四廣十二

NUEVE CAPÍTULOS DEL ARTE DE LAS MATEMÁTICAS (Siglo I A de C.)
El texto chino *Jiuzhang suanshu* o *Chu Chang Suan Shu* incluye un capítulo sobre solución de ecuaciones.



PAPPI
ALEXANDRINI
MATHEMATICAE
Collectiones.
A FEDERICO
COMMANDINO
VRBINATÆ
In Latinum Conuersæ, & Commentarijs Illustratæ.

VENETIIS.
Apud Franciscum de Franciscis Senensem.
M. D. LXXXIX.

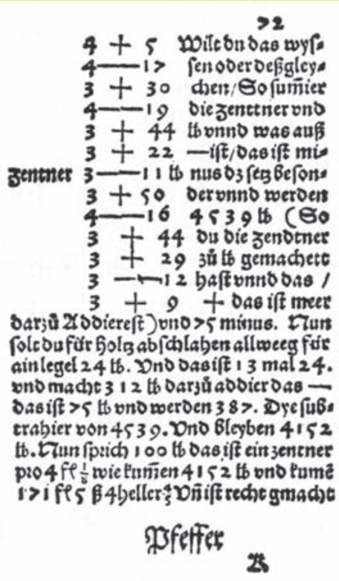
PRIMERA EDICIÓN IMPRESA de la obra del matemático Pappus de Alejandría.
Editada en Venecia en 1589

tán relacionadas con proyectos de construcción e involucran trabajar con áreas y volúmenes.
Los primeros problemas eran expresados en palabras por los babilonios y los egipcios y aún por los matemáticos muchos siglos después, por ejemplo "la longitud de una sala es igual a su ancho más 1 codo; la altura es la misma que su longitud menos 1 codo".

Los babilonios no intentaron trabajar con reglas generales o métodos para tratar con problemas de este tipo. Se ocupaban solamente con lo específico de cada problema y parece que no dominaban un algoritmo general que pudiera ayudarles a resolver todos los problemas del mismo tipo. Los antiguos egipcios también resolvieron problemas prácticos que ahora se expresarían como ecuaciones lineales o cuadráticas pero sin recurrir a una notación formal y sin reconocerlas como ecuaciones.

El texto chino *Los nueve capítulos* (siglo I a.C.) incluye un capítulo sobre la solución de ecuaciones lineales simultáneas de dos a sie-

WILLIAM OUGHTRED (1574 - 1660)
Ministro anglicano nacido en Inglaterra. Dedicó su vida a las Matemáticas, la Astronomía, la Gnomónica y es famoso por haber inventado la Regla de cálculo. Fue el primero que empleó el signo de multiplicación (×).



72

4 + 5 Wiltu das wyssen oder deßgleychen / So summier
4 — 17 die Zentner vnd
3 + 30 lb vnnd was auß
4 — 19 — ist / das ist mi
3 + 44 nus dz setz beson
3 + 22 der vnnd werden
Zentner 3 — 11 lb 4539 lb (So
3 + 50 du die zendtner
4 — 16 zů lb gemachett
3 + 44 hast vnnd das /
3 + 29 + das ist meer
3 — 12
3 + 9

darzů Addierest) vnd 75 minus. Nun solt du für holtz abschlahen allweeg für ain legel 24 lb. Vnd das ist 13 mal 24. vnd macht 312 lb darzů addier das — das ist 75 lb vnd werden 387. Dye subtrahier von 4539. Vnd bleyben 4152 lb. Nun sprich 100 lb das ist ein zentner pro 4 fl $\frac{1}{5}$ wie kummen 4152 lb vnd kumē 171 fl 5 ß 4 heller $\frac{4}{5}$ Vñ ist recht gmacht

Pfeffer

B

PÁGINA DEL LIBRO DE ARITMÉTICA MERCANTIL o *Behende und hüpsche Rechenung auff allen Kauffmanschaff.* **Editado en Leipzig en 1489.** Donde el alemán Johann Widman utilizó por primera vez los signos más **(+)** y menos **(–)**.

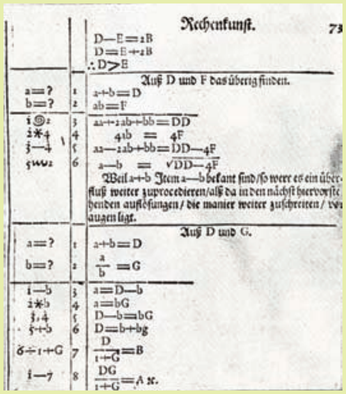
te incógnitas; éstas podían incluir coeficientes negativos (es el primer uso, que se tiene registro, de los números negativos).

El método usado se conoce hoy en Occidente como el método de eliminación de Gauss, en honor a Carl Friedrich Gauss quien lo utilizó 2000 años después.

Pappus de Alejandría, siglo IV, fue el primero que estableció de manera clara, que problemas algebraicos con ecuaciones lineales están relacionados con líneas rectas o en una dimensión; con ecuaciones de segundo grado están relacionados con áreas o en dos dimensiones y problemas con ecuaciones de tercer grado o cúbicas, con volúmenes o en tres dimensiones.

Al-Khwarizmi, matemático árabe, presentó en el siglo IX métodos para resolver ecuaciones lineales y cuadráticas utilizando "completación y balanceo". Solamente consideró números enteros positivos en las ecuaciones y en sus soluciones;

ROBERT RECORDE (c. 1510 - 1558)
Matemático y médico inglés. Profesor en Oxford y en Londres. Utilizó por primera vez el signo igual **(=)**, y desarrolló un método para extraer la raíz de un polinomio algebraico.



Rechenkunst. 73

$D - E = 2B$
$D = E + 2B$
$\therefore D > E$

Auß D und F das übrig finden.

a = ?	1	$a + b = D$
b = ?	2	$ab = F$
1 ⑨ 2	3	$aa + 2ab + bb = DD$
2 * 4	4	$4ab = 4F$
3 — 4	5	$aa - 2ab + bb = DD - 4F$
5 ωω 2	6	$a - b = \sqrt{DD - 4F}$

Weil a + b Item a — b bekant sind / so were es ein überfluß weiter zuprocedieren / alß da in den nächst hervorstehenden auflösungen / die manier weiter zuschreiten / vor augen ligt.

Auß D und G.

a = ?	1	$a + b = D$
b = ?	2	$\frac{a}{b} = G$
1 — b	3	$a = D - b$
2 * b	4	$a = bG$
3 . 4	5	$D - b = bG$
5 + b	6	$D = b + bg$
6 ÷ 1 + G	7	$\frac{D}{1+G} = B$
1 — 7	8	$\frac{DG}{1+G} = A$ etc.

JOHANN HEINRICH RAHN (1622 -1676)
En 1659 inventó para la división el signo ÷, que resulta bastante gráfico una vez que la barra de fracción es norma general. No tuvo mucho éxito en su país, Suiza, pero sí en Gran Bretaña y los Estados Unidos, aunque no tanto en la Europa continental.

escribía todos los problemas y sus soluciones en palabras y no tenía notación simbólica.

En el siglo XVI Gerolamo Cardano explicaba cómo resolver ecuaciones cúbicas y aún de cuarto grado. Para las ecuaciones de grado quinto o mayor, los esfuerzos resultaron infructuosos. En 1824, Niels Henrik Abel demostró que no era posible encontrar fórmulas generales para resolver ecuaciones de grado quinto o mayor.

Los símbolos que se utilizan en las ecuaciones surgieron como se muestra en la tabla.

NOMBRE	**SÍMBOLO**	**FECHA**	**MATEMÁTICO**
Suma	+	1489	Johann Widmann, Alemania
Resta	–		
Raíz cuadrada	$\sqrt{\ }$	1525	Christoff Rudolff, Alemania
Igual	=	1557	Robert Recorde, Inglaterra
Multiplicación	**x**	1618	William Oughtred, Inglaterra
Constantes	***a, b, c*** para cantidades conocidas		
Variables	***x, y, z*** para cantidades desconocidas	1637	René Descartes, Francia
División	÷	1659	Johann Rahn, Suizo

Tomado de *The Story of Mathematics, from creating the pyramids to exploring infinity*. Anne Rooney, Arcturus Publishing Limited, Londres 2008. Traducido.
Historical topics for the Mathematics classroom. National Council of Teachers of Mathematics. 1969, Washington D.C. Traducido.

Introducción

Al enfrentarnos a cualquier situación que involucra la matemática recogemos inicialmente alguna información y desconocemos otra; conocer esa información faltante es un objetivo que muchas veces se logra planteando adecuadamente una o varias ecuaciones.

En esta unidad encontraremos ecuaciones de primer grado con una incógnita, en donde se mezclan lo aditivo y lo multiplicativo (sección 1.4), un tipo particular de ecuaciones llamadas proporciones y ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

Situación inicial

Para el aniversario de una tienda por departamentos, el administrador decide realizar una serie de descuentos.

1. En la sección de eléctricos la tienda ofrece un 16% de descuento en todos los artículos y en algunos ha colocado un bono por $20 000 (que se puede utilizar en el momento de pagar). En esta sección el cliente elige una de las dos opciones cuando el artículo tenga el bono. Al llegar a la caja el cliente, sonriendo, le dice al cajero: «cualquiera de las dos opciones que ofrece la tienda me hace el mismo descuento sobre el artículo que llevo, así es que, escoja usted». Efectivamente, el cajero asiente y realiza el descuento. ¿Cómo se explica esto?

2. En la sección de ropa la tienda ofrece dos modalidades de descuento: la primera, uno del 30% sobre el precio del artículo; la segunda, dos descuentos sucesivos del 15%. En esta sección el cliente elige una de las dos modalidades. De nuevo, el mismo cliente, al acercarse a pagar le dice al cajero: «es tonto que pongan esas dos alternativas, ya que es obvio que va a dar lo mismo, sin importar el precio del artículo». ¿Es cierto lo que afirma?

3. Por último, en la sección de calzado, se ofrecen dos descuentos, uno del 10% y otro del 30%, ambos atinentes al mismo artículo, pero el cliente debe elegir el orden en el que el cajero los aplique. Así que se acerca al cajero y le pide: «quiero que primero me haga el descuento del 30% y luego el del 10%», y añade: «el administrador de esta tienda piensa que nos va a embolatar con esto de los descuentos, pero ¿quién no sabe que si primero lo hacen con el del 30% están descontando más dinero que si se comenzara por el del 10%?». ¿Es esto cierto?

4.1. Ecuaciones de primer grado con una incógnita

En la sección 1.4 se hizo una introducción a las ecuaciones en situaciones como:

Al final del mes las cintas de video que hay en la videotienda son 6543*; si durante el mes se adquirieron* 1232*, ¿cuántas tenía la tienda al comenzar el mes?*

La letra x representa el número de cintas que tenía la tienda al comenzar el mes; con la ***ecuación aditiva*** $x + 1232 = 6543$ representamos la situación anterior.

Para hallar el valor de la incógnita x, procedemos así:

Sumamos en ambos lados de la ecuación el inverso aditivo de 1232, que es -1232:

$$x + 1232 + (-1232) = 6543 + (-1232)$$

Simplificamos y obtenemos:

$$x = 5311$$

Luego, la tienda tenía 5311 cintas de video al iniciar el mes.

El planteamiento de la siguiente situación conduce a una ***ecuación multiplicativa***:

Al precio de un artículo se le descuenta la cuarta parte del precio inicial vendiéndose a $\$ 3600$*; ¿cuál era el precio inicial del artículo?*

Representemos con x el precio inicial del artículo; al descontar la cuarta parte del precio, pagaremos las tres cuartas partes del mismo. Entonces planteamos la ecuación multiplicativa: $\frac{3}{4}x = 3600$.

Para resolverla, multiplicamos ambos lados de la ecuación por el inverso multiplicativo de $\frac{3}{4}$, que es $\frac{4}{3}$:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} x = 3600 \cdot \frac{4}{3}$$

Simplificamos y obtenemos el valor de la incógnita:

$$x = 4800$$

Por tanto, el artículo tenía un precio inicial de $\$ 4800$.

Las ecuaciones $x + 1232 = 6543$, y , $\frac{3}{4}x = 3600$ que hemos planteado son de ***primer grado*** con una incógnita.

Ahora continuemos con el estudio de ecuaciones de primer grado con una incógnita, donde intervienen lo aditivo y lo multiplicativo.

Volvamos a la parte 1) de la situación inicial. Representemos con x el precio del artículo. Como el artículo que lleva el cliente tiene un bono de $\$20\ 000$, el precio a pagar sería $x - 20\ 000$. Si la tienda le hace el 16% de descuento, el cliente debe pagar $100\% - 16\% = 84\%$ del artículo; por lo tanto, el precio a pagar es $0.84x$. Nos interesa saber para qué precio del artículo ambos descuentos son iguales. Eso nos lleva a la ecuación de primer grado con una incógnita: $x - 20\ 000 = 0.84x$.

Reunimos términos semejantes y simplificamos:

$$\begin{aligned} x - 20\,000 &= 0.84x \\ x - 0.84x &= 20\,000 \\ 0.16x &= 20\,000 \end{aligned}$$

Dividimos en ambos lados de la ecuación por 0.16 y obtenemos:

$$x = \frac{20\,000}{0.16}$$

$$x = 125\,000$$

El cliente seleccionó un artículo cuyo precio era de $\$125\,000$.

- Si el precio de un artículo que tiene bono es de $\$185\,000$, ¿cuál descuento es más conveniente?
- Y si es de $\$96\,000$, ¿cuál descuento resulta más favorable?

Otros ejemplos de ecuaciones de primer grado con una incógnita:

A. $3x - 2 = 10$

B. $7y + 14 = 2y + 9$

C. $6(z + 3) - 4 = 5(2 - z)$

D. $\frac{8}{5}x - \frac{3}{10} = \frac{1}{2}$

E. $\frac{2}{x} + \frac{3}{x} = \frac{7}{6}$

F. $\frac{2}{3} - \frac{1}{y} = \frac{5}{y}$

G. $\frac{7x}{x-3} + 2 = \frac{4x+9}{x-3}$

Veamos cómo resolverlas.

EJEMPLOS

A. Hallar la solución de la ecuación $3x - 2 = 10$

Sumamos el inverso aditivo de – 2, en ambos lados de la ecuación:

$$3x - 2 + 2 = 10 + 2$$

Simplificamos: $3x = 12$

Multiplicamos por el inverso multiplicativo de 3, en ambos lados de la ecuación:

$$3 \cdot \frac{1}{3} x = 12 \cdot \frac{1}{3}$$

Simplificamos y tenemos la solución de la ecuación:

$$x = 4$$

B. Resolver la ecuación: $7y + 14 = 2y + 9$

Reunimos términos semejantes y simplificamos:

$$\begin{aligned} 7y + 14 &= 2y + 9 \\ 7y - 2y &= 9 - 14 \\ 5y &= -5 \\ y &= -\frac{5}{5} \\ y &= -1 \end{aligned}$$

✔ Podemos comprobar que $y = -1$ es la solución de la ecuación $7y + 14 = 2y + 9$, ya que al sustituir y por -1 llegamos a una identidad.

$$7(-1) + 14 = 2(-1) + 9$$

Realizamos las operaciones indicadas y obtenemos:

$$7 = 7$$

EJEMPLOS

C. Resolver la ecuación: $6(z + 3) - 4 = 5(2 - z)$

Eliminamos los paréntesis, reunimos términos semejantes y simplificamos:

$$\begin{aligned} 6z + 18 - 4 &= 10 - 5z \\ 6z + 5z &= 10 + 4 - 18 \\ 11z &= -4 \end{aligned}$$

Despejamos la incógnita z (dividiendo por 11 ambos lados de la ecuación) y obtenemos la solución:

$$z = -\frac{4}{11}$$

D. Resolver la ecuación: $\frac{8}{5}x - \frac{3}{10} = \frac{1}{2}$

Sumamos $\frac{3}{10}$ en ambos lados de la ecuación y simplificamos:

$$\frac{8}{5}x - \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{1}{2} + \frac{3}{10}$$

$$\frac{8}{5}x = \frac{4}{5}$$

Multiplicamos por $\frac{5}{8}$ en ambos lados de la ecuación y simplificamos:

$$\frac{8}{5} \cdot \frac{5}{8}x = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{8}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Otra manera como podemos resolver las ecuaciones que involucran fracciones es multiplicando cada término de la ecuación por el ***mínimo común múltiplo*** (m.c.m.) de los denominadores. De esta manera obtenemos una ***ecuación equivalente***.

Una ecuación es equivalente a otra cuando ambas tienen la misma solución. Una ecuación equivalente a otra dada se obtiene sumando o multiplicando por la misma expresión en ambos lados de la ecuación.

En la ecuación anterior $\frac{8}{5}x - \frac{3}{10} = \frac{1}{2}$, el m.c.m. de 5, 10 y 2 es 10.

Multiplicamos cada término por 10 y simplificamos:

$$\begin{aligned}
10\left(\frac{8}{5}x-\frac{3}{10}\right) &= 10\left(\frac{1}{2}\right)\\
10\cdot\frac{8}{5}x-10\cdot\frac{3}{10} &= 10\cdot\frac{1}{2}\\
16x-3 &= 5\\
16x &= 5+3\\
x &= \frac{8}{16}\\
x &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

En las ecuaciones de primer grado en las cuales la incógnita aparece en el denominador, es importante tener presente que el denominador no puede ser cero. Así, al resolver una ecuación comprobamos que al remplazar el valor de la incógnita, el denominador no dé cero. En estas ecuaciones es muy útil hallar el m.c.m. entre los denominadores para eliminarlos y resolver una ecuación equivalente pero más sencilla.

EJEMPLOS

E. Resolver la ecuación $\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x}=\dfrac{7}{6}$:

Tenemos en cuenta que $x\neq 0$.
El m.c.m. entre x y 6 es $6x$. Multiplicamos cada término por $6x$ y simplificamos:

$$6x\cdot\frac{2}{x}+6x\cdot\frac{3}{x}=6x\cdot\frac{7}{6}$$

$$12+18=7x$$

$$30=7x$$

$$x=\frac{30}{7}$$

La solución no es 0, por lo tanto $x=\frac{30}{7}$ es solución de la ecuación.

F. Resolver: $\frac{2}{3}-\frac{1}{y}=\frac{5}{y},\ y\neq 0$

El m.c.m. entre **3** y ***y*** es **3*y***. Multiplicamos todos los términos por $3y$ y obtenemos:

$$3y\cdot\frac{2}{3}-3y\cdot\frac{1}{y}=3y\cdot\frac{5}{y}$$

$$2y-3=15$$

$$2y=15+3$$

$$2y=18$$

$$y=9$$

4

G. Resolver $\dfrac{7x}{x-3}+2=\dfrac{4x+9}{x-3}$

En esta ecuación x no puede ser 3 ya que el denominador se anula; esto es, $x \neq 3$.

Multiplicamos cada término por $x-3$, simplificamos y obtenemos:

$$\frac{7x}{x-3}(x-3)+2(x-3)=\frac{4x+9}{x-3}(x-3)$$

$$7x+2x-6=4x+9$$

$$9x-4x=9+6$$

$$5x=15$$

$$x=3$$

Habíamos precisado que x no puede ser 3; de modo que la ecuación **no** tiene solución.

En los siguientes ejemplos verificamos si un número real es solución o no de una ecuación.

✔ Si queremos verificar si $x=-4$ es solución de la ecuación $4x-2=-30-3x$, ¿cómo procedemos?

Sustituimos x por -4 en la ecuación:

$$4(-4)-2=-30-3(-4)$$

y obtenemos:

$$-18=-18$$

Concluimos que $x=-4$ **sí** es solución de la ecuación $4x-2=-30-3x$

✔ ¿$y = 8$ es solución de la ecuación $3y - 1 = 25$?

Remplazamos y por 8 en la ecuación, así:

$$3 \cdot 8 - 1 = 25$$

y obtenemos una proposición falsa:

$$23 = 25$$

Por lo tanto, $y = 8$ **no** es solución de la ecuación $3y - 1 = 25$.

Volvamos a la parte 2) de la situación inicial:

La tienda ofrece en la sección de ropas dos modalidades de descuento, una del 30% y la otra de dos descuentos sucesivos del 15%. Representemos con x el precio del artículo, entonces $0.70x$ es el precio a pagar si le aplican el 30% de descuento. En la segunda modalidad tenemos: $0.85x$ precio a pagar si le aplican el primer descuento de 15% (paga el 85%). El segundo descuento de 15% se aplica sobre $0.85x$, es decir, la expresión: $0.85\,(0.85x)$ es el precio a pagar utilizando la segunda modalidad.
Para verificar si cualquiera de las dos modalidades es igual, sin importar el precio del artículo, procedemos a igualar las dos expresiones: $0.70x = 0.85\,(0.85x)$. Hemos llegado de nuevo a una ecuación de primer grado con una incógnita; resolvámosla:

$$\begin{aligned} 0.70x &= 0.85(0.85x) \\ 0.70x &= 0.7225x \\ 0.7225x - 0.70x &= 0 \\ 0.0225x &= 0 \end{aligned}$$

Si remplazamos x por cualquier número diferente de cero la anterior igualdad es falsa. (No hay un número real distinto de 0 que multiplicado por 0.0225 dé 0).

La ecuación $0.70x = 0.85\,(0.85x)$ **no** tiene solución.

Interpretamos esto diciendo que el cliente se equivocó; ¡no es cierto que cualquier modalidad de descuento sea igual!

¿Cuál de las dos modalidades es más favorable?

Veamos otro ejemplo:

EJEMPLO

Resolver: $\dfrac{3y-5}{4} = \dfrac{6y-2}{8}$

$$\begin{aligned} 8(3y-5) &= 4(6y-2) \\ 24y-40 &= 24y-8 \\ 24y-24y &= -8+40 \\ 0y &= 32 \end{aligned}$$

Sustituyamos y en esta última ecuación, por cualquier número real; por ejemplo $32, -32, 0, \dfrac{1}{32}$:

$$0\cdot(32)=0 \qquad 0\cdot(-32)=0 \qquad 0\cdot(0)=0 \qquad 0\cdot\frac{1}{32}=0$$

En todos los casos el resultado es 0 y no 32.

Así, la ecuación $\dfrac{3y-5}{4} = \dfrac{6y-2}{8}$ **no tiene solución**.

Ahora retomemos la parte 3) de la situación inicial:

La tienda ofrece en la sección de calzado dos descuentos, uno del 30% y otro del 10%, y el cliente debe elegir cuál le hacen primero. De nuevo representemos con x el precio del artículo, entonces $0.70x$ es el precio si le aplican el 30% de descuento (paga el 70%); si luego le aplican el 10%, paga el 90% del precio anterior, es decir: $0.90(0.70x)$.

Si lo hacemos al contrario, aplicamos primero el 10% y luego el 30%; siguiendo el mismo análisis anterior, tenemos que el precio a pagar es: $0.70(0.90x)$.

Veamos qué sucede si igualamos ambas expresiones, es decir, queremos establecer si hay algún precio en el que dé lo mismo aplicar el descuento en diferente orden. La ecuación de primer grado que se obtiene, también en una variable, es: $0.90(0.70x) = 0.70(0.90x)$; la resolvemos y obtenemos:

$$\begin{aligned} 0.90(0.70x) &= 0.70(0.90x) \\ 0.63x &= 0.63x \end{aligned}$$

Si remplazamos x por cualquier número real la anterior igualdad es verdadera. (Cualquier número real hace verdadera la igualdad).

La ecuación $0.90(0.70x) = 0.70(0.90x)$ tiene infinitas soluciones.

De manera que nuevamente el cliente se equivocó; el orden en que se realicen los descuentos no afecta el precio a pagar.

Veamos otro ejemplo:

EJEMPLOS

Resolver $3(2x - 4) + 5 = 6x - 7$:

$$\begin{aligned} 6x - 12 + 5 &= 6x - 7 \\ 6x - 6x &= -7 + 12 - 5 \\ 0x &= 0 \end{aligned}$$

4

Interpretemos la ecuación anterior. Si la incógnita x se remplaza por cualquier número real, se satisface la igualdad.
Verifiquemos remplazando x por 5, -2, 0, y $\frac{3}{5}$:

$$0 \cdot (5) = 0 \qquad 0 \cdot (2) = 0 \qquad 0 \cdot (0) = 0 \qquad 0 \cdot \frac{3}{5} = 0$$

Por lo tanto, la ecuación $3(2x-4)+5 = 6x-7$ **tiene infinitas soluciones.**

EJERCICIO 1

A. Resuelva las ecuaciones:

1. $5x - 21 = 34$
2. $-8y + 3 = \quad -7y$
3. $11 - 2n = 9 - 7n$
4. $\frac{5y}{3} - \frac{4}{5} = \frac{6}{5}$
5. $\frac{4x}{7} - \frac{5x}{14} = -\frac{1}{3}$
6. $\frac{4}{3}\left(\frac{5m}{4} - \frac{3}{8}\right) = \frac{3}{2}m$
7. $0.5\,(2x - 0.3) = 1.5$
8. $0.7m - 1.75 = 1.68$
9. $0.1n + 1.2 = 0.3 - 1.3n$
10. $\frac{3}{x} - \frac{4}{x} = \frac{5}{8}$
11. $\frac{7y+4}{5} - \frac{2-4y}{3} = \frac{3}{2}$
12. $\frac{6}{x} - \frac{4}{x} = \frac{5}{8}$
13. $\frac{2}{y} + \frac{7}{2y} = \frac{6}{5}$
14. $\frac{6m-5}{12} = \frac{10-2m}{4}$
15. $\frac{8}{3x} - \frac{7}{6x} = -\frac{5}{4}$
16. $5(3y-6) + (7-2y) = -12$
17. $3(2m-6) + 9 = 12 - 5m$
18. $0.6\,(0.2t - 1.2) = 0.4(0.3 + 0.4t)$
19. $7(6-3m) - 5(m+2) = 21$

B. Verifique si los valores dados son solución de las ecuaciones dadas:

1. $y = -3$; de $3(2y+7) - 11 = 4(y+1)$
2. $x = 5$; de $\frac{4x+7}{9} = \frac{4-5x}{7}$

3. $m = -2$ de $\dfrac{3}{m} + \dfrac{5}{m} = -4$

4. $n = -5$ de $\dfrac{3}{2n+10} - \dfrac{11}{2n+10} = -4$

C. Verifique si las ecuaciones dadas son equivalentes:

1. $-6m = 10$ y $-2(3m + 11) = -12$

2. $30x + 8 = -14$ y $\dfrac{3x}{4} + \dfrac{2}{5} = -\dfrac{7}{10}$

3. $6 + 5y = -4y$ y $\dfrac{2}{y} + \dfrac{5}{3} = -\dfrac{4}{3}$

4. $20n - 9 = 66$ y $\dfrac{5n}{6} - \dfrac{3}{8} = \dfrac{11}{4}$

D. Indique qué parejas de ecuaciones son equivalentes:

1. $3(5x - 7) - 20 = 4(6x - 9) + 11x$

2. $\dfrac{x+2}{x+1} = \dfrac{3}{5}$

3. $\dfrac{2x+3}{2x-1} = \dfrac{x+1}{x+2}$

a. $7x + 6 = x - 1$

b. $-20x - 41 = -36$

c. $5x + 10 = 3x - 3$

4.1.1. Problemas de aplicación

Ahora veamos cómo se resuelven algunos problemas en los que el modelo que se emplea para representar la situación es una ecuación de primer grado con una incógnita.

PROBLEMA 1

La suma de tres números enteros consecutivos es 471.
¿Cuáles son los números?

Solución

Representamos con x, $x+1$ y $x+2$ los tres números consecutivos.

Con la información que suministra el problema, planteamos la ecuación:

$$x+(x+1)+(x+2)=471$$

Resolvemos la ecuación:

$$\begin{aligned} x+x+1+x+2 &= 471 \\ 3x+3 &= 471 \\ 3x &= 471-3 \\ x &= \frac{468}{3} \end{aligned}$$

$$x=156$$

Los tres números consecutivos son: 156, 157 y 158

Para resolver problemas es importante tener en cuenta:

- ✔ Leer el problema y asegurarse de comprender la información.
- ✔ Seleccionar los datos conocidos y por medio de una letra representar la pregunta formulada.
- ✔ Con la información dada plantear la ecuación.
- ✔ Resolver la ecuación.
- ✔ Interpretar la solución y dar respuesta al problema.

PROBLEMA 2

Un hombre tiene \$162 000 en billetes de \$5000 y \$2000. Si en total tiene 48 billetes, ¿cuántos billetes tiene de cada denominación?

Solución

Representemos con x la cantidad de billetes de \$5000; si en total hay 48 billetes, $48 - x$ representa la cantidad de billetes de \$2000.

$5000x$: dinero en billetes de \$5000.

$2000(48 - x)$: dinero en billetes de \$2000

Sumamos el dinero en billetes de \$5000 con el dinero en billetes de \$2000 y obtenemos el total de dinero, es decir, \$162 000:

$$5000x + 2000(48 - x) = 162\,000$$

Resolvemos la ecuación:

$$5000x + 96\,000 - 2000x = 162\,000$$

$$3000x = 66\,000$$

$$x = \frac{66\,000}{3000}$$

$$x = 22$$

Remplazamos para hallar el número de billetes de \$2000:

$$48 - x = 48 - 22 = 26$$

Hay 22 billetes de \$5000 y 26 billetes de \$2000

PROBLEMA 3

Juan tarda 10 horas en pintar una bodega y Pedro tarda 15 horas en pintar la misma área. Se necesita que la bodega esté lista en menos de 8 horas. ¿Trabajando juntos pueden tenerla lista en el tiempo requerido?

Solución

Juan tarda 10 horas en hacer el trabajo, luego en 1 hora hace: $\frac{1}{10}$ del trabajo.

Pedro tarda 15 horas en hacer el trabajo, luego en 1 hora hace: $\frac{1}{15}$ del trabajo.

t : tiempo necesario para pintar la bodega, trabajando ambos simultáneamente.

$\frac{1}{t}$: es la parte del trabajo que realizan en una hora.

Trabajando juntos pueden hacer $\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$ del trabajo en una hora. Por lo tanto planteamos la ecuación:

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{1}{t}$$

Para resolverla multiplicamos primero por 30 t, que es el m.c.m. de los denominadores:

$$30t\cdot\frac{1}{10}+30t\cdot\frac{1}{15}=30t\cdot\frac{1}{t}$$

Simplificando obtenemos una ecuación sin fracciones:

$$3t+2t=30$$

$$5t=30$$

$$t=6$$

La bodega la tienen lista en 6 horas trabajando juntos.

EJERCICIO 2

Resuelva los siguientes problemas:

1. La suma de dos números impares consecutivos es 340. ¿Cuáles son los dos números?

2. La suma de tres números enteros consecutivos es 307 menos 5 veces el menor. ¿Cuáles son los números?

3. El número de varones que hay en la orquesta es 8 más que el doble de mujeres. Si 80 varones tocan en la orquesta, ¿cuántas mujeres hay?

4. Encuentre dos números tales que uno sea los tres séptimos del otro y que la suma sea 600.

5. Se cuenta con 42 cajas, en las que se pueden empacar 5 o 7 raquetas en cada una. Se han empacado un total de 250 raquetas; ¿cuántas cajas de cada clase se utilizaron?

6. Un boleto de entrada al circo vale el doble para un adulto que para un niño. Si en total se pagaron $95 500 por la entrada de 17 personas, de las cuales 9 eran adultos, ¿cuál es el costo del boleto para un adulto y cuál para un niño?

7. Cinco personas recolectaron naranjas en canastas. La primera recogió $\frac{1}{3}$ del total, la segunda $\frac{1}{4}$, la tercera $\frac{1}{5}$, la cuarta $\frac{1}{6}$ y la última solamente 9 naranjas. ¿Cuántas recogieron cada una de las cuatro primeras personas?

8. Después de la muerte de Diofanto, un famoso matemático griego, alguien describió su vida con un acertijo:
«Fue un niño un sexto de su vida. Después tuvo barba un duodécimo más. Un séptimo más tarde se casó y en el quinto año de su matrimonio nació su hijo. Su hijo vivió la mitad de la vida que vivió él. Diofanto murió cuatro años después que su hijo». ¿Cuántos años vivió Diofanto?

9. Una persona invierte $2 500 000 en acciones. Una parte del dinero la invierte a una tasa del 6.5% y el resto al 9%. Si el interés proveniente de esta dos inversiones suma $191 050, ¿cuánto dinero invirtió en cada tasa?

10. Un tanque se puede llenar en 16 horas utilizando una llave *A* y en 24 horas utilizando una llave *B*. ¿Cuánto tarda en llenarse el tanque si se utilizan las dos llaves simultáneamente?

11. Dos fotocopiadoras, *A* y *B*, pueden realizar un trabajo en 4 horas si trabajan simultáneamente. Cuando trabaja sola, la fotocopiadora *A* tarda 6 horas en realizar el mismo trabajo. ¿La fotocopiadora *B* es más lenta o más rápida que la *A*?

12. El costo de una carrera en taxi es de \$3100 para los primeros 5000 metros, más \$50 por cada 100 metros o fracción adicional. Si el cobro fue de \$5350, ¿qué distancia recorrió el taxi?

13. Se ofrecen dos planes mensuales pospago para telefonía móvil.
El primero contempla cargo fijo de \$5000 y por cada minuto \$90. El segundo, tarifa única con un costo mensual de \$45 500 por consumo ilimitado.

- ***a.*** ¿Para qué tiempo *t* el valor de la factura es el mismo en los dos planes?
- ***b.*** A una persona que utiliza regularmente el servicio un tiempo no mayor de 400 minutos, ¿qué plan le conviene adquirir?
- ***c.*** Para un consumo de 500 minutos, ¿cuál plan elegiría?

4.2. Proporcionalidad

4.2.1. Proporcionalidad directa

Situación

El bombero de la figura de la página anterior mide 1.80 metros. ¿Cuánto mide la enfermera?

Imaginemos que cierta cantidad de un artículo cuesta un determinado dinero. El doble de esa cantidad costaría el doble de dinero; el triple de artículos, el triple de dinero, etc. (a menos que esté presente alguna promoción).
En la vida diaria encontramos con frecuencia situaciones, como la anterior, en las que dos variables están relacionadas de tal manera que cuando una de ellas se duplica la otra también lo hace; si se triplica, la otra se triplica; si se hace la mitad, la otra hace lo mismo; en otras palabras, ***si una de ellas se multiplica por un número, la otra también se multiplica por ese mismo número***. Cuando dos variables están relacionadas de esa manera decimos que están relacionadas en forma ***directamente proporcional***.
Supongamos que están ingresando tres litros de agua cada minuto con rapidez constante a un tanque de mil litros de capacidad. El volumen de agua que va quedando en el tanque es directamente proporcional al tiempo transcurrido (siempre que no se supere el llenado del tanque). En la tabla siguiente se muestran algunos valores:

Tiempo (min)	0.5	1	2	3	4	10	12.5
Volumen de agua (litros)	1.5	3	6	9	12	30	37.5

Observemos en la tabla que a la multiplicación de una cantidad cualquiera de la primera fila por un número, corresponde la multiplicación en la segunda por el mismo número. Por ejemplo, tomemos inicialmente el tiempo 2 min. Al multiplicar por 5 observamos que en la segunda fila el valor correspondiente también se multiplica por 5:

Tiempo t (min)	0.5	1	2	3	4	10	12.5
Volumen (V) de agua (litros)	1.5	3	6	9	12	30	37.5

Esta relación entre los números correspondientes de las dos filas de la tabla, expresada en términos de multiplicaciones, puede ser expresada igualmente en términos de divisiones; si dividimos los valores de la segunda fila con los correspondientes de la primera:

$$\frac{1.5}{0.5}=3; \quad \frac{3}{1}=3; \quad \frac{6}{2}=3; \quad \frac{12}{4}=3; \quad \frac{30}{10}=3; \quad \frac{37.5}{12.5}=3$$

observamos que el cociente entre los números correspondientes es el mismo.

Cada una de las divisiones anteriores se llama una ***razón***; a la igualdad entre dos razones, como:

$$\frac{6 \text{ litros}}{2 \text{ minutos}}=\frac{12 \text{ litros}}{4 \text{ minutos}}$$, se llama una ***proporción***.

La igualdad entre dos razones es una proporción.

Por medio de una razón comparamos por división dos cantidades o magnitudes. La razón $\frac{6 \text{ litros}}{2 \text{ minutos}}$ nos informa que cada dos minutos ingresan al recipiente 6 litros de agua. También se escribe esta razón en la forma 6 litros : 2 minutos y se lee: "seis litros es a dos minutos".

La proporción : $\frac{6 \text{ litros}}{2 \text{ minutos}}=\frac{12 \text{ litros}}{4 \text{ minutos}}$ se escribe así mismo en la forma:

6 litros : 2 minutos : : 12 litros : 4 minutos
y se lee: "seis litros es a dos minutos como doce litros es a cuatro minutos".

Las consideraciones anteriores conducen a otra manera de caracterizar la proporcionalidad directa:

***Dos variables están relacionadas de manera directamente proporcional si el cociente entre los valores correspondientes es constante. A ese cociente constante se le llama* constante de proporcionalidad.**

En el ejemplo anterior, las variables V y t se pueden relacionar por medio de la ecuación:

$\frac{V}{t}=3$, o por medio de la ecuación $V=3t$; la constante de proporcionalidad es 3.

En cada uno de los siguientes casos examine si hay relación de proporcionalidad directa entre las variables consideradas; de haberla, exprésela mediante una ecuación, indicando cuál es la constante de proporcionalidad.

- El lado de un cuadrado y su perímetro
- El lado de un cuadrado y su área
- Distancia recorrida y tiempo cuando un objeto se mueve con velocidad constante
- Número de horas trabajadas y remuneración recibida
- Estatura de una persona y su peso
- La altura de un árbol y su sombra
- El número de hojas de un libro y su peso
- El número de habitantes de una población y la cantidad de agua que consumen

El siguiente problema involucra proporcionalidad directa:

EJEMPLO

5 gramos de una sustancia cuestan \$18 000. ¿Cuánto cuestan 8 gramos de la misma sustancia?

Una vez reconocemos que las variables ***gramos*** y ***costo*** son directamente proporcionales, podemos utilizar cualesquiera de los siguientes procedimientos para resolverlo:

Procedimiento 1

Averiguamos el precio de un solo gramo dividiendo 18 000 entre 5; de manera que cada gramo vale \$3600. Luego multiplicamos 8 por el precio de cada gramo, \$3600, obteniendo un total de \$28 800.

Comentario: este es el procedimiento más frecuente que empleamos. Conviene advertir que en este proceso los 3600 que hallamos primero es la *constante de proporcionalidad*; con ésta se puede calcular el costo de cualquier cantidad de gramos de sustancia multiplicando por 3600, lo cual es lo mismo que tener la ecuación que relaciona las variables costo (C) y gramos (g):

$$C = 3600g$$

Procedimiento 2

Como las variables son directamente proporcionales, los cocientes entre valores correspondientes son los mismos. Podemos entonces escribir:

$\dfrac{18\,000}{5} = \dfrac{x}{8}$; resolvemos luego la ecuación para obtener:

$$8 \cdot \frac{18\,000}{5} = x \qquad\qquad x = 28\,800$$

Procedimiento 3

Escribimos un esquema de "regla de tres" y procedemos así:

$$\begin{array}{cc} \textbf{Gramos (gr)} & \textbf{Costo (\$)} \\ 5 & 18\,000 \\ 8 & x \end{array}$$

$$5 \cdot x = 8 \cdot 18\,000$$

$$x = \frac{8 \cdot 18\,000}{5} \qquad\qquad x = 28\,800$$

La situación del comienzo de esta sección puede resolverse teniendo en cuenta que el tamaño de las personas que aparecen en el dibujo es directamente proporcional a su estatura. Midiendo con una regla los tamaños de las dos personas en el dibujo y reemplazando los valores en la proporción:

$$\frac{\text{altura real del bombero}}{\text{altura del bombero en el dibujo}} = \frac{\text{altura real de la enfermera}}{\text{altura de la enfermera en el dibujo}}$$

$$\frac{1{,}80}{\text{altura del bombero en el dibujo}} = \frac{x}{\text{altura de la enfermera en el dibujo}}$$

Despejando la x, encontramos la altura de la enfermera.

EJERCICIO 3

A. Resuelva las proporciones:

1. $3 : 8 :: 12 : x$

2. $\dfrac{24}{y} = \dfrac{36}{54}$

3. $\dfrac{63}{144} = \dfrac{z-2}{16}$

4. $x : 15 :: 6 : 5$

B. La razón entre libras de fertilizante y metros cuadrados de un cultivo es de 6 : 9. ¿Cuántas libras se requieren para un terreno rectangular de 10 metros de ancho por 12 metros de largo?

C. Una señora tiene 13 tazas de harina; desea hacer galletas siguiendo una receta que emplea 3 tazas de harina por 1 taza de líquido (que contiene agua, azúcar, sal y mantequilla). Si ella quiere gastar toda la harina, ¿cuánto líquido debe agregarle?

D. En un salón hay 26 personas, de las cuales 12 son varones. Halle:

1. La razón entre la cantidad de varones y mujeres.

2. La razón entre la cantidad de mujeres y el total de personas.

E. Si $12x = 18y$, encuentre las siguientes razones:

1. $x : y$

2. $y : x$

3. $x : (x + y)$

F. Cada mes una compañía fabrica la misma cantidad de artículos. Si espera producir 150 en el año, ¿cuántos habrá tenido que elaborar al finalizar el mes de abril?

G. Un automóvil viaja 360 kilómetros con 9 galones de gasolina; ¿cuántos galones necesita para hacer un viaje de ida y vuelta entre dos ciudades que se encuentran a 500 kilómetros de distancia?

H. La escala de un mapa indica que 0.5 cm representan 25 km. Dos sitios en el mapa se encuentran a 5 cm; ¿cuál es la distancia real entre ellos?

I. La razón entre dos números es de 2 : 3 y su suma es 115. ¿Cuáles son los dos números?

J. Un bote recorre 60 km en dirección de la corriente y se regresa, navegando 40 km en contra de la corriente. El tiempo empleado en el recorrido a favor de la corriente fue el mismo que el empleado al navegar en contra de ella. ¿Cuál es la velocidad del bote en aguas tranquilas, si la velocidad de la corriente es de 20 km/h?

4.2.2. Proporcionalidad inversa

Supongamos que se va a recorrer una distancia de 120 km con velocidad constante; la tabla muestra los tiempos para recorrerla, correspondientes a distintas velocidades:

Velocidad (km/hora)	15	30	60	120
Tiempo (horas)	8	4	2	1

Al duplicar la variable velocidad, la variable tiempo no se duplica; por tanto, no son directamente proporcionales. Observamos que en vez de duplicarse, el tiempo se reduce a la mitad. Lo que se tiene ahora es una situación que involucra dos variables en la cual al multiplicar una de las variables por un número (distinto de cero), la otra variable se divide por ese mismo número. Decimos entonces que las variables son ***inversamente proporcionales.***

Multiplicando valores correspondientes de las variables:

$$15 \times 8 = 120; \quad 30 \times 4 = 120; \quad 60 \times 2 = 120; \quad 120 \times 1 = 120$$

encontramos que el producto es el mismo.

Dos variables están relacionadas de manera ***inversamente proporcional*** *si el producto entre los valores correspondientes es constante.*

EJEMPLO

Un camión tarda un día en llevar su carga desde una finca hasta la central de abastos y regresar. Para transportar toda la cosecha emplearía 18 días. ¿Si se contratan 2 camiones más, en cuántos días se podría acarrear la cosecha?

Solución

Las variables número de camiones (*c*) y número de días (*d*) son inversamente proporcionales. Si se contratan 2 camiones más, se tendrían en total 3 camiones disponibles. Como el producto de valores correspondientes es el mismo, planteamos la ecuación: $1 \cdot 18 = 3 \cdot d$

Resolviendo la ecuación tenemos:

$$d = \frac{18}{3} = 6$$

La cosecha se podría acarrear en 6 días

Examine otros procedimientos para resolver el problema.

EJERCICIO 4

1. Ocho máquinas robot fabrican, de manera independiente, un lote de piezas en diez horas. Si tres robots dejan de funcionar, ¿en cuánto tiempo producirán los restantes el mismo lote?

2. Un maestro de obra contrata a cuatro obreros para construir un muro en seis días. Justo antes de que comiencen a trabajar, el ingeniero le dice que necesita el muro en cuatro días. ¿Cuántos obreros más debe contratar para cumplir con la solicitud del ingeniero?

3. Un automóvil se mueve 30 km/h más rápido que otro, en recorrer cierta distancia. Los tiempos que emplean en recorrerla son 2 y 3 horas, respectivamente. ¿Cuál es la velocidad de cada automóvil?

4. Un ganadero dispone de forraje para alimentar a 30 vacas durante 12 semanas. ¿Para cuántas semanas dispone de forraje si vende 6 vacas?

5. El plato mayor de una bicicleta tiene 48 dientes y el menor 16. ¿Cuántas vueltas tiene que girar el pedal (circunvoluciones que da el plato mayor) para que la rueda trasera (plato menor) dé 12 vueltas?

4.2.3. Repartos directamente proporcionales

Algunos convenios se establecen sobre la base de repartir una cantidad en varias partes de manera proporcional a ciertos números. Supongamos, por ejemplo, que se van repartir unas utilidades de tres millones de pesos entre dos personas, proporcionalmente a las cantidades que invirtieron de seis y nueve millones de pesos, respectivamente.

Llamemos: x a la parte que le corresponde a la persona que invirtió seis millones; y a la parte que le corresponde a la persona que invirtió nueve millones.

Entonces, $\frac{x}{6}=\frac{y}{9}$, con la condición que $x+y=3$ (expresando x y y en millones de pesos).

Despejamos y de la última ecuación: $y=3-x$
Remplazamos esta expresión en la primera y resolvemos:

$$\begin{aligned} \frac{x}{6} &= \frac{3-x}{9} \\ 9x &= 6(3-x) \\ 9x &= 18-6x \\ 9x+6x &= 18 \\ 15x &= 18 \\ x &= \frac{18}{15} = 1.2 \end{aligned}$$

1.2 representa la constante de proporcionalidad.

Las utilidades recibidas por la persona que invirtió 6 millones son de 1.2 millones de pesos.

Remplazando este valor de x en la ecuación $y=3-x$:

$$y = 3-1.2 = 1.8$$

Por lo tanto, las utilidades recibidas por la persona que invirtió 9 millones son de 1.8 millones de pesos.

Comentario: El problema se puede resolver sin necesidad de recurrir a ecuaciones (esto no significa que no se utilice la proporcionalidad en el razonamiento).

Se suman las cantidades, en millones, invertidas: $6 + 9 = 15$.

Como los 15 millones producen una utilidad de 3 millones, cada millón invertido produce una utilidad de $3 \div 15 = 0.2$ millones.

Luego por los 6 millones de pesos se recibe una utilidad de $6 \cdot 0.2 = 1.2$ millones de pesos; por los 9 millones, una utilidad de $9 \cdot 0.2 = 1.8$ millones de pesos.

EJERCICIO 5

1. Dos albañiles cobran \$972 000 por una obra realizada conjuntamente. El primero trabajó 96 días y el segundo 120 días. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?

2. Se dispone de \$5 040 000 para la conservación y limpieza de un bosque. Dos brigadas, una de 12 personas y la otra de 15, se encargaron del trabajo. La primera trabajó 10 días y la segunda 6 días. ¿Cuánto le corresponde a cada brigada?

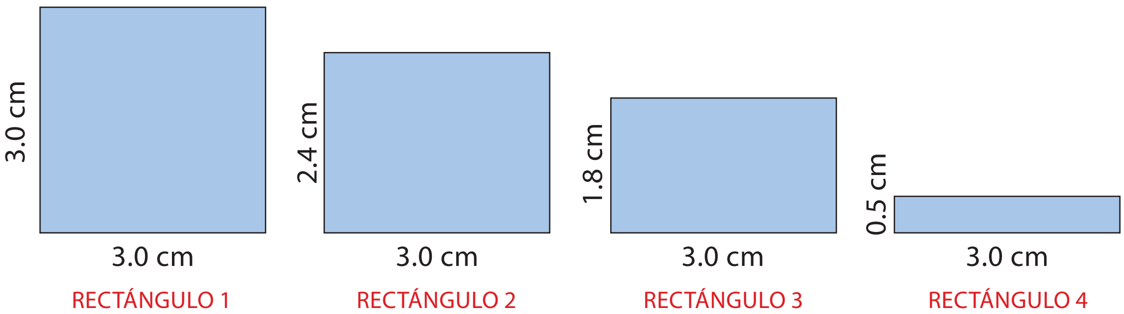
3. Tres socios invierten capitales en un negocio por ochenta, sesenta y cuarenta millones de pesos, respectivamente. Si en un año se han obtenido utilidades por treinta y seis millones de pesos y estas se reparten proporcionalmente, ¿cuál es la ganancia que le corresponde al que invirtió menos?

4. Los patrocinadores de un equipo de baloncesto ofrecen un premio de \$5 400 000 para repartir entre los 3 integrantes del equipo que marquen más puntos en el torneo. La repartición se hará proporcional al número de puntos marcados por cada jugador. Al finalizar la temporada Andrés, Esteban y Jairo marcaron 240, 200 y 160 puntos. ¿Cuánto dinero recibió cada uno?

4.3. Ecuaciones cuadráticas

Situación inicial

¿Cuál de estos rectángulos le parece más "bello"?



Muchas de las obras de artistas y arquitectos incluyen figuras rectangulares. Ha sido de su interés, desde hace mucho tiempo, construir los rectángulos más "bellos". El criterio de belleza está asociado a la razón en que se encuentran el largo y el ancho del rectángulo.

- Para que entendamos la propiedad que caracteriza a los rectángulos "bellos", llamados *áureos* por los antiguos griegos, calculemos primero, para cada uno de los rectángulos anteriores, las siguientes razones:

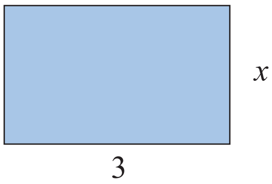
	RECTÁNGULO 1	RECTÁNGULO 2	RECTÁNGULO 3	RECTÁNGULO 4
$\dfrac{\text{base}}{\text{altura}}$				
$\dfrac{\text{base + altura}}{\text{base}}$				

Los antiguos griegos consideraron que, para que un rectángulo sea áureo, la base y la altura deben satisfacer la proporción: $\dfrac{\text{base + altura}}{\text{base}} = \dfrac{\text{base}}{\text{altura}}$

¿Cuál de los cuatro rectángulos se aproxima más a un rectángulo áureo?

La pregunta que surge de lo anterior es, entonces: ¿cuál es la razón exacta en que se encuentran la base y la altura de un rectángulo áureo?

Supongamos que partimos de un rectángulo de base 3 cm y queremos hallar la altura x, de modo tal que el rectángulo resulte ser áureo,



esto es, que se cumpla: $$\frac{3+x}{3} = \frac{3}{x}$$

Multiplicando medios y extremos: $x\,(3+x) = 3 \cdot 3$

$$3x + x^2 = 9$$

La anterior es una ***ecuación cuadrática***. Antes de estudiar cómo resolverla, la escribiremos en la ***forma general*** de una ecuación cuadrática: $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$.

Para eso, pasamos el nueve al lado izquierdo y ordenamos: $x^2 + 3x - 9 = 0$

En esta ecuación $a = 1$; $b = 3$; $c = -9$

Cuando escribimos una ecuación cuadrática en la forma general, identificamos en ella un *término cuadrático* (ax^2), un término lineal (bx) y un *término independiente* o *constante* (c).

Comenzaremos resolviendo ecuaciones cuadráticas en donde el término lineal es cero.

Ejemplo de estas ecuaciones son:

$x^2 - 16 = 0$; $x^2 - 12 = 0$; $5x^2 - 35 = 0$; $4x^2 - 1 = 0$; $x^2 + 9 = 0$

En la solución de estas ecuaciones tenemos presentes algunos de los procesos vistos anteriormente. Veamos cómo resolverlas:

EJEMPLO

1. Resolver la ecuación $x^2 - 16 = 0$

Solución

Despejamos x^2, sumando 16, en ambos lados:

$$x^2 - 16 = 0$$
$$x^2 = 16$$

Esta ecuación, traducida verbalmente, nos pregunta por un(os) número(s) que elevado(s) al cuadrado dé (den) 16. Los números son 4 *y* –4.

Este resultado se obtiene sacando raíz cuadrada:

$$x^2 = 16 \quad ; \quad x = \pm\sqrt{16}$$
$$x = \pm 4$$

Los números reales que satisfacen la ecuación son $x_1 = 4$ y $x_2 = -4$

Los números 4 y –4
son las ***soluciones*** o las ***raíces*** de la ecuación.

EJEMPLOS

2. Hallar las soluciones de la ecuación $x^2 - 12 = 0$

Procederemos de la misma manera que en el ejemplo anterior:

$$\begin{aligned} x^2 &= 12 \\ x &= \pm\sqrt{12} \\ x &= \pm\sqrt{4 \times 3} \\ x &= \pm 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

La ecuación tiene como soluciones $x_1 = 2\sqrt{3}$ y $x_2 = -2\sqrt{3}$

3. Hallar las raíces de la ecuación $5x^2 - 35 = 0$

$$\begin{aligned} 5x^2 &= 35 \\ x^2 &= \frac{35}{5} = 7 \\ x &= \pm\sqrt{7} \end{aligned}$$

Las raíces de la ecuación son $x_1 = \sqrt{7}$ y $x_2 = -\sqrt{7}$

4. Resolver la ecuación $4x^2 - 1 = 0$

$$\begin{aligned} 4x^2 &= 1 \\ x &= \pm\sqrt{\frac{1}{4}} \\ x &= \pm\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Las soluciones de la ecuación son: $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = -\frac{1}{2}$

EJEMPLO

5. Veamos la ecuación $x^2 + 9 = 0$

$$x^2 + 9 = 0$$
$$x^2 = -9$$
$$x = \pm\sqrt{-9}$$

Esta ecuación no tiene solución en los números reales, ya que $\sqrt{-9}$ no es un número real

EJERCICIO 6

Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $m^2 - 81 = 0$

2. $4y^2 - 25 = 0$

3. $-49n^2 + 4 = -3$

4. $x^2 - 5 = 0$

5. $9y^2 + 16 = 0$

6. $3m^2 = -21$

7. $(n - 4)^2 - 9 = 0$

8. $4(y + 3)^2 - 1 = 0$

9. $(x - 4)^2 + 6 = 0$

10. $100 - 8n^2 = 16$

Utilizando factorización y la propiedad del producto igual a cero, resolveremos algunas ecuaciones cuadráticas.

La Propiedad del producto igual a cero:
Si $a \cdot b = 0$ entonces $a = 0$ ó $b = 0$.
Si el producto de dos o más números es cero, entonces, por lo menos uno de los números es cero.

EJEMPLO

6. Resolver la ecuación $x^2 - 16 = 0$

Solución

Factorizamos: $(x-4)(x+4)=0$

y utilizamos la propiedad del producto igual a cero:

$$x-4=0 \quad \text{ó} \quad x+4=0$$
$$x=4 \quad \text{ó} \quad x=-4$$

Así llegamos a las mismas soluciones del ejemplo 1.

EJEMPLO

7. Resolver la ecuación $36x^2 - 49 = 0$

Solución

$$36x^2-49=0$$
$$(6x-7)(6x+7)=0$$
$$6x-7=0 \quad \text{ó} \quad 6x+7=0$$
$$x=\frac{7}{6} \quad \text{ó} \quad x=-\frac{7}{6}$$

La ecuación tiene dos soluciones: $x_1 = \frac{7}{6}$ y $x_2 = -\frac{7}{6}$

Entre las ecuaciones que podemos resolver factorizando están aquellas en las que la constante es cero. Ejemplos de estas son:

$$4x^2 - 12x = 0; \qquad 5x^2 = 3x$$

EJEMPLO

8. Hallar las soluciones de la ecuación $4x^2 - 12x = 0$

Solución

Factorizamos $4x$:

$$4x\,(x-3)=0$$
$$4x=0 \quad \text{o} \quad x-3=0$$
$$x=0 \quad \text{o} \quad x=3$$

Las soluciones de la ecuación son $x_1=0$ y $x_2=3$

9. Hallar las raíces de la ecuación $5x^2=3x$. Pasamos $3x$ al lado izquierdo de la ecuación y procedemos como en el ejemplo anterior:

$$5x^2-3x=0$$
$$x(5x-3)=0$$
$$x=0 \quad \text{o} \quad 5x-3=0$$
$$x=0 \quad \text{o} \quad x=\frac{3}{5}$$

Las raíces de la ecuación son $x_1=0$ y $x_2=\frac{3}{5}$

EJERCICIO 7

Resolver las siguientes ecuaciones factorizando:

1. $m^2-4m=0$

2. $3t^2-3t=0$

3. $n^2-81=0$

4. $9y^2-49=0$

5. $11x^2-7x=0$

6. $25n^2-1=0$

Factorizando trinomios podemos resolver algunas ecuaciones cuadráticas, en las cuales *a*, *b* y *c* son diferentes de cero. Por ejemplo:

$$x^2-5x-6=0; \qquad x^2-10x=-25;$$
$$x^2+3x+2=0; \qquad 2x^2-7x=-6$$

EJEMPLOS

10. Resolver la ecuación $x^2 - 5x - 6 = 0$

Solución

Factorizamos el trinomio $x^2 - 5x - 6$:

$$(x-6)(x+1)=0$$
$$x-6=0 \quad \text{o} \quad x+1=0$$
$$x=6 \quad \text{o} \quad x=-1$$

Las soluciones de la ecuación son $x_1 = 6$ y $x_2 = -1$

11. Resolver la ecuación $x^2 - 10x = -25$

Solución

Pasamos –25 al lado izquierdo y factorizamos:

$$x^2-10x+25=0$$
$$(x-5)(x-5)=0$$
$$x-5=0 \quad \text{o} \quad x-5=0$$
$$x=5$$

La ecuación tiene una única solución: $x = 5$

12. Hallar las soluciones de la ecuación $x^2 + 3x + 2 = 0$

Solución

$$(x+2)(x+1)=0$$
$$x+2=0 \quad \text{o} \quad x+1=0$$
$$x=-2 \quad \text{o} \quad x=-1$$

Las soluciones de la ecuación son $x_1 = -2$ *y* $x_2 = -1$

4

EJEMPLO

13. Hallar las raíces de la ecuación $2x^2 - 7x = -6$

Solución

$$2x^2 - 7x + 6 = 0$$
$$(x-2)(2x-3) = 0$$
$$x = 2 \quad \text{o} \quad x = \frac{3}{2}$$

Las raíces de la ecuación son $x_1 = 2$ y $x_2 = \frac{3}{2}$

EJERCICIO 8

Resolver las siguientes ecuaciones factorizando:

1. $m^2 - 10m + 25 = 0$
2. $x^2 + 12x = -36$
3. $9t^2 - 12t + 4 = 0$
4. $y^2 + 12y + 35 = 0$
5. $t^2 - 5t + 6 = 0$
6. $x^2 + 5x - 50 = 0$
7. $d^2 - 36 - 9d = 0$
8. $3t^2 - 4 - 4t = 0$
9. $2t^2 + 5t - 12 = 0$

Si tenemos una ecuación como $x^2 - 6x - 20 = 0$, al intentar factorizar el trinomio nos damos cuenta que no hay enteros que sumados den -6 y que multiplicados den -20; el método de "completar el cuadrado", ilustrado en el siguiente ejemplo, es una alternativa a seguir:

EJEMPLO

14. Resolver la ecuación $x^2 - 6x - 20 = 0$

Solución

Pasamos -20 al otro lado de la igualdad:

$$x^2 - 6x = 20$$

Conseguimos un trinomio cuadrado perfecto en el lado izquierdo si tomamos la mitad de 6 y la elevamos al cuadrado. El resultado, que es 9, lo sumamos en ambos lados de la igualdad:

$$x^2 - 6x + 9 = 20 + 9$$

Factorizamos el trinomio y obtenemos:

$$(x - 3)^2 = 29$$

Sacamos raíz cuadrada:

$$x - 3 = \pm\sqrt{29}$$

Despejamos x y obtenemos las soluciones:

$$x = \sqrt{29} + 3 \quad \text{o} \quad x = -\sqrt{29} + 3$$

Las soluciones de la ecuación son $x = \sqrt{29} + 3$ y $x = -\sqrt{29} + 3$

$x_1 \approx 8.38$ $x_2 \approx -2.38$

EJERCICIO 9

Resolver las siguientes ecuaciones completando el cuadrado:

1. $x^2 - 8x + 1 = 0$
2. $m^2 - 10m + 7 = 0$
3. $n^2 + 6n + 10 = 0$
4. $x^2 + 5x + 2 = 0$
5. $2y^2 - 8y + 3 = 0$
6. $3a^2 + 12a - 4 = 0$

A continuación se muestra el método de completar el cuadrado con la ecuación $3x^2 + 11x + 6 = 0$ y con la ecuación general $ax^2 + bx + c = 0$; conseguiremos una fórmula para resolver ecuaciones cuadráticas:

4

Resolver la ecuación $3x^2 + 11x + 6 = 0$ y la ecuación general de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$

En la columna de la derecha vamos realizando pasos similares a los de la izquierda.

$3x^2 + 11x + 6 = 0$ $a = 3 \quad b = 11 \quad c = 6$	$ax^2 + bx + c = 0 \quad a \neq 0$
$3x^2 + 11x = -6$	$ax^2 + bx = -c$
$\frac{3}{3}x^2 + \frac{11}{3}x = -\frac{6}{3}$	$\frac{a}{a}x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$
$x^2 + \frac{11}{3}x + \left(\frac{11}{2 \cdot 3}\right)^2 = \left(\frac{11}{2 \cdot 3}\right)^2 - \frac{6}{3}$	$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$
$\left(x + \frac{11}{2 \cdot 3}\right)^2 = \frac{11^2}{4 \cdot (3)^2} - \frac{4 \cdot 3 \cdot 6}{4 \cdot (3)^2}$	$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}$
$\left(x + \frac{11}{2 \cdot 3}\right)^2 = \frac{11^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6}{4 \cdot (3)^2}$	$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$x + \frac{11}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{11^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6}}{2 \cdot 3}$	$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$x = \frac{-11}{2 \cdot 3} \pm \frac{\sqrt{11^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6}}{2 \cdot 3}$	$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$x = \frac{-11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6}}{2 \cdot 3}$	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Si resolvemos las operaciones, encontramos que las raíces son: $x_1 = 2$ y $x_2 = \dfrac{3}{2}$

La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$
se resuelve utilizando la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

EJEMPLO

15. Resolver la ecuación $2x^2 - 7x + 5 = 0$

Solución

En esta ecuación tenemos: $a = 2$, $b = -7$, $c = 5$

Remplazamos en la fórmula para resolver ecuaciones cuadráticas:

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5}}{2 \cdot 2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{7 \pm 3}{4}$$

$$x = \frac{7+3}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}, \qquad x = \frac{7-3}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Las soluciones de la ecuación son:

$$x_1 = 1 \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{5}{2}$$

Volviendo a la situación inicial de esta sección, para hallar las dimensiones del rectángulo áureo, tenemos que resolver la ecuación $x^2 + 3x - 9 = 0$.

Utilizamos la fórmula reemplazando $a = 1, b = 3, c = -9$:

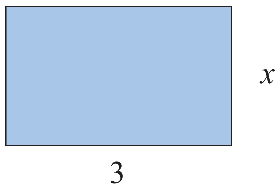
$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 36}}{2}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{45}}{2}$$

Ya que las longitudes se toman positivas, la solución es:

$$x = \frac{-3+\sqrt{45}}{2} \approx 1.8541$$

Así, para que el rectángulo sea áureo, la altura debe tomarse de 1.8 cm, aproximadamente.



La razón de la base y la altura del rectángulo es entonces:

$$\frac{\text{base}}{\text{altura}} \approx \frac{3}{1.854} \approx 1.61$$

La razón entre la base y la altura en los rectángulos áureos es aproximadamente 1.618 (***número áureo***).

EJERCICIO 10

A. Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $n^2 - 49 = 0$

2. $3y^2 - 12 = 0$

3. $-5n^2 - 12 = 3$

4. $x^2 + 7 = 0$

5. $(2a - 3)^2 = 4$

6. $(m - 2)^2 + 1 = 0$

7. $(3y + 1)^2 = \frac{1}{36}$

8. $(5m - 7)^2 = \frac{49}{64}$

9. $64n^2 - 121 = 0$

10. $-6t^2 = 5t$

11. $12n^2 - 9n = 5n$

12. $28y^2 = 7y$

13. $n^2 + 4n + 4 = 0$

14. $16m^2 + 24m = -9$
15. $n^2 = 2n - 1$
16. $y^2 - 3y - 4 = 0$
17. $x^2 - 24 = -10x$
18. $m^2 - 25m = -24$
19. $x^2 - 5x - 14 = 0$
20. $y^2 + 12y + 35 = 0$
21. $5t^2 = -14t - 8$
22. $d^2 - 36 + 9d = 0$
23. $7t = t^2 - 30$
24. $x^2 - 3x - 12 = 0$
25. $y^2 + 6y - 1 = 0$
26. $16 = -36x^2 + 48x$
27. $3n^2 + 4n + 5 = 0$
28. $x^2 + 2x + 7 = 0$
29. $7n^2 + 12n = 4$
30. $2m^2 + 10m = 1$
31. $4n^2 - 3n + 3 = 0$
32. $5x^2 = 6 + 2x$
33. $4y - 3y^2 = -2$

B. Dé un ejemplo de una ecuación de segundo grado que tenga como soluciones $x = -5$ y $x = 2$

C. Dé un ejemplo de una ecuación de segundo grado que tenga como solución $x = \dfrac{1}{2}$

D. Dé un ejemplo de una ecuación de segundo grado que tenga como soluciones $x = 3$ y $x = \dfrac{2}{3}$

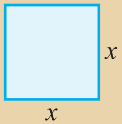
4.3.1. Problemas de aplicación

Veamos ahora la solución de problemas que conducen al planteamiento de una ecuación cuadrática.

PROBLEMA 1

¿Cuál es el lado de un cuadrado que tiene de área 25 cm^2?

Solución



Llamemos x la longitud del lado, por tanto, el área A del cuadrado es: $A = x \cdot x = x^2 = 25$.

La anterior ecuación la podemos escribir como $x^2 - 25 = 0$, una ecuación de segundo grado.

Resolvemos la ecuación:

$$\begin{aligned} x^2 - 25 &= 0 \\ x^2 &= 25 \\ x &= \pm\sqrt{25} \end{aligned}$$

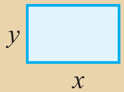
$$x = 5 \quad ó \quad x = -5$$

Como la incógnita representa una longitud, la cual no puede ser negativa, concluimos que el lado del cuadrado mide 5 cm.

PROBLEMA 2

Un rectángulo tiene un área de 48 m^2 y un perímetro de 32 m. ¿Cuáles son sus dimensiones?

Solución



Llamemos: x : base del rectángulo y : altura del rectángulo

El perímetro del rectángulo es: $2x + 2y = 32$

El área del rectángulo es: $A = x \cdot y = 48$

Despejamos y en la ecuación del perímetro:

$$2x + 2y = 32$$

$$y = \frac{32 - 2x}{2} = 16 - x$$

Remplazamos y en el área:

$$A = x \cdot y = x \cdot (16 - x) = 48$$

Eliminamos los paréntesis, igualamos a cero y obtenemos una ecuación cuadrática:

$$\begin{aligned} 16x - x^2 &= 48 \\ x^2 - 16x + 48 &= 0 \end{aligned}$$

Resolvemos la ecuación:

$$\begin{aligned} (x - 4)(x - 12) &= 0 \\ x = 4 \ \text{ ó } \ x &= 12 \end{aligned}$$

Luego si $x = 4$, entonces

$$y = 16 - x = 16 - 4 = 12$$

Si tomamos la otra solución $x = 12$, entonces

$$y = 16 - x = 16 - 12 = 4$$

Por lo tanto, las dimensiones del rectángulo son: 4 cm de base por 12 cm de altura, o 12 cm de base por 4 cm de altura.

EJERCICIO 11

Resuelva los siguientes problemas:

1. Halle dos números cuya suma sea 32 y su producto sea 255.
2. La suma de los cuadrados de dos números naturales consecutivos es 221. Halle los números.
3. Una caja tiene 5 cm de altura; el largo de la caja mide 5 cm más que el ancho. Halle las dimensiones de la caja si su volumen es de 1500 cm^3.
4. Calcule los tres lados de un triángulo rectángulo si sus medidas son tres enteros consecutivos.

5. ¿Cuál es el número cuyo cuadrado más su triplo es igual a 40?

6. El largo de una caja supera al ancho en 10 cm y la altura es 6 cm menor que el ancho. La superficie de las paredes laterales supera a las del fondo y la tapa en 960 cm^2. ¿Cuáles son las longitudes de largo, ancho y alto de la caja?

7. En un terreno de 40 m por 60 m se va a construir un edificio. Se desea que quede una franja libre, de ancho constante, que rodee al edificio. Si el área de la base del edificio es 1056 m^2, ¿cuál es el ancho de la franja libre?

4.4. EJERCICIOS FINALES DE LA UNIDAD 4

A. Resuelva las ecuaciones:

1. $12 - 5y = 7y$

2. $8y - 1 = 23 - 4y$

3. $2(4x - 9) = 16 - 3x$

4. $-3m + 8 = -m + 9$

5. $7a - 5(a - 2) = 18$

6. $0.3x + 0.4 = 1.2 - 1.3x$

7. $\frac{2x-5}{3} - \frac{4x-1}{2} = \frac{5}{6}$

8. $-\frac{3a+2}{8} + \frac{5+2a}{6} = \frac{3}{4}$

9. $-\frac{2x}{7} + \frac{4x}{14} = \frac{5x}{2}$

10. $\frac{-3}{2n} + \frac{5}{3n} = \frac{1}{4}$

11. $\frac{2x-7}{5} = \frac{6+8x}{20}$

12. $\frac{2}{y} - \frac{7}{8} = \frac{7}{6y} - \frac{5}{4}$

13. $-3.7a + 6.2 = -7.3a - 4.6$

14. $3\left(\frac{1}{6}m - \frac{1}{4}\right) = 5\left(\frac{2}{3}m - \frac{3}{4}\right)$

15. $0.2(0.3x - 1.4) = 0.1(2 + 0.6x)$

16. $\frac{1}{4}(24 - 12c) = -\frac{1}{6}(18c + 36)$

B. Verifique si los valores dados son solución de las ecuaciones dadas:

1. $y = 5\,;\quad \dfrac{9-12y}{5} = \dfrac{-8y+5}{3}$

2. $\dfrac{4}{b} - \dfrac{3}{2b} = -10\,;\; b = -\dfrac{1}{4}$

C. Verifique si las ecuaciones dadas son equivalentes.

1. $-4x = -2\,;\quad 2(x-3) + 9x = -5(4-3x) + 12$

2. $20m = 76 - 27m\,;\quad \dfrac{4m-11}{3} = -\dfrac{7+9m}{5}$

D. Resuelva los siguientes problemas:

1. Antonio tenía un paquete de hojas de papel milimetrado que compartió con sus 2 amigos. A Pedro le dio $\frac{1}{4}$, y Rodrigo tomó $\frac{1}{3}$ de las que quedaban. Si Antonio se quedó con 30 hojas, ¿cuántas tenía al comienzo?

2. Al aumentar en un 15% el precio de un artículo, este queda en \$5520. ¿Cuál era el precio antes del aumento?

3. La velocidad del automóvil A es 25 Km/h mayor que la del automóvil B. Si uno de ellos emplea 4 horas en recorrer la misma distancia que recorre el otro en 3 horas, ¿cuál es la velocidad de cada automóvil?

4. Una máquina fabrica 200 juguetes en 8 horas. Cuando 2 máquinas de las mismas funcionan simultáneamente, se elaboran los 200 juguetes en 3 horas. ¿Cuánto tiempo emplea la segunda máquina en producir los 200 juguetes cuando se pone a funcionar sola?

5. Dos soluciones contienen 40% y 65% de ácido sulfúrico, respectivamente. ¿Qué cantidad de cada solución se debe mezclar para obtener 240 ml de una solución al 45% de ácido sulfúrico?
6. Se vendieron 600 boletas para ingresar al teatro. El costo de las boletas para mayores de 12 años es de $6500, y para menores de 12 años, de $3500. Si el dinero recibido por la venta fue $2 640 000, ¿cuántas boletas para adultos y cuántas para menores se vendieron?

E. Halle el valor de la incógnita en cada proporción:

1. $7 : 6 :: 42 : x$
2. $\dfrac{x}{5} = \dfrac{8}{40}$
3. $\dfrac{7-y}{15} = \dfrac{4}{5}$
4. $x : 12 :: 25 : 20$
5. $\dfrac{12}{30} = \dfrac{10}{x}$
6. $\dfrac{x+5}{36} = \dfrac{3}{4}$

F. Resuelva los siguientes problemas:

1. Un deportista recorre 345 km en 9 días. A este ritmo, ¿qué distancia recorre en 36 días?
2. El equipo de carga de una fábrica estima que puede montar 7 contenedores en 20 minutos. ¿Cuántos contenedores puede montar en 2 horas?
3. Un reloj se atrasa 3 minutos cada 18 horas, ¿cuánto tiempo se atrasará en 45 horas?
4. En una escuela, la razón entre niños y niñas es de 4 : 5. Si hay 375 niñas, ¿cuántos estudiantes tiene la escuela?

5. La razón entre dos números es de 3 : 5 y su suma es 128. ¿Cuáles son los dos números?
6. Para obtener un color naranja se necesitan 3 galones de amarillo por cada 5 galones de rojo. Si se dispone de 25 galones de color amarillo, ¿cuántos galones de pintura roja se requieren en la preparación del color naranja, para gastar toda la pintura amarilla?
7. Si $15y = 25x$, encuentre las siguientes razones:

   a) $x : y$ ***b)*** $y : x$ ***c)*** $x : (x + y)$

G. Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas:

1. $36y^2 = 169$
2. $x^2 = -6x - 9$
3. $27a^2 - 36a = -12$
4. $b^2 = 14b - 49$
5. $d^2 = 21 + 20d$
6. $(m - 3)^2 + 4 = 0$
7. $3a^2 + 4a - 1 = 0$
8. $(3b - 5)^2 = 9$
9. $x^2 - 36 = 0$
10. $-9m^2 = 18m$
11. $4n^2 = 2n - 5$
12. $4n^2 - 64 = 0$
13. $m^2 - 2 = 0$
14. $2 = 3n^2 - 5n$
15. $8y^2 - 12y = -7y$
16. $(2y - 1)^2 = \frac{1}{49}$
17. $n^2 + 3n + 2 = 0$
18. $4m^2 = -144$
19. $3m = 2m^2 - 2$
20. $2a^2 + 5 + 7a = 0$
21. $14m - 8 = 3m^2$
22. $(4a + 5)^2 = \frac{81}{25}$
23. $x^2 + 6x = 27$
24. $x^2 - 3x + 6 = 0$
25. $5d^2 + 13d = 6$
26. $-7y^2 + 18 = 11$
27. $6c^2 = 10 - 11c$
28. $y^2 - 7y + 2 = 0$
29. $9 + 30m = -25m^2$
30. $3y^2 + 36 = 21y$

H. En cada ítem, consiga una ecuación de segundo grado que cumpla las condiciones correspondientes:

1. Tenga como soluciones $x = 3$ y $x = -1$

2. Tenga como solución $m = \frac{4}{3}$

3. Tenga como soluciones $y = -\frac{3}{2}$ y $y = \frac{3}{2}$

I. Resuelva los siguientes problemas:

1. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 13 cm y un cateto mide 7 cm menos que el otro. Halle la longitud de los catetos.

2. La velocidad de un bote en aguas tranquilas es de 12 km/h. El bote recorre 21 km contra la corriente y 45 km con la corriente, en 6 horas en total. ¿Cuál es la velocidad de la corriente?

3. Dos trenes salen del mismo punto P a las 2 p.m. El tren A viaja hacia el norte 8 km/h más rápido que el tren B, que viaja al este. A las 4 p.m. los separa una distancia de 80 km. ¿A qué velocidad viaja cada tren?

4. Tres veces el cuadrado de un número disminuido en doce veces el número es 231. ¿Cuál es el número?

5. El marco de una pintura es de 20 cm de largo por 12 cm de alto. Si el área que ocupa la pintura es de 128 cm^2, ¿cuál es el ancho del marco?

ANEXO 1

LA LÍNEA RECTA

LA LÍNEA RECTA

"El doble de un número sumado con seis da como resultado cero". El enunciado anterior lo representamos algebraicamente: $2x + 6 = 0$; la expresión anterior es un ejemplo de una *ecuación lineal en una variable*. Tiene como única solución $x = -3$. En la recta numérica se observa la representación gráfica de la solución.

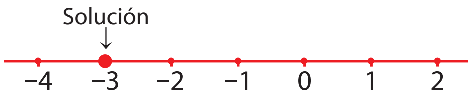


Figura 1

Consideremos ahora el siguiente enunciado: "la suma de dos números es 3".
Muchas posibilidades hay para que eso ocurra.

Coloque en las casillas algunas parejas de números que satisfagan el enunciado, "la suma de dos números es 3":

$$\square + \square = 3 \qquad \square + \square = 3$$
$$\square + \square = 3 \qquad \square + \square = 3$$
$$\square + \square = 3 \qquad \square + \square = 3$$

Figura 2

En lenguaje algebraico, el enunciado "la suma de dos números es 3" lo representamos mediante la ecuación: $x + y = 3$, donde las letras x, y y corresponden al primer y segundo números, respectivamente.

La ecuación $x + y = 3$ es un ejemplo de una *ecuación lineal en dos variables*. Las *soluciones* de esta ecuación están formadas por pares de números, uno para x y uno para y, que la satisfacen. Así, una solución es $x = 1$, $y = 2$, otra es $x = -5$, $y = 8$, etc., soluciones que escribimos como *pares ordenados*: $(1, 2)$, $(-5, 8)$, etc.

Escriba en la tabla 1 las soluciones encontradas en la figura 2:

x	y

Tabla 1

Podemos conseguir más soluciones a la ecuación de la siguiente forma: escogemos un valor cualquiera para una de las variables el cual sustituimos en la ecuación y luego la resolvemos para la otra variable; por ejemplo escogiendo $x = 15$:

$$15 + y = 3$$

$$y = 3 - 15 = -2$$

Luego, $(15, -12)$ es otra solución.

Como en este proceso se pueden tomar infinitos valores para la variable que se escoja inicialmente, la ecuación tiene por tanto infinitas soluciones.

Halle cuatro soluciones diferentes a la ecuación $x + 2y = 4$; colóquelas en la tabla 2:

x	y

Tabla 2

Hemos visto como obtener, algebraicamente, soluciones de una ecuación lineal en dos variables. Los pares ordenados de números reales que son soluciones los dibujamos en el plano cartesiano para producir la gráfica cartesiana de la ecuación.

Grafique en el plano cartesiano (figura 3) las soluciones de la ecuación $x + 2y = 4$ (utilice la tabla 2):

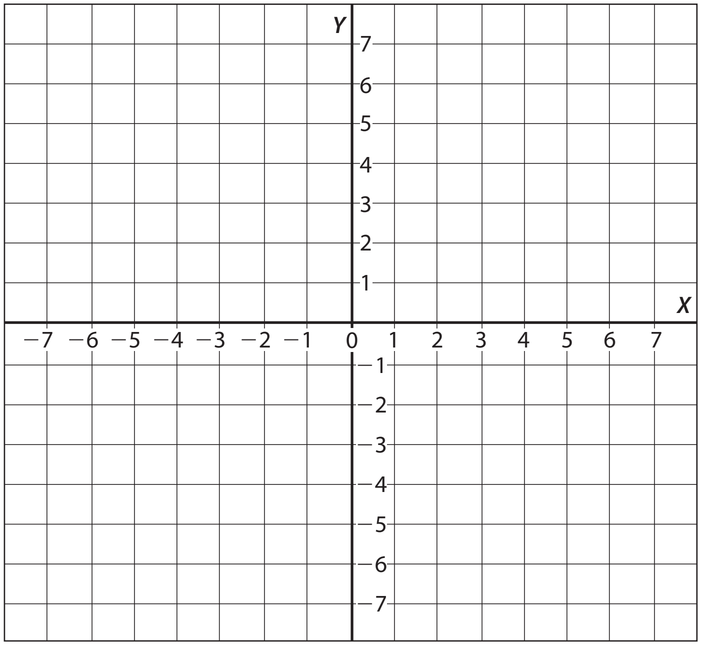


Figura 3

Observamos que los puntos están alineados, esto es, quedan en línea recta. Podemos verificar que al graficar otras soluciones éstas también se ubican en la misma recta y que cualquier punto de la recta corresponde a una solución de la ecuación. Es por eso que decimos que *la recta es la representación gráfica de las soluciones de la ecuación*.

En general se tiene:

Una ecuación escrita en la forma: $ax + by = c$, con a y b no simultáneamente cero es una ecuación lineal en dos variables. Esta forma se denomina ***forma general***. La gráfica es una ***línea recta***.

EJEMPLO

Grafique las ecuaciones:

a) $2x - 3y = 12$

b) $y - 2 = 0$

c) $x + 3 = 0$

Solución:

a) Ya que la gráfica es una recta, necesitamos por lo menos dos puntos, esto es, dos soluciones de la ecuación.

Despejemos la y:

$$-3y = -2x + 12$$

$$y = \frac{-2}{-3}x + \frac{12}{-3}$$

$$y = \frac{2}{3}x - 4$$

Demos valores a x, por ejemplo 3 y 6; al sustituir obtenemos:

$$y = \frac{2}{3}(3) - 4 = 2 - 4 = -2$$

$$y = \frac{2}{3}(6) - 4 = 4 - 4 = 0$$

En la siguiente tabla mostramos las soluciones correspondientes:

x	y
3	-2
6	0

Tabla 3

Gráfica:

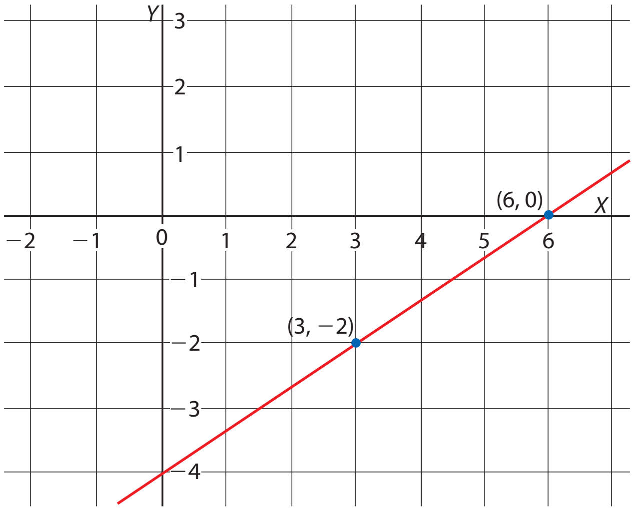


Figura 4

b) La ecuación $y - 2 = 0$ corresponde a la ecuación: $0x + y = 2$ (o también $y = 2$).

Despejando y, tenemos: $y = 0x + 2$

Tabla de valores:

x	y
1	2
3	2
-1	2
-3	2

Tabla 4

Observemos que para cualquier valor de x, la y *siempre* es 2; la gráfica resultante es una recta horizontal (paralela al eje x).

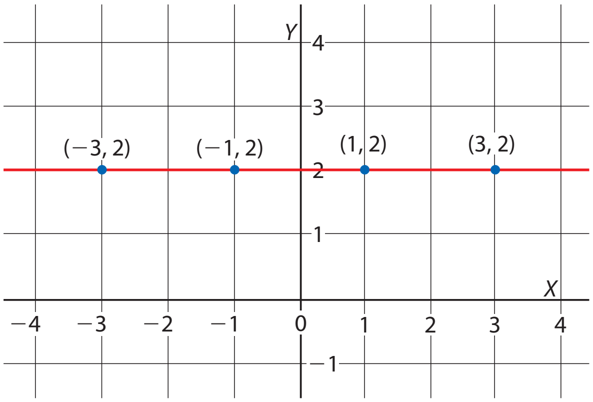


Figura 5

c) La ecuación $x + 3 = 0$ corresponde a la ecuación: $x + 0y = -3$ (o también $x = -3$).

Despejando x tenemos: $x = 0y - 3$

Damos varios valores a y y remplazamos. Tabla de valores:

x	y
-3	0
-3	1
-3	2
-3	-2

Tabla 5

Observemos que para cualquier valor de y, la x *siempre* es -3; la gráfica resultante es una recta vertical (paralela al eje y):

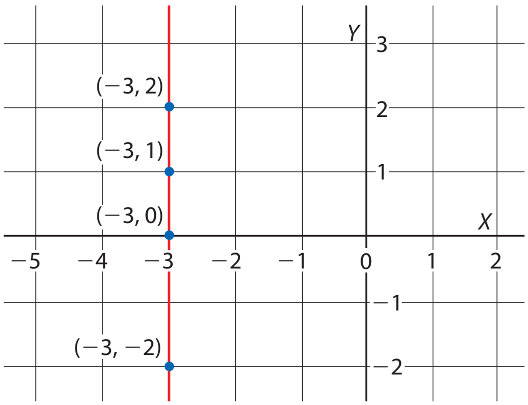


Figura 6

La gráfica de la ecuación $ax + by = c$, con a y b no simultáneamente cero, corresponde a una recta ***horizontal*** si $a = 0$ y a una ***vertical*** si $b = 0$.

La ecuación de una *recta horizontal* es de la forma $y = c$ mientras que la de una *recta vertical* es de la forma $x = c$.

Dos puntos útiles para hacer la gráfica de una recta son las intersecciones con los ejes X y Y (cuando las hay). Para encontrar la intersección con el eje X hacemos $y = 0$; para encontrar la intersección con el eje Y hacemos $x = 0$.

Halle las intersecciones con los ejes de la recta cuya ecuación es $4x - y = -8$; trace la gráfica.

EJERCICIO 1

1) El costo C de un cuaderno es el doble que el costo E de un esfero. Escriba en la forma general una ecuación que relacione dichos costos.

2) Escriba cada ecuación lineal en la forma $ax + by = c$; indique los valores de a, b y c:

a) $x - \dfrac{y}{5} - 13 = 0$ c) $4 - 7y = 0$ e) $3x = -y + 4$

b) $x = 3y$ d) $5 = 2x$ f) $\dfrac{2x - 5y}{3} = 2$

3) Escriba dos soluciones para cada ecuación:

a) $2x + y = 7$ c) $3 - 5y = 0$ e) $-8 = 4x$

b) $\pi x + y = 9$ d) $y = \dfrac{2x + 1}{3}$ f) $\dfrac{2x - 5y}{3} = 2$

4) Dada la ecuación $x - 2y = 4$, verifique cuáles de las siguientes son soluciones de la ecuación:

a) $(0, -2)$ c) $(4, 0)$ e) $(4, -4)$

b) $(2, 0)$ d) $(-4, 4)$ f) $(4, 4)$

5) Complete los pares ordenados para que sean soluciones de la ecuación $2x + y = 5$:

a) (0,) c) (1,) e) (3,)

b) (, 0) d) (, 1) f) (, −2)

6) Haga la gráfica de cada ecuación:

a) $x - y = 4$ c) $x = 4$ e) $y = 3x + 2$

b) $y = -3x$ d) $y + 4 = 0$ f) $2x + 3y = 6$

7) Dé las ecuaciones de dos rectas que pasen por el punto (2, 14). ¿Cuántas rectas pasan por ese punto?

8) Si el punto (3, 4) está en la gráfica de la recta $3y = ax + 7$, halle el valor de a.

Hemos visto cómo conseguir la gráfica de una recta a partir de la ecuación; vamos ahora a considerar el proceso contrario: de la gráfica a la ecuación. Tomemos la recta que pasa por los puntos $A = (1, -1)$ y $B = (5, 7)$. Para encontrar la ecuación de la recta vamos primero a cuantificar qué tan inclinada es una recta. Para ir desde el punto A hasta el B observamos que hay que subir 8 unidades después de moverse horizontalmente 4 unidades a la derecha:

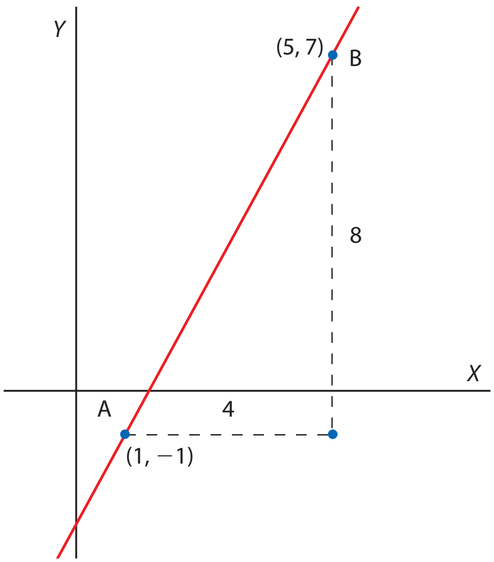


Figura 7

La medida de la inclinación es la ***pendiente*** de la recta, representada con la letra m, la cual definimos como ***el cociente del desplazamiento vertical y el horizontal***:

$$m = \frac{\text{desplazamiento vertical}}{\text{desplazamiento horizontal}} = \frac{8}{4} = \frac{2}{1}$$

Esto indica que por cada unidad que se incrementa la coordenada x (cambio en x: Δx), la coordenada y se incrementa en dos unidades (cambio en y: Δy). Así, la función es ***creciente***.

Con las coordenadas de los puntos podemos obtener la pendiente; para eso formamos el cociente entre la diferencia de ordenadas y la diferencia de abscisas:

$$m = \frac{7-(-1)}{5-1} = \frac{8}{4} = \frac{2}{1} = 2$$

Nota: puede verificarse que este resultado no depende del par de puntos que se escojan en la recta.

La *pendiente m* de la recta que pasa por los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, con $x_1 \neq x_2$, es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Nota: cuando la recta es vertical sucede que $x_1 = x_2$ y en este caso la pendiente no se define (es indefinida).

Ahora, para que un punto $P = (x, y) \neq A = (1, -1)$, esté en la recta AB, el cálculo de la pendiente con los puntos A y P debe dar el mismo resultado:

$$m = \frac{y-(-1)}{x-1} = 2$$

Despejando y, tenemos:

$$y + 1 = 2(x-1) = 2x - 2$$
$$y = 2x - 2 - 1 = 2x - 3$$

Por tanto, la ecuación de la recta AB es:

$$y = 2x - 3$$

Forma punto-pendiente

La ecuación de una recta que pasa por el punto (x_1, y_1)
y tiene pendiente m es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

EJEMPLO

Hallemos la ecuación de la recta que pasa por los puntos (2, 4) y (−4, 7).

Solución:

Calculemos primero la pendiente de la recta:

$$m = \frac{7-4}{-4-2} = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2}$$

La pendiente negativa, $-\frac{1}{2}$, indica que por cada dos unidades de incremento en la variable x hay una incremento negativo o disminución en la variable y. La función es por tanto ***decreciente***.

Tomemos el punto (2, 4) como el punto (x_1, y_1) y remplacemos en la ecuación:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 4 = -\frac{1}{2}(x - 2)$$

Despejando y, llegamos a la ecuación:

$$y = -\frac{1}{2}x + 5$$

Gráfica:

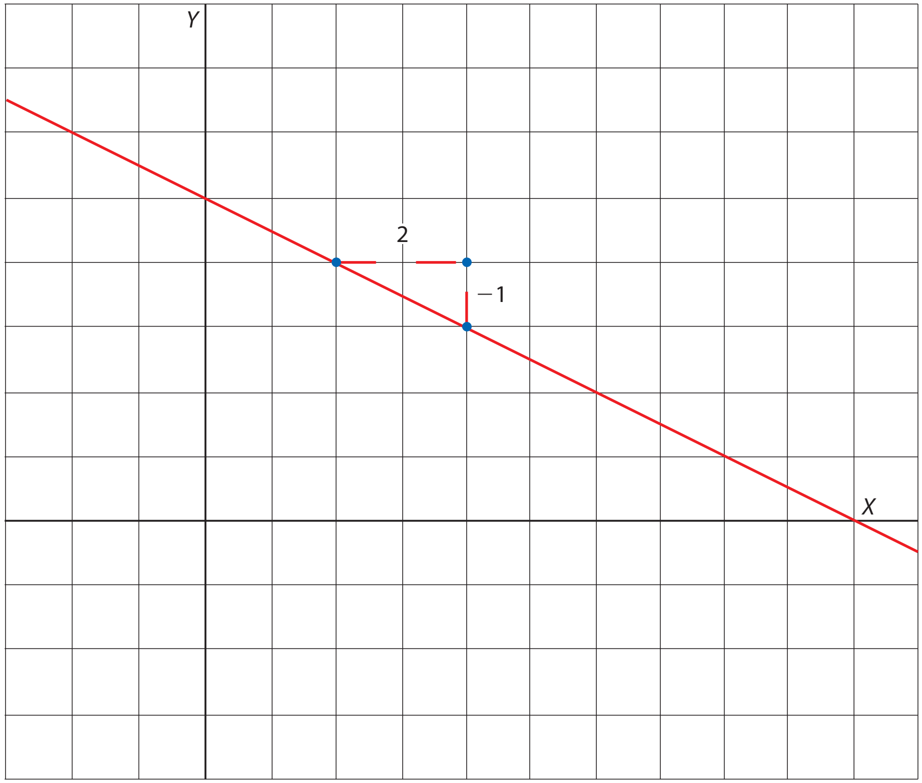


Figura 8

Al despejar *y*, en el ejemplo anterior obtuvimos: $y = -\frac{1}{2}x + 5$; el coeficiente de *x*: $\frac{-1}{2}$, es la pendiente de la recta, 5 es el intercepto con el eje *Y*.

Forma pendiente-intercepto

La ecuación de una recta cuya pendiente es m e intercepta al eje Y en el punto $(0, b)$ es:

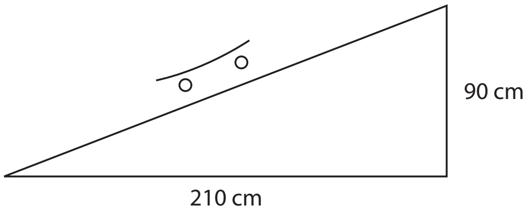
$$y = mx + b$$

RESUMEN	
Formas de la ecuación de una recta	
$ax + by = c$	Forma general (a y b no son simultáneamente cero)
$x = \dfrac{c}{a}$	Recta vertical ($b = 0$)
$y = \dfrac{c}{b}$	Recta horizontal ($a = 0$)
$y - y_1 = m(x - x_1)$	Forma punto-pendiente
$y = mx + b$	Forma pendiente-intercepto

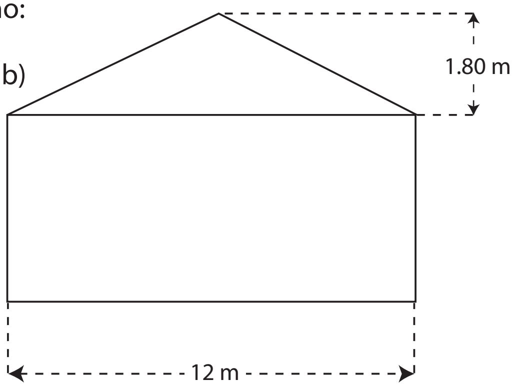
EJERCICIO 2

1) Halle las pendientes de la rampa y del techo:

a)



b)



2) Determine la ecuación de cada recta:

a)

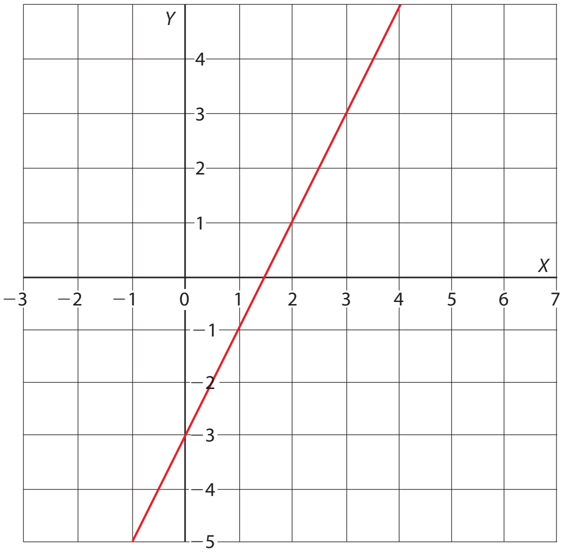


Figura 9

b)

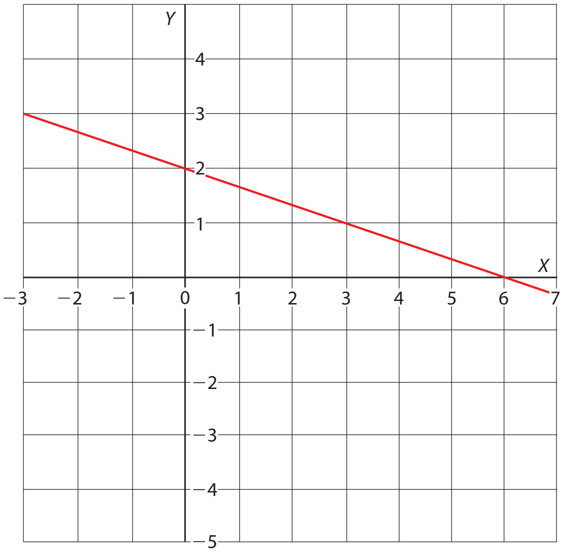


Figura 10

c)

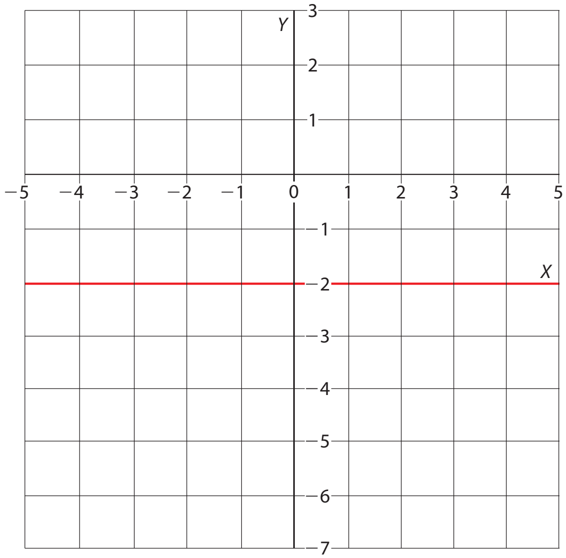


Figura 11

d)

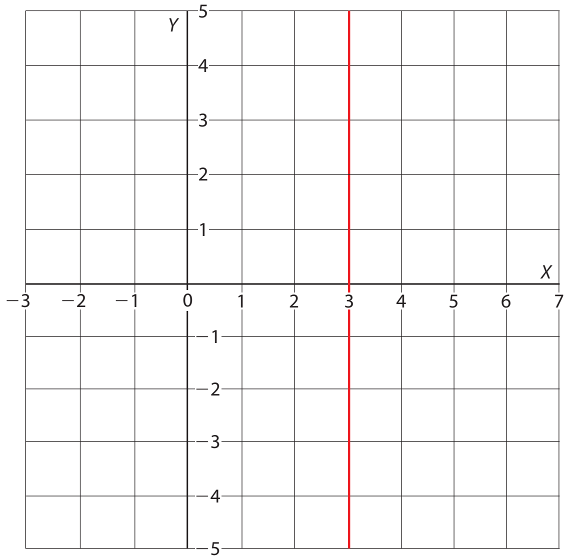


Figura 12

3) Determine una ecuación en forma general para la recta que pasa por el punto con la pendiente dados.

a) $(-3, 5), \quad m = -3$

b) $(2, -1), \quad m = \dfrac{3}{2}$

c) $(-2, -3), \quad m = 4$

d) $(5, 2), \quad m = -\dfrac{1}{3}$

4) Halle la ecuación de la recta que satisface las condiciones dadas:

a) Pasa por $(0, 5)$; la pendiente es $\dfrac{4}{3}$

b) Pasa por $(0, -3)$; $m = -\dfrac{2}{5}$

c) Pasa por $(-4, 0)$; la pendiente es $\dfrac{2}{3}$

d) Pasa por $(5, 6)$; $m = 1$

e) Pasa por $(-2, 4)$; la pendiente es $\dfrac{3}{4}$

f) Pasa por $(5, -8)$; $m = -\dfrac{1}{2}$

g) X–intercepto -4; Y–intercepto 3

h) X–intercepto 3; Y–intercepto 2

i) Pasa por $(5, 2)$ y $(5, -3)$

j) Pasa por $(3, -3)$ y $(-2, -3)$

k) Pasa por $(5, -2)$ y $(-3, 14)$

l) Pasa por $(-3, -5)$ y $(15, 4)$

m) Pasa por $(4, -2)$ y es horizontal

n) Pasa por $(-3, -2)$ y es vertical

5) Determine el valor de x o de y para que la recta, que pasa por el par de puntos, tenga la pendiente indicada:

a) $(x, -2), \ (-4, 3), \quad m = -2$

b) $(-1, -4), \ (1, y), \quad m = 3$

c) $(3, y), \ (-3, -1), \quad m = 1$

d) $(-4, 2), \ (x, -1), \quad m = -\dfrac{1}{2}$

6) Escriba cada ecuación en la forma pendiente-intercepto; determine los interceptos con los ejes:

a) $x + y = 9$

b) $3x - 2y = 6$

c) $2y + 5 = 0$

d) $\dfrac{4x + y}{2} = 1$

e) $\dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{2} = 1$

f) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1$

ANEXO 2

RESPUESTAS
A LOS EJERCICIOS FINALES DE CADA UNIDAD

Unidad 1 - Respuestas a los ejercicios finales

1. Como la cifra de las unidades es mayor o igual a 5, 37 se aproxima a 40; así, 6537 se redondea a 6540. Como la cifra de las decenas es menor que 5, 537 se aproxima a 500; así, 6537 se redondea a 6500.

2. 2, 2 y 9

3. $V_1(-8, -10)$ $V_2(-8, -6)$ $V_3(-2,-6)$ $V_4(-2, -10)$

4. *a)* –16
   b) 27
   c) –13
   d) 5
   e) 46
   f) –25
   g) 4

5. *a)* –144
   b) –105
   c) –8
   d) 101

6. *a)* –27
   b) –16
   c) 16
   d) –125
   e) –1
   f) 1

7. *a)* 24
   b) 1
   c) 8
   d) –3

8. ***a)*** $\frac{20}{48}=\frac{5}{12}$, simplificar por 4

b) $\frac{63}{84}=\frac{3}{4}$, simplificar por 7 y por 3

c) $\frac{108}{66}=\frac{18}{11}$, simplificar por 2 y por 3

d) $\frac{88}{121}=\frac{8}{11}$, simplificar por 11

e) $\frac{135}{105}=\frac{9}{7}$, simplificar por 3 y por 5

f) $\frac{140}{210}=\frac{2}{3}$, simplificar por 2, por 5 y por 7

9. $\frac{4}{12}=\frac{6}{18}$

10. La unidad está dividida en 8 partes, se han sombreado 3; la fracción correspondiente es: $\frac{3}{8}$

11. Cada unidad está dividida en 5 partes, luego el número es, 3 unidades y $\frac{2}{5}$; es decir, $3\frac{2}{5}=\frac{17}{5}$

12. $\frac{3}{7}=\frac{x}{42}$, 7 se multiplicó por 6 para obtener 42, entonces 3 se multiplica también por 6 y se tiene $x=18$

13. $\frac{88}{72}$, $\frac{121}{99}$ son fracciones equivalentes a $\frac{11}{9}$, que es la fracción irreductible, se amplificó por 8 y por 11 respectivamente.

14. ***a)*** $\frac{7}{8}>\frac{2}{3}$ porque $7\times 3>2\times 8$

b) $\frac{5}{9}<\frac{3}{5}$ porque $5\times 5<3\times 9$

c) $-\frac{5}{16} < -\frac{5}{17}$ porque $-5 \times 17 < -5 \times 16$

d) $\frac{90}{70} = \frac{45}{35}$ porque simplificando se obtiene: $\frac{90}{70} = \frac{9}{7}$ y $\frac{45}{35} = \frac{9}{7}$

e) $-\frac{15}{42} < \frac{5}{3}$ porque un número negativo es menor que cualquier número positivo

f) $-\frac{15}{21} = -\frac{45}{63}$ porque simplificando se obtiene: $-\frac{15}{21} = -\frac{5}{7}$ y $-\frac{45}{63} = -\frac{5}{7}$

15. *a)* $\frac{3}{16}, \frac{3}{8}, \frac{3}{7}, \frac{3}{5}, \frac{3}{4}, \frac{3}{3}$

b) $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{7}{7}, \frac{11}{8}$

16. *a)* $\frac{2}{5} \cdot \frac{10}{13} = \frac{20}{65} = \frac{4}{13}$

b) $-2\frac{1}{3} \div \frac{5}{6} = -\frac{7}{3} \times \frac{6}{5} = -\frac{14}{5}$

c) $\frac{-1}{3} + 1\frac{1}{4} + \frac{2}{5} = \frac{-20+75+24}{60} = \frac{79}{60}$

d) $\frac{2}{25} - \frac{3}{10} = \frac{4-15}{50} = -\frac{11}{50}$

e) $\left(\frac{-3}{2}\right)^3 = \frac{-27}{8}$

f) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$

17. 3 tarros azules que contienen $3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ libras de arroz, tienen: $3 \times \frac{7}{2} = \frac{21}{2} = 10\frac{1}{2}$ libras de arroz.

5 tarros rojos que contienen $1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ libras de arroz, tienen: $5 \times \frac{5}{4} = \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$ libras de arroz.

En total se tiene: $10\frac{1}{2} + 6\frac{1}{4} = 16\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = 16\frac{3}{4}$ libras de arroz.

18. $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, la fracción se compara con cada una de las fracciones dadas.

$\frac{31}{20} > \frac{3}{2}$, porque $31 \times 2 > 20 \times 3$

19. $\frac{3}{5}$ es la fracción que está más cerca de $\frac{1}{2}$. Se puede proceder convirtiendo a decimal cada fracción y luego se comparan.

$\frac{2}{3} = 0.66$ $\frac{7}{10} = 0.7$ $\frac{5}{6} = 0.833$ $\frac{3}{5} = 0.6$ y $\frac{1}{2} = 0.5$

20. Como se quiere que la suma sea la más pequeña posible, se organizan las fracciones más pequeñas posibles.

Las únicas sumas que se pueden organizar sin repetir número son:

$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}+\frac{2}{4}$ y $\frac{1}{4}+\frac{2}{3}$

De estas tres sumas la más pequeña es $\frac{1}{3}+\frac{2}{4}=\frac{5}{6}$

Las otras sumas dan como resultado números mayores $\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}=\frac{11}{12}, \frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}\right)$

21. Se procede de manera similar que en el ejercicio anterior y se tienen las siguientes diferencias: $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$, $\frac{4}{3}-\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}-\frac{1}{4}$ y $\frac{2}{1}-\frac{4}{3}$. De estas diferencias la más pequeña es: $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$. (Las otras diferencias dan como resultado números mayores:

$\frac{4}{3}-\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$, $\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$, $\frac{2}{1}-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$)

22.
a) 32.14
b) 3.22
c) –0.64
d) –20.9
e) –0.008
f) 80
g) 0.2
h) –0.0081
i) 0
j) –7.5
k) 130
l) 4.5

23.
a) 123.4
b) 0.8765
c) –0.00234
d) 0.001
e) 0.021
f) 0.006

24. $\frac{2}{3}\times 63=42$ kg. De los 63 kg del peso de una persona 42 kg son agua.

25. ***a)*** $\frac{3}{4} \rightarrow 75\%$

b) $\frac{1}{5} \rightarrow 20\%$

c) $\frac{20}{50} \rightarrow 40\%$

d) $1 \rightarrow 100\%$

e) $0.32 \rightarrow 32\%$

f) $0.036 \rightarrow 3.6\%$

g) $1.5 \rightarrow 150\%$

h) $0.004 \rightarrow 0.4\%$

26. 14 de 20 personas son mujeres, por lo tanto, 6 de las 20 personas son hombres, y se representa: $\frac{6}{20}$, que en forma decimal equivale a 0.3, es decir, al 30 %.

27. ***a)*** Los números desde el 1 hasta el 30 que tienen 2 dígitos son desde el 10 hasta el 30, es decir, 21 números, que equivalen a: $\frac{21}{30} = 0.7 \rightarrow 70\%$

b) Los números desde el 1 hasta el 30 que son múltiplos de 9 son 9, 18, 27, es decir, 3 números, que equivalen a: $\frac{3}{30} = 0.1 \rightarrow 10\%$

c) Los números primos desde el 1 hasta el 30, son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, es decir, 10 números, que equivalen a: $\frac{10}{30} = 0.3333 \rightarrow 33.33\%$

d) Los números divisores de 36, desde el 1 hasta el 30 que son: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36, es decir, 9 números, que equivalen a: $\frac{9}{30} = 0.3 \rightarrow 30\%$

28. ***a)*** 70% de 65 es 45.5

b) 50% de 9 es 4.5

c) 200% de 250 es 500

d) 50% de 46 es 23

e) 25% de 12 es 3

29. $\frac{1}{11} = 0.09\overset{\frown}{09}$ $\frac{2}{11} = 0.18\overset{\frown}{18}$ $\frac{3}{11} = 0.27\overset{\frown}{27}$

$\frac{4}{11} = 0.36\overset{\frown}{36}$ $\frac{5}{11} = 0.45\overset{\frown}{45}$

Se observa que en todas las expresiones decimales, hay un periodo de dos cifras cuya suma es 9. La primera cifra del periodo es el número anterior del numerador de la fracción, la segunda cifra es el número que falta para que la suma sea 9.

$\frac{7}{11} \longrightarrow$ el número anterior a 7 es 6, a 6 le falta 3 para que la suma dé 9.

Luego $\frac{7}{11} = 0.63\overset{\frown}{63}$

Se procede igual para $\frac{9}{11}$, obteniéndose $\frac{9}{11} = 0.81\overset{\frown}{81}$

30. ***a)*** $x \cdot 12 = 48$, entonces $x = \frac{48}{12} = 4$

b) $56 + m = 100$, entonces $m = 100 - 56 = 44$

c) $-6p = 28$, entonces $p = -\frac{28}{6} = -\frac{14}{3}$

d) $\frac{n}{-3} = -13$, entonces $n = (-13) \times (-3) = 39$

e) $-\frac{2}{3}x = 24$, entonces $x = 24 \cdot \left(\frac{-3}{2}\right)x = -36$

31. $K = C + 273$, entonces $C = K - 273$; se reemplaza K por 290°: $C = 290 - 273 = 17°$.

Por lo tanto, la temperatura de Marte es de 17°C.

32. ***a)*** $\dfrac{3^7}{3^3} = 3^4$

b) $3^6 \cdot 3^8 = 3^{14}$

c) $(3^4)^5 = 3^{20}$

d) $(3 \cdot 3^8)^4 = (3^9)^4 = 3^{36}$

e) $\dfrac{3^5}{3^5} = 3^0 = 1$

f) $\dfrac{(3^4 \cdot 3^6)^2}{(3^2 \cdot 3^3)^3} = \dfrac{(3^{10})^2}{(3^5)^3} = \dfrac{3^{20}}{3^{15}} = 3^5$

33. ***a)*** $\sqrt{2x} \cdot \sqrt{8x} = \sqrt{16x^2} = 4x$

b) $\dfrac{\sqrt{72x^3}}{\sqrt{8x}} = \sqrt{\dfrac{72x^3}{8x}} = \sqrt{9x^2} = 3x$

c) $\sqrt[3]{\sqrt[2]{x^{12}}} = \sqrt[6]{x^{12}} = x^2$

d) $36^{\frac{3}{2}} = \sqrt{36^3} = \sqrt{(6^2)^3} = \sqrt{6^6} = 6^3 = 216$

e) $(3x^{\frac{2}{3}})(4x^{\frac{3}{4}}) = 12x^{\frac{17}{12}} = 12x^{\frac{12}{12}} \cdot x^{\frac{5}{12}} = 12x \cdot \sqrt[12]{x^5}$

f) $(64^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}} = 64^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64} = 4$

34. ***a)*** $60\,000 = 6 \times 10^4$

b) $7\,250\,000 = 7.25 \times 10^6$

c) ciento cuarenta y cinco billones: $145\,000\,000\,000\,000 = 1.45 \times 10^{14}$

d) $0.0000345 = 3.45 \times 10^{-5}$

e) veinticinco mil millones $25\,000\,000\,000 = 2.5 \times 10^{10}$

35. ***a)*** $2.5 \times 10^3 = 2500$

b) $4.07 \times 10^6 = 4\,070\,000$

c) $4.5 \times 10^{-5} = 0.000045$

d) $2.6 \times 10^{-4} = 0.00026$

e) $8 \times 10^{-3} = 0.008$

Unidad 2 - Respuestas a los ejercicios finales

A. ***1.*** $3xy$

2. $3y^4 - 11y + 25$

3. $-7x + \frac{1}{2}$

4. $-\frac{3}{4}x + \frac{5}{11}y^3 - \frac{2}{9}z^2$

B. ***1.*** $3m - 2n + 4mn = 3(-2) - 2(5) + 4(-2)(5) = -6 - 10 - 40 = -56$

2. $6x^3 - y^2 + 2xy = 6\left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{-5}{6}\right)^2 + 2\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{-5}{6}\right) = \frac{16}{9} - \frac{25}{36} - \frac{10}{9} = \frac{64 - 25 - 40}{36} = -\frac{1}{36}$

3. $\frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{2}b^2 + \frac{3}{8}ab = \frac{3}{4}(-4)^2 + \frac{1}{2}3^2 + \frac{3}{8}(-4) \cdot 3 = 12 + \frac{9}{2} - \frac{9}{2} = 12$

4. $\frac{5}{6}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}x = \frac{5}{6}6^3 + \frac{2}{3}6^2 - \frac{1}{2}6 = 180 + 24 - 3 = 201$

5. $3m^3 - 2n^4 - 6m - 7n^2 + 5 = 3(-1)^3 - 2(\sqrt{2})^4 - 6(-1) - 7(\sqrt{2})^2 + 5 =$

$-3 - 8 + 6 - 14 + 5 = -14$

C. ***1.*** $8x^4 - 5x^2 + \frac{3}{7}x + \frac{3}{4} - x^5 + 2x^3 = -x^5 + 8x^4 + 2x^3 - 5x^2 + \frac{3}{7}x + \frac{3}{4}$

2. $5y^3 - 3y^7 + \frac{3}{5}y^2 + \frac{11}{3}y^5 - \frac{3}{5} + \sqrt{2}\,y = -3y^7 + \frac{11}{3}y^5 + 5y^3 + \frac{3}{5}y^2 + \sqrt{2}\,y - \frac{3}{5}$

3. $a^4b^2 - 8a^5b + \frac{5}{6}a^3b^3 + \frac{3}{4}a^2b^4 - a^6 + 3b^6 - ab^5 =$

$3b^6 - ab^5 + \frac{3}{4}a^2b^4 + \frac{5}{6}a^3b^3 + a^4b^2 - 8a^5b - a^6$

4. $-y^8z^5 + 9y^5z + \frac{2}{3}y^6z^4 - \frac{11}{7}y^2z^9 + y^{10} - yz^3 =$

$y^{10} - y^8z^5 + \frac{2}{3}y^6z^4 + 9y^5z - \frac{11}{7}y^2z^9 - yz^3$

D. **1.** $5mn \rightarrow \quad 24mn; \quad \frac{2}{3}mn; \quad \sqrt{3}\,mn$

2. $\frac{7}{3}a^2b \rightarrow \quad 2a^2b; \quad -\frac{1}{4}a^2b; \quad -a^2b$

3. $-x^3y^2 \rightarrow \quad 9x^3y^2; \quad \frac{3}{11}x^3y^2; \quad \sqrt{7}\,x^3y^2$

4. $6m^2n^2p \rightarrow \quad m^2n^2p; \quad -\frac{3}{8}m^2n^2p; \quad -23m^2n^2p$

5. $-\frac{1}{2}ab \rightarrow \quad -7ab; \quad \frac{12}{5}ab; \quad \sqrt[3]{2}\,ab$

E. **1.** $2a + 3b - c + 5a - 7c + 11b - 9c = 7a + 14b - 17c$

2. $\frac{3}{2}m - 2n + \frac{5}{4}n^2 - 3m + \frac{4}{3}n^2 + \frac{2}{5}n = -\frac{3}{2}m - \frac{8}{5}n + \frac{31}{12}n^2$

3. $\frac{3}{4}x - 7y + \frac{5}{6}xy - 12y + \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}xy = \frac{25}{12}x - 19y + \frac{1}{6}xy$

4. $-3a^2 + 2b^2 - ab + \frac{3}{2}ab - \frac{4}{3}b^2 + 13a^2 = 10a^2 + \frac{2}{3}b^2 + \frac{1}{2}ab$

5. $\frac{7}{3}x^2 - \frac{6}{5}y^3 + \frac{4}{9}x^2 + \frac{7}{6}xy + \frac{3}{2}y^3 = \frac{25}{9}x^2 + \frac{7}{6}xy + \frac{3}{10}y^3$

F. **1.** $(-3m + 5n) + (8n - 14m - 3) - (12 + 9n - 7m) = -10m + 4n - 15$

2. $(4xy^2 - 13x^2y - 6x) - (12x + 15xy^2 + 8x^2y) + (4x - 11x^2y) =$
$-14x - 11xy^2 - 32x^2y$

3. $\left(\frac{3}{4}ab - \frac{5}{2}bc + \frac{3}{5}ac\right) + (ab - bc + ac) = \frac{7}{4}ab - \frac{7}{2}bc + \frac{8}{5}ac$

4. $\left(\frac{7}{2}mn - \frac{3}{5}n^2 + \frac{1}{3}m^2\right) - \left(\frac{12}{5}n^2 + \frac{9}{2}mn - \frac{5}{3}m^2\right) = 2m^2 - mn - 3n^2$

5. $\left(7x^5 + \frac{3}{7}x^3 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{1}{4}\right) - \left(10x^5 + \frac{8}{7}x^3 - \frac{4}{5}x^2 + \frac{7}{4}x - \frac{7}{4}\right) =$
$-3x^5 - \frac{5}{7}x^3 + \frac{2}{15}x^2 - 3x + 2$

6. $(11y - 9x + 2z) - (3x - 2y + 5z) = -12x + 13y - 3z$

7. $(11a - 9b + 3c - 5d) - (15c - 4b + 12a - 9d) = -a - 5b - 12c + 4d$

8. $(2m^2 - 5n^2 + 8mn) + (-13n^2 - 10m^2 + 11mn) - (8m^2 - 6n^2 + 7mn) =$
$(-8m^2 + 19\,mn - 18n^2) - (8m^2 - 6n^2 + 7mn) = -16m^2 + 12mn - 12n^2$

G. **1.** $(3m^3n^5)(8m^2n) = 24m^5n^6$

2. $(-9a^4b^2)(6a^2b)(ab^4) = -54a^7b^7$

3. $(3x^6y^7)(9x^5y) = 27x^{11}y^8$

4. $(m+3)(m-9) = m^2 - 6m - 27$

5. $(a^2-1)(a+1) = a^3 + a^2 - a - 1$

6. $(y^4-2)(y-8) = y^5 - 8y^4 - 2y - 16$

7. $(3n-4)(2n-1) = 6n^2 - 11n + 4$

8. $(x+11)(x-9) = x^2 + 2x - 99$

9. $(y^2+6)(y^2+2) = y^4 + 8y^2 + 12$

10. $5z^2(2z^3+2z-3) = 10z^5 + 10z^3 - 15z^2$

11. $(m^3-2m^2-m+5)(m-1) = m^4 - 3m^3 + m^2 + 6m - 5$

12. $(9a^2b - 5ab^2)(2a^2b + 6ab^2) = 18a^4b^2 + 44a^3b^3 - 30a^2b^4$

13. $(0.4a^2 - 0.3a + 1)(0.2a + 5) = 0.08a^3 + 1.94a^2 - 1.3a + 5$

14. $\left(\frac{3}{2}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{7}{6}x\right)(12x^4 + 4x - 2) = 18x^5 - 9x^4 + 6x^3 + \frac{43}{6}x^2 - \frac{7}{3}x$

15. $\left(\frac{3}{2}y - \frac{2}{5}\right)\left(\frac{9}{4}y^2 + \frac{3}{5}y + \frac{4}{25}\right) = \frac{27}{8}y^3 - \frac{8}{125}$

H. **1.** $(m-8)^2 = m^2 - 16m + 64$

2. $(a+9)^2 = a^2 + 18a + 81$

3. $(x-4)^3 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$

4. $(3m+2n)^3 = 27m^3 + 54m^2n + 36mn^2 + 8n^3$

5. $(x-7y^2)^2 = x^2 - 14xy^2 + 49y^4$

6. $(5x^3-2y^4)^3 = 125x^9 - 150x^6y^4 + 60x^3y^8 - 8y^{12}$

7. $(m-8)(m+8) = m^2 - 64$

8. $(3x^4+2y)(3x^4-2y) = 9x^8 - 4y^2$

9. $(a^3-7)(a^3+7) = a^6 - 49$

10. $(6a^3-4b^3)^2 = 36a^6 - 48a^3b^3 + 16b^6$

11. $(m^3+8n^4)(m^3-8n^4) = m^6 - 64n^8$

12. $(x^4+3)^3 = x^{12} + 9x^8 + 27x^4 + 27$

13. $\left(\frac{5}{2}m-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{5}{2}m+\frac{3}{4}\right)=\frac{25}{4}m^2-\frac{9}{16}$

14. $\left(\frac{3}{7}a^2-\frac{5}{8}\right)\left(\frac{3}{7}a^2+\frac{5}{8}\right)=\frac{9}{49}a^4-\frac{25}{64}$

15. $\left(m^2+\frac{2}{3}n^2\right)^3=m^6+2m^4n^2+\frac{4}{3}m^2n^4+\frac{8}{27}n^6$

16. $(0.8a+0.5b)^2=0.64a^2+0.80ab+0.25b^2$

17. $(0.1y-z^3)(0.1y+z^3)=0.01y^2-z^6$

18. $(y^2-0.4)(y^2+0.4)=y^4-0.16$

I. **1.** $35m^6 \div 5m^5=7m$

2. $77a^5b^6 \div 11a^3b^3=7a^2b^3$

3. $125x^7y^4 \div 25x^4y=5x^3y^3$

4.
$$\begin{array}{rl} x^2-4x+2 & \underline{\big|\; x-2} \\ \underline{-x^2+2x} & \;\; x-2 \\ -2x+2 & \\ \underline{2x-4} & \\ -2 & \end{array}$$

5.
$$\begin{array}{rl} m^2-18m+81 & \underline{\big|\; m-9} \\ \underline{-m^2+9m} & \;\; m-9 \\ -9m+81 & \\ \underline{9m-81} & \\ 0 & \end{array}$$

6.
$$\begin{array}{rl} x^2-11x+28 & \underline{\big|\; x-4} \\ \underline{-x^2+4x} & \;\; x-7 \\ -7x+28 & \\ \underline{7x-28} & \\ 0 & \end{array}$$

7.
$$\begin{array}{rl} a^2-9a-36 & \underline{\big|\; a-3} \\ \underline{-a^2+3a} & \;\; a-6 \\ -6a-36 & \\ \underline{6a-18} & \\ -54 & \end{array}$$

8.
$$\begin{array}{rl} n^2+13n+42 & \underline{\big|\; n+2} \\ \underline{-n^2-2n} & \;\; n+11 \\ 11n+42 & \\ \underline{-11n-22} & \\ 20 & \end{array}$$

9.
$$\begin{array}{rl} b^2 \qquad -25 & \underline{\big|\; b-5} \\ \underline{-b^2+5b} & \;\; b+5 \\ 5b-25 & \\ \underline{-5b+25} & \\ 0 & \end{array}$$

10.

$$\begin{array}{rrrrl}
8a^3 & -16a^2 & -4a & +2 & \multicolumn{1}{|l}{2a-3} \\ \cline{5-5}
-8a^3 & +12a^2 & & & 4a^2-2a-5 \\ \cline{1-2}
 & -4a^2 & -4a & & \\
 & 4a^2 & -6a & & \\ \cline{2-3}
 & & -10a & +2 & \\
 & & 10a & -15 & \\ \cline{3-4}
 & & & -13 &
\end{array}$$

11.

$$\begin{array}{rrrl}
y^2 & & -64 & \multicolumn{1}{|l}{y+8} \\ \cline{4-4}
-y^2 & -8y & & y-8 \\ \cline{1-2}
 & -8y & -64 & \\
 & 8y & +64 & \\ \cline{2-3}
 & & 0 &
\end{array}$$

12.

$$\begin{array}{rrrrrl}
m^4 & & & & +625 & \multicolumn{1}{|l}{m-5} \\ \cline{6-6}
-m^4 & +5m^3 & & & & m^3+5m^2+25m+125 \\ \cline{1-2}
 & 5m^3 & & & & \\
 & -5m^3 & +25m^2 & & & \\ \cline{2-3}
 & & 25m^2 & & & \\
 & & -25m^2 & +125m & & \\ \cline{3-4}
 & & & 125m & +625 & \\
 & & & -125m & +625 & \\ \cline{4-5}
 & & & & 1250 &
\end{array}$$

13.

$$\begin{array}{rrrrrrl}
a^5 & & & & & +243 & \multicolumn{1}{|l}{a+3} \\ \cline{7-7}
-a^5 & -3a^4 & & & & & a^4-3a^3+9a^2-27a+81 \\ \cline{1-2}
 & -3a^4 & & & & & \\
 & +3a^4 & +9a^3 & & & & \\ \cline{2-3}
 & & 9a^3 & & & & \\
 & & -9a^3 & -27a^2 & & & \\ \cline{3-4}
 & & & -27a^2 & & & \\
 & & & 27a^2 & +81a & & \\ \cline{4-5}
 & & & & 81a & +243 & \\
 & & & & -81a & -243 & \\ \cline{5-6}
 & & & & & 0 &
\end{array}$$

14. $$\frac{63m^6-27m^4-8m^2}{9m^2}=\frac{63m^6}{9m^2}-\frac{27m^4}{9m^2}-\frac{8m^2}{9m^2}=7m^4-3m^2-\frac{8}{9}$$

15. $$\frac{105a^8-75a^5+45a^4}{15a^3}=\frac{105a^8}{15a^3}-\frac{75a^5}{15a^3}-\frac{45a^4}{15a^3}=7a^5-5a^2-3a$$

J. ***1.*** Para que la división $(x^4 - 2x^3 - 2x^2 + kx - s) \div (x^2 - 2x + 1)$ sea exacta, $k = 6$ y $s = 3$.

2. En la división entre $(2m^4 + m^3 + km - s)$ y $(2m - 3)$ los valores para k y s se pueden expresar así: $k = 2n - 9$, y $s = 3n$, para n cualquier número entero.

Por ejemplo:

si $n = 0$, entonces $k = -9$ y $s = 0$

si $n = 2$, entonces $k = -5$ y $s = 6$

si $n = -5$, entonces $k = -19$ y $s = -15$

R3

Unidad 3 - Respuestas a los ejercicios finales

A. Representar $4x^2+12x$ como producto de factores de tres maneras:

$4x^2+12x=4x(x+3)$, $4x^2+12x=2x(2x+6)$, $4x^2+12x=x(4x+12)$

B. Factorizar (factor común):

1. $9g-3h=3(3g-h)$
2. $12c^3d^4+3cd^3-3cd^2=3cd^2(4c^2d^2+d-1)$
3. $6-2w-3z+wz=(3-w)(2-z)$
4. $m^2-3m^3=m^2(1-3m)$
5. $4x(y-1)+5z(y-1)=(y-1)(4x+5z)$
6. $3ux+3vx-3uy-3vy=3(u+v)(x-y)$
7. $12a^2b^2+2a^3b=2a^2b(6b+a)$
8. $6g(2-a)-5h(2-a)=(2-a)(6g-5h)$
9. $sr+3s+2rt+6t=(r+3)(s+2t)$

C.

1. $y^5-2^5=(y-2)(y^4+2y^3+4y^2+8y+16)$
2. $x^4-1=(x-1)(x^3+x^2+x+1)$
3. $a^3-64=(a-4)(a^2+4a+16)$
4. $y^3+64x^3=(y+4x)(y^2-4xy+16x^2)$
5. $8b^3-1=(2b-1)(4b^2+2b+1)$
6. $x^2-49=(x-7)(x+7)$
7. $y^6+1=(y^2+1)(y^4-y^2+1)$
8. $243+x^5=(3+x)(81-27x+9x^2-3x^3+x^4)$

D.

1. $c^2+c-12=(c+4)(c-3)$
2. $d^2+7d-18=(d-2)(d+9)$
3. $x^2-10-3x=x^2-3x-10=(x+2)(x-5)$

4. $-30 + a + a^2 = a^2 + a - 30 = (a + 6)(a - 5)$
5. $2h^2 - 7h - 15 = (2h + 3)(h - 5)$
6. $12k^2 + 2k - 24 = 2(2k + 3)(3k - 4)$
7. $3s^2 + 7st + 2t^2 = (s + 2t)(3s + t)$
8. $3x^2 + 10xy + 8y^2 = (x + 2y)(3x + 4y)$
9. $-5a^2 + 36ab - 7b^2 = (5a - b)(7b - a)$

E. Factorizar los siguientes trinomios cuadrados perfectos:

1. $x^2 + 14x + 49 = (x + 7)^2$
2. $9x^2 - 24xy + 16y^2 = (3x - 4y)^2$
3. $-30m^2n + 25m^4 + 9n^2 = 25m^4 - 30m^2n + 9n^2 = (5m^2 - 3n)^2$
4. $y^2 - 6y + 9 = (y - 3)^2$
5. $4z^2 + 12z + 9 = (2z + 3)^2$
6. $28a^3b + 49a^6 + 4b^2 = 49a^6 + 28a^3b + 4b^2 = (7a^3 + 2b)^2$

F. Factorizar completamente:

1. $2w^2 - 72 = 2(w - 6)(w + 6)$
2. $xy - 6y + xz - 6z = (x - 6)(y + z)$
3. $-8y^2 + 26y - 15 = (4y - 3)(5 - 2y)$
4. $6y^5 - 54y = 6y(y^2 + 3)(y^2 - 3)$
5. $x^2(y - 3) - 16(y - 3) = (x + 4)(x - 4)(y - 3)$
6. $3z^4 - z^2 - 4 = (z^2 + 1)(3z^2 - 4)$
7. $3s^3 + 81 = 3(s + 3)(s^2 - 3s + 9)$
8. $5x^2 + 10xy + 5y^2 = 5(x + y)^2$
9. $\frac{x^2}{4} - \frac{1}{25} = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{5}\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{5}\right)$
10. $x^3 + \frac{1}{8} = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)$
11. $4b^2c - 7b^2 - 36c + 63 = (b + 3)(b - 3)(4c - 7)$
12. $10x^2 + 19x - 15 = (2x + 5)(5x - 3)$

13. $y - y^3 = y(1 - y)(1 + y)$

14. $x^2y - 2xy + y - 3x^2z + 6xz - 3z = (x - 1)^2(y - 3z)$

G. Simplificar cada expresión racional:

1. $\dfrac{x^2 + 2x}{x^2 - 4} = \dfrac{x}{x - 2}$

2. $\dfrac{3y - 9}{y^2 - 6y + 9} = \dfrac{3}{y - 3}$

3. $\dfrac{x^2 + 7x - 18}{x^2 - 3x + 2} = \dfrac{x + 9}{x - 1}$

4. $\dfrac{x - 1}{1 - x} = -1$

5. $\dfrac{y^2 - 9y + 20}{y^2 + 2y - 35} = \dfrac{y - 4}{y + 7}$

6. $\dfrac{z^2 - 14z + 49}{z^2 - 49} = \dfrac{z - 7}{z + 7}$

7. $\dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1}$

8. $\dfrac{y^3 + 3y^2}{y^2 - 9} = \dfrac{y^2}{y - 3}$

9. $\dfrac{a^2 - 14a + 45}{a^2 - 16a + 63} = \dfrac{a - 5}{a - 7}$

Unidad 4 - Respuestas a los ejercicios finales

A. Resuelva las siguientes ecuaciones:

1. $y = 1$
2. $y = 2$
3. $x = \frac{34}{11}$
4. $m = -\frac{1}{2}$
5. $a = 4$
6. $x = 0.5$
7. $x = -\frac{3}{2}$
8. $a = -4$
9. $x = 0$
10. $n = \frac{2}{3}$
11. La ecuación **no** tiene solución en los reales
12. $y = -\frac{20}{9}$
13. $a = 3$
14. La ecuación tiene infinitas soluciones
15. $m = \frac{18}{17}$
16. La ecuación **no** tiene solución en los reales

B. Verifique si los valores dados son solución de las ecuaciones dadas:

1. $y = 5$ no es solución de $\dfrac{9-12y}{4} = \dfrac{-8y+5}{3}$

$$\begin{aligned} 27 - 36y &= -32y + 20 \\ -36y + 32y &= 20 - 27 \\ -4y &= -7 \end{aligned}$$

La solución es: $y = \dfrac{7}{4}$

2. La solución de la ecuación $\dfrac{4}{b} - \dfrac{3}{2b} = -10$

$$\begin{aligned} \frac{8-3}{2b} &= -10 \\ 5 &= -20b \end{aligned}$$

La solución es: $b = -\dfrac{1}{4}$

C. Verifique si las ecuaciones dadas son equivalentes:

1. $-4x = -2$ **sí** es equivalente a la ecuación

$$\begin{aligned} 2(x-3) + 9x &= -5(4-3x) + 12 \\ 2x - 6 + 9x &= -20 + 15x + 12 \\ 11x - 15x &= -8 + 6 \\ -4x &= -2 \end{aligned}$$

2. La ecuación $20m = 76 - 27m$ **no** es equivalente a

$$\begin{aligned} \frac{4m-11}{3} &= -\frac{7+9m}{5} \\ 20m - 55 &= -21 - 27m \\ 20m &= 34 - 27m \end{aligned}$$

R4

D. Resuelva los siguientes problemas:

1. x : Número de hojas que contiene el paquete

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{4}x\right) + 30 = x$$
$$x = 60$$

El paquete tenía 60 hojas de papel milimetrado

2. y : Precio del artículo antes del aumento

$$y + 0.15y = 5520$$
$$y = 4800$$

El artículo costaba $4800

3. v : velocidad del automóvil B

$v + 25$: velocidad del automóvil A

$4v$: distancia que recorre el auto B

$3(v + 25)$: distancia que recorre el auto A

$$4v = 3(v + 25)$$
$$v = 75$$

La velocidad del auto B es de 75 km/h y la del auto A es 100 km/h.

4. x : Tiempo que emplea la máquina B en producir 200 juguetes

$\frac{1}{8}$: Producción de la máquina A en 1 hora

$\frac{1}{x}$: Producción de la máquina B en 1 hora

$\frac{1}{3}$: Producción en 1 hora cuando trabajan simultáneamente

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{x} = \frac{1}{3}$$
$$x = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}$$

La máquina B emplea 4 horas 48 minutos en producir 200 juguetes.

5. m : *ml* de la primera solución

$240 - m$: *ml* de ácido sulfúrico en la primera solución

$0.65\,(240 - m)$: *ml* de ácido sulfúrico en la segunda solución

0.45×240 : *ml* de ácido sulfúrico en la mezcla

$$\begin{aligned} 0.4m + 0.65\,(240 - m) &= 0.45 \times 240 \\ m &= 192 \end{aligned}$$

La primera solución tiene 192 *ml* y la segunda solución 48 *ml*

6. y : boletas vendidas para mayores de 12 años

$600 - y$: boletas vendidas para menores de 12 años

$$\begin{aligned} 6500y + 3500\,(600 - y) &= 2\,640\,000 \\ y &= 180 \end{aligned}$$

Se vendieron 180 boletas para mayores de 12 años y 420 para menores de 12 años.

E. Halle el valor de la incógnita en cada proporción:

1. $\dfrac{7}{6} = \dfrac{42}{x} \rightarrow 7x = 252 \rightarrow x = 36$

2. $40x = 40 \rightarrow x = 1$

3. $5(7 - y) = 60 \rightarrow 35 - 5y = 60 \rightarrow -5y = 25 \rightarrow y = -5$

4. $\dfrac{x}{12} = \dfrac{25}{20} \rightarrow 20x = 300 \rightarrow x = 15$

5. $12x = 300 \rightarrow x = 25$

6. $4\,(x + 5) = 108 \rightarrow 4x + 20 = 108 \rightarrow 4x = 88 \rightarrow x = 22$

F. Resuelva los siguientes problemas:

1. x : distancia que recorre el deportista en 36 días

$$\frac{345}{9} = \frac{x}{36}$$
$$x = 1380\ km$$

El deportista recorre 1380 *km* en 36 días

2. y : números de contenedores que el equipo monta en 2 horas

$$\frac{7}{20} = \frac{y}{120}$$
$$x = 42$$

El equipo monta 42 contenedores en 2 horas

3. m : minutos que se atrasa el reloj en 4 horas

$$\frac{3}{18} = \frac{m}{45}$$
$$m = \frac{15}{2}$$

El reloj se atrasa 7.5 minutos en 4 horas

4. x : número de estudiantes en la escuela

$$\frac{4}{5} = \frac{x - 375}{375}$$
$$x = 675$$

En la escuela hay 675 estudiantes

5. n : primer número

$128 - n$: segundo número

$$\frac{3}{5} = \frac{n}{128 - n}$$
$$n = 48$$

Los números son 48 y 80

R4

6. c : galones de pintura roja

$$\frac{3}{5} = \frac{25}{c}$$
$$c = \frac{125}{3}$$

Se necesitan $41\frac{2}{3}$ galones de pintura roja

7. $\frac{15}{25} = \frac{x}{y}$

a. $\frac{x}{y} = \frac{3}{5}$ **b.** $\frac{y}{x} = \frac{5}{3}$ **c.** $\frac{x}{x+y} = \frac{3}{8}$

G. Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $y = \pm\frac{13}{6}$

2. $x = -3$

3. $a = \frac{2}{3}$

4. $b = 7$

5. $d_1 = 21$ y $d_2 = -1$

6. No hay solución en R

7. $a = \frac{-2 \pm \sqrt{7}}{3}$

8. $b_1 = \frac{8}{3}$ y $b_2 = \frac{2}{3}$

9. $x = \pm 6$

10. $m_1 = 0$ y $m_2 = -2$

11. No hay solución en R

12. $n = \pm 4$

13. $m = \pm\sqrt{2}$

14. $n_1 = 2$ y $n_2 = -\frac{1}{3}$

15. $y_1 = 0$ y $y_2 = \frac{5}{8}$

16. $y_1 = \frac{4}{7}$ y $y_2 = \frac{3}{7}$

17. $n_1 = -2$ y $n_2 = -1$

18. No hay solución en R

19. $m_1 = 2$ y $m_2 = -\frac{1}{2}$

20. $a_1 = -1$ y $a_2 = -\frac{5}{2}$

21. $m_1 = 4$ y $m_2 = \frac{2}{3}$

22. $a_1 = -\frac{4}{5}$ y $a_2 = -\frac{17}{10}$

23. $x_1 = -9$ y $x_2 = 3$

24. No hay solución en R

25. $d_1 = -3$ y $d_2 = \frac{2}{5}$

26. $y = \pm 1$

27. $c_1 = -\frac{5}{2}$ y $c_2 = \frac{2}{3}$

28. $y = \frac{7 \pm \sqrt{41}}{2}$ $y_1 \approx 6.70$ $y_2 \approx 0.30$

29. $m = -\frac{3}{5}$

30. $y_1 = 4$ y $y_2 = 3$

H. En cada ítem, consiga una ecuación de segundo grado que cumpla las condiciones correspondientes:

1. $x^2 - 2x - 3 = 0$
2. $9m^2 - 24m + 16 = 0$
3. $4y^2 - 9 = 0$

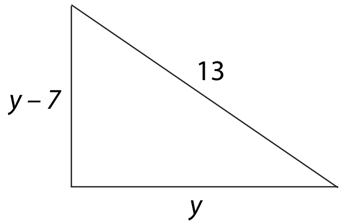
I . Solución a los problemas

1. y : *longitud de un cateto*

$y - 7$: longitud del otro cateto

$$y^2 + (y-7)^2 = 13^2$$
$$y = 12$$

Los catetos miden 12 *cm* y 5 *cm*



2. Vc : velocidad de la corriente

$$12 - Vc = \frac{21}{t} \text{ y } 12 + Vc = \frac{45}{6-t}$$

Se despeja Vc en ambas ecuaciones y se igualan

$$12t^2 - 60t + 63 = 0$$
$$t_1 = \frac{7}{2} \text{ o } t_2 = \frac{3}{2}$$

Si $t_1 = \frac{7}{2}$ entonces $Vc = 6$ *km/h*.

La velocidad de la corriente es 6 *km/h*

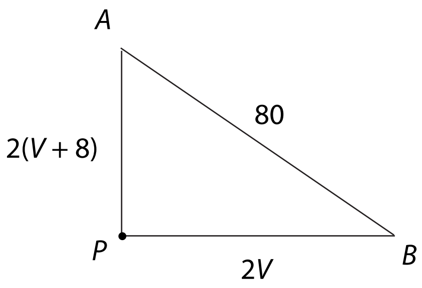
¿Qué sucede con la segunda solución $t_2 = \frac{3}{2}$?

3. V : velocidad de*l tren* **B** $\rightarrow$ $d_1 = 2V$

$V + 8$: velocidad del tren **A** $\rightarrow$ $d_2 = 2(V+8) = 2V + 16$

$$80^2 = (2V)^2 + (2V+16)^2$$
$$V^2 + 8V - 768 = 0$$
$$V = 24$$

El tren **B** viaja a 24 *km/h* y el tren **A** lo hace a 32 *km/h*.



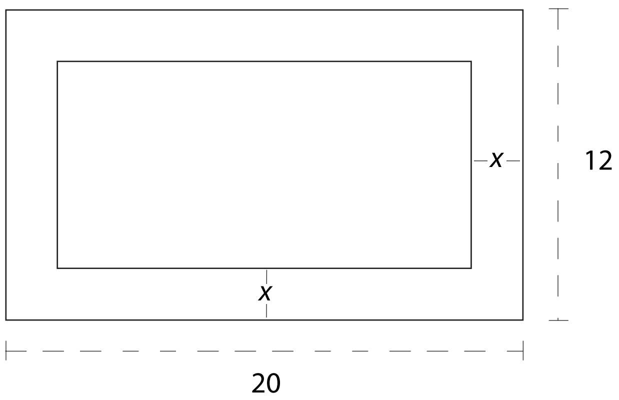
4. x : número

$$3x^2 - 12x = 231$$

$$x_1 = 11 \quad \text{o} \quad x_2 = -7$$

El número es 11 o −7

5. x : ancho del marco



$20 - 2x$: largo de la pintura

$12 - 2x$: ancho de la pintura

$$(20 - 2x)(12 - 2x) = 128$$

$$x_1 = 14 \quad \text{o} \quad x_2 = 2$$

El ancho del marco sólo puede medir $x = 2\ cm$

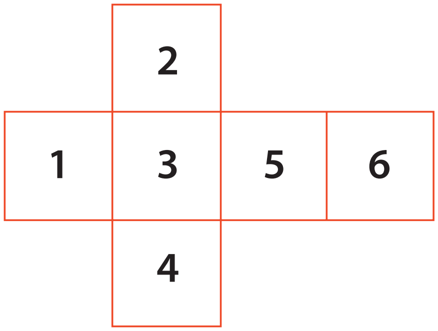
ANEXO 3

PROBLEMAS DE RAZONAMIENTO LÓGICO

Problemas de razonamiento lógico

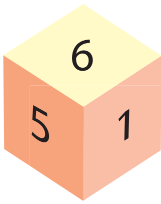
1. Suponga que lo han enviado por agua al río con dos baldes sin marca alguna, con capacidad para 7 y 3 galones, respectivamente. ¿Cómo puede llevar exactamente 5 galones de agua a casa?

2. A continuación se muestra una caja desdoblada:

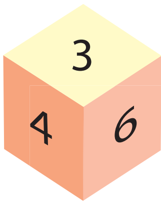


¿Cuál de las figuras muestra la caja una vez doblada?

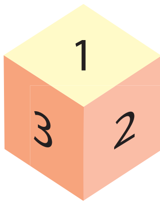
A:



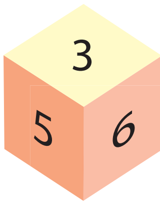
B:



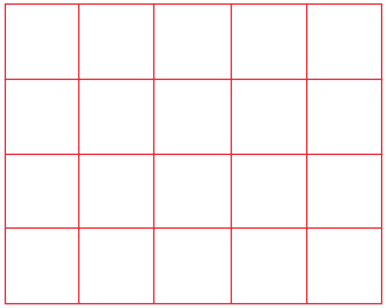
C:



D:



3. ¿Cuántos rectángulos hay en la figura?



4. Suponga que tiene ocho monedas de las cuales siete son auténticas y una falsa, cuyo peso es un poco menor que las demás. Tiene también una balanza de dos brazos que puede utilizar solamente tres veces.

¿Cómo encuentra la moneda falsa en tres pesajes? ¿Cómo la encuentra en sólo dos pesajes?

5. Eva le dijo a Adán: «Si me das un dólar, tendremos la misma cantidad de dinero». Adán le contestó: «Si tú me das un dólar, tendré el doble del dinero que te queda». ¿Cuánto dinero tiene cada uno?

6. Observe la siguiente secuencia de operaciones y compare las dos columnas de modo que le permita encontrar los números que van en las casillas sin necesidad de utilizar la calculadora:

$3^2 = 9$	$2 \times 4 = 8$
$4^2 = 16$	$3 \times 5 = 15$
$5^2 = 25$	$4 \times 6 = 24$
$81^2 = 6561$	$80 \times 82 = \boxed{}$

$92^2 = \boxed{}$ $\qquad$ $91 \times 93 = 8463$

$\boxed{}^2 = 15\,625$ $\qquad$ $124 \times 126 = 15\,624$

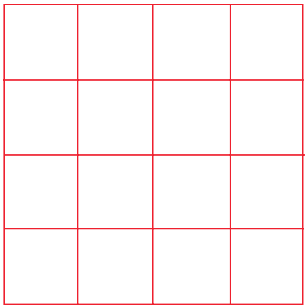
7. ¿Cuál es el centésimo dígito en la representación decimal de $\frac{1}{7}$?

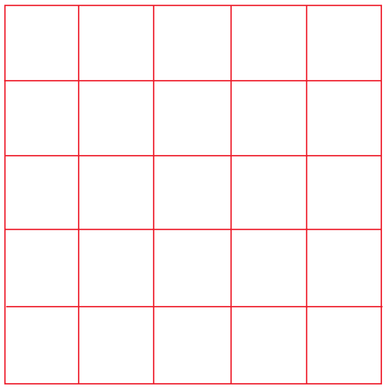
8. Complete la siguiente tabla

$$1 =$$
$$3 + 5 =$$
$$7 + 9 + 11 =$$
$$13 + 15 + 17 + 19 =$$

Utlicie lo anterior para hallar la suma: $43 + 45 + 47 + 49 + 51 + 53 + 55$, sin usar la calculadora.

9. ¿Cuál es el mínimo número de reinas que se necesita colocar en un tablero de ajedrez de 4×4, de 5×5, de manera que ocupen o controlen todos los cuadros del tablero?





10. Escriba los resultados:

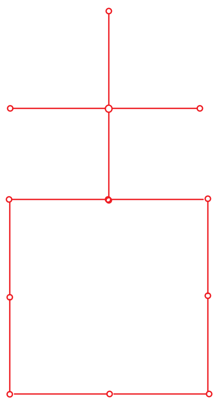
$$12\,345\,679 \times 9 =$$
$$12\,345\,679 \times 18 =$$
$$12\,345\,679 \times 27 =$$

Sin utilizar la calculadora, halle el número que multiplicado por 12 345 679 da como resultado 888 888 888.

11. Un cajón contiene 20 medias blancas y 20 negras. Si el cuarto está oscuro y usted mete la mano al cajón para sacar un par del mismo color, ¿cuál es el número mínimo de medias que debe sacar para lograr su propósito?

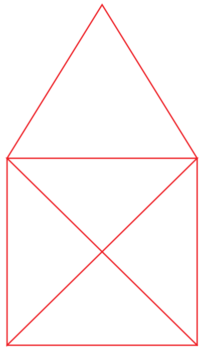
12. Coloque diez monedas del mismo valor en fila. Un movimiento de un juego con estas monedas consiste en coger una, saltar dos y ponerla sobre la tercera. Muestre cómo se podrían hacer cinco grupos de dos monedas cada uno, ubicados a igual distancia uno del otro, en solo cinco movimientos.

13. Cada segmento representa un palito. Mueva cinco palitos solamente de modo que queden tres cuadrados iguales.



14. Varios soldados deben cruzar un río profundo en un punto donde no hay puente. Los soldados descubren a dos niños que juegan en un pequeño bote de remos. Con ayuda de ellos los soldados pudieron atravezar el río en ese bote, el cual tenía capacidad para llevar como mucho a un soldado. ¿Cómo lo lograron?

15. Dibuje la siguiente figura sin despegar el lápiz de la hoja y sin trazar dos veces la misma línea.



16. A continuación aparece una lista de igualdades.

$$3 = \frac{3\,(2)}{2}$$

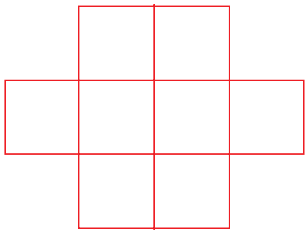
$$3 + 6 = \frac{6\,(3)}{2}$$

$$3 + 6 + 9 = \frac{9\,(4)}{2}$$

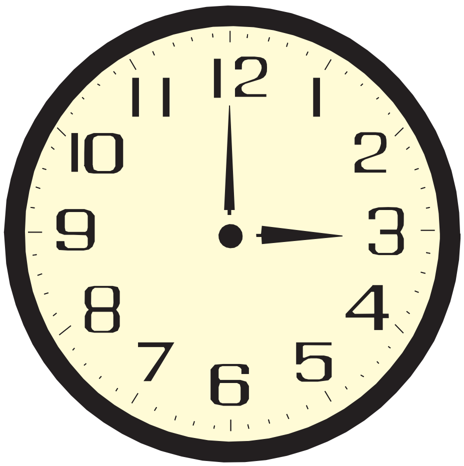
Sin utilizar la calculadora,

¿cuál es el resultado de sumar: $3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18 + 21 + 24 + 27$?

17. Coloque los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 en cada cuadro de modo que los cuadros que compartan esquina no contengan dígitos sucesivos.

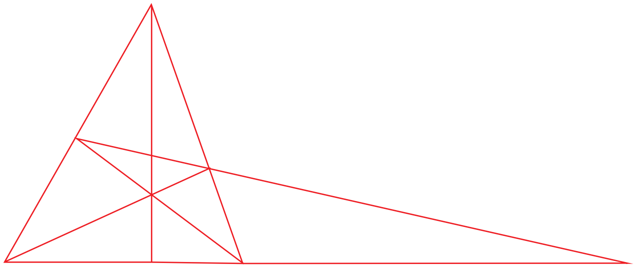


18. Por medio de tres rectas, divida el reloj en tres secciones tales que la suma de los números en cada región sea la misma.



19. Escoja un dígito diferente de 0; multiplíquelo por 273; luego multiplique el resultado por 407. Realice el ejercicio con dígitos diferentes, observe el resultado en cada caso y explique la razón de estos resultados.

20. ¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura? Encuentre una manera de contarlos sin olvidar alguno.



21. Complete el cuadrado mágico siguiente de tal manera que cada número desde el 1 hasta el 16 (1 , 2 , 3 , 4 , …… 15 , 16), se use sólo una vez y la suma de cada renglón, columna y diagonal sea 34.

6			**9**
	15		
11		**10**	
16			

22. Considere la fecha de su nacimiento y organícela en un solo número; por ejemplo: 17 de febrero de 1785, el número sería 17 021 785. Reordene, en la forma que quiera, las cifras y forme un nuevo número; por ejemplo: 87 015 027. Reste los dos números, el menor del mayor, 87 015 027 – 17 021 785, sume las cifras del resultado que obtiene de la resta. Repita el proceso con otras fechas de nacimiento. ¿Puede concluir algo respecto a los resultados obtenidos de la diferencia?

ANEXO 4

PRUEBA DE CONOCIMIENTO

Prueba de conocimiento

Preguntas de selección múltiple con única respuesta

1. Al efectuar las operaciones en la expresión $-4^2 + \dfrac{3 \cdot (6-10)}{2} - (25 \div (-5))$, se obtiene:

A. -27

B. -17

C. 15

D. 17

2. $\left(\dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{3}\right) \div \left(1\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}\right)$ es igual a:

A. $\dfrac{4}{105}$

B. $\dfrac{4}{15}$

C. $\dfrac{15}{2}$

D. $\dfrac{4}{3}$

3. Al simplificar $\left(\frac{5}{4} \cdot \frac{-6}{21} \cdot \frac{28}{15}\right) + \left(\frac{-7}{3} \div \frac{14}{5}\right)$, se obtiene:

A. $-\frac{3}{2}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $-\frac{9}{10}$

D. $\frac{6}{21}$

4. Al simplificar $-4 \cdot (7 - 15) - 16 \div (-3 + 7) - 6 + 5 \cdot (-2)$, se obtiene:

A. 54

B. 12

C. $-\frac{8}{3}$

D. -24

5. Al simplificar $4 + 7 \cdot (-2) - 3^2 + 6 - 15 \div 5 + 11$, se obtiene:

A. 3

B. -17

C. -5

D. 13

6. María recibe el 12% del dinero de las ventas que realiza. ¿Cuánto tendrá que vender para ganar \$4800?

A. \$44 800

B. \$40 000

C. \$57 700

D. \$576

7. Si se obtiene 1 al simplificar la expresión: $(a^2 b^3)^{-4}(a^6 b)(a^x b^{11})$, entonces, $x =$:

A. 0

B. 2

C. -2

D. 3

8. Al simplificar la expresión: $(2a)^{\frac{1}{2}}(8a)^{\frac{1}{2}}$, se obtiene:

A. $8a^2$

B. $4a$

C. $8a$

D. $16a^2$

9. "Tres veces un número sumado con el doble de la resta de cinco veces el número y trece." Si ***x*** representa el número, la expresión anterior corresponde a:

A. $3x + 2 \cdot 5x - 13$

B. $3x + 2\,(5x - 13)$

C. $3x + (5x - 13)$

D. $3x + 2(13 - 5x)$

10. Juan tiene 5 sombreros menos que María y Clarisa 3 veces el número de sombreros de Juan. Si María tiene ***n*** sombreros, ¿cuál de las siguientes expresiones representa el número de sombreros que tiene Clarisa?

A. $5 - 3n$

B. $3(n - 5)$

C. $3n - 5$

D. $3n$

11. Al simplificar $2(4(a-b)+3a)+(3b-2(4a+b))$, se obtiene:

A. $19a-3b$

B. $6a-7b$

C. $22a-9b$

D. $16a-7b$

12. Al restar $(7x^2-5x-3)$ de $(4x^2+2x-8)$, se obtiene:

A. $3x^2-7x+5$

B. $-3x^2-3x-11$

C. $11x^2-3x-11$

D. $-3x^2+7x-5$

13. La expresión algebraica $\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}y\right)-\left(\frac{4}{3}x-\frac{3}{5}y\right)$, equivale a:

A. $\frac{5}{3}x+\frac{1}{5}y$

B. $x-y$

C. $y-x$

D. $-\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y$

14. Al restar: $\left(\frac{2}{3}a+\frac{3}{2}b-\frac{5}{6}\right)-\left(\frac{5}{3}a-\frac{2}{5}b+\frac{1}{4}\right)$, se obtiene:

A. $-a+\frac{19}{10}b-\frac{13}{12}$

B. $-a+\frac{19}{10}b+\frac{13}{12}$

C. $a-\frac{19}{10}b-\frac{13}{12}$

D. $a+\frac{19}{10}b+\frac{13}{12}$

15. De la suma de $3x^2 + 5x - 3$ con $4x^2 - 3x + 6$, se resta $2x^2 - 4x + 8$. El polinomio que se obtiene es:

A. $9x^2 - 2x + 11$

B. $-5x^2 - 6x + 5$

C. $-9x^2 + 2x + 11$

D. $5x^2 + 6x - 5$

16. El desarrollo del producto $(4m + 2n)(4m - 2n)$ es:

A. $16m^2 + 8mn - 4n^2$

B. $4m^2 + 2n^2$

C. $4m^2 - 16mn + 2n^2$

D. $16m^2 - 4n^2$

17. Al realizar el producto $\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{5}\right)\left(\frac{x}{3} - \frac{y}{5}\right)$ el resultado es:

A. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25}$

B. $\frac{x^2}{9} - \frac{2}{15}xy - \frac{y^2}{25}$

C. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25}$

D. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5}$

18. El desarrollo de $(2a^2 + 5b)^2$ es:

A. $2a^4 + 5b^2$

B. $2a^4 + 10a^2b + 5b^2$

C. $4a^4 + 20a^2b + 25b^2$

D. $4a^4 - 10a^2b + 25b$

19. Del resultado obtenido al efectuar $(x - 3)(x^2 + 4x + 12)$, es falso que:

A. tiene 4 términos

B. el coeficiente de x^3 es 1

C. el grado es 3

D. el coeficiente de x^2 es 1

20. Simplificando la expresión $(2x + 4)(x - 3) - (x + 1)(x + 2)$ se llega a:

A. $x^2 - 14$

B. $x^2 - 5x - 14$

C. $2x^2 + x - 2$

D. $-x^2 + 5x + 2$

21. De la división $(x^3 + 2x^2 + 2x + 1) \div (x + 2)$, señale el enunciado que es falso:

A. el cociente es $x^2 + 2$

B. el residuo es 4

C. el grado del dividendo es 3

D. el coeficiente de x en el cociente es 0

22. Al simplificar $(a - 2b)^2 - (a + 2b)(a - 2b)$, se obtiene:

A. $8b^2 - 4ab$

B. $-8b^2$

C. $4a^4 - 8b^4$

D. $2a^2 - 4ab + 8b^2$

23. Si $x = 2$, el valor numérico de $\frac{7x + 4}{5x - 4}$ es:

A. 2

B. 3

C. -1

D. $\frac{11}{9}$

24. La expresión $4a^2 - 81b^4$, factorizada equivale a:

A. $(2a - 9b^2)(2a - 9b^2)$

B. $(4a - 81b^4)(a + 1)$

C. $(2a - 9b^2)(2a + 9b^2)$

D. $(2a^2 - 27b^2)(2 + 3b^2)$

25. Al factorizar la expresión $\frac{2}{9}a^3 - \frac{2}{25}ab^2$, se obtiene:

A. $2a\left(\frac{1}{3}a - \frac{1}{5}b\right)\left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{5}b\right)$

B. $2a^2\left(\frac{1}{3}a - \frac{1}{5}b\right)\left(\frac{1}{3}a - \frac{1}{5}b\right)$

C. $2a\left(\frac{1}{9}a - \frac{1}{25}b\right)(a + b)$

D. $a\left(\frac{2}{3}a - \frac{1}{5}b\right)\left(\frac{1}{3}a - \frac{2}{5}b\right)$

26. Una factorización de $27x^3 + 8y^3$ es:

A. $(3x + 2y)(9x^2 + 12xy + 4y^2)$

B. $(9x^2 + 4y^2)(3x + 2y)$

C. $(27x + 8y)(x^2 - 2xy + y^2)$

D. $(3x + 2y)(9x^2 - 6xy + 4y^2)$

27. Una factorización de la expresión $12x^3 - 36x^2 - 120x$, es:

A. $12(x^2 + 2)(x - 5)$

B. $12x(x + 2)(x - 5)$

C. $2x(x + 6)(x - 10)$

D. $2x(x - 2)(x + 5)$

28. Al factorizar completamente la expresión $8a^2 + 2ab - 15b^2$, se obtiene:

A. $(4a - 5b)(2a - 3b)$

B. $(4a - 5b)(2a + 3b)$

C. $(4a + 5b)(2a - 3b)$

D. $(4a + 5b)(2a + 3b)$

29. La factorización completa de $4x^4 - 16x^3 - 84x^2$, es:

A. $4x^2(x - 3)(x + 7)$

B. $x^2(4x - 21)(x + 4)$

C. $4x^2(x - 1)(x + 21)$

D. $2x^4(x + 3)(x - 7)$

30. Al simplificar $\dfrac{ac - 3ad + 2bc - 6bd}{2ac + bc - 6ad - 3bd}$, se obtiene:

A. $\dfrac{c + 3d}{12a + b}$

B. $-\dfrac{a - 2b}{2a - b}$

C. $\dfrac{a + 2b}{c - 3d}$

D. $\dfrac{a + 2b}{2a + b}$

31. Al simplificar $\dfrac{18m^3 - 3m^2 - 6m}{4m^2 - 1}$, se obtiene:

A. $\dfrac{3m(2m-1)(3m-2)}{2m+1}$

B. $\dfrac{(2m+1)^2(3m-2)}{2m-1}$

C. $\dfrac{(3m-2)}{2m+1}$

D. $\dfrac{3m(3m-2)}{2m-1}$

32. El resultado de simplificar $\dfrac{2x^2 - 7xy + 6y^2}{x^2 + 5xy - 14y^2}$, es:

A. $\dfrac{(2x-3y)(x-2y)}{x+7y}$

B. $\dfrac{2x-3y}{x+7y}$

C. $\dfrac{2x+3y}{x+7y}$

D. $\dfrac{2x-3y}{x-7y}$

33. El área A de un triángulo de base b y altura h es $A = \dfrac{b \cdot h}{2}$. Por tanto, $h =$:

A. $\dfrac{A+2}{b}$

B. $2A - b$

C. $\dfrac{2A}{b}$

D. $\dfrac{b}{2} + A$

34. Al resolver la ecuación $7(y+1)-11=5(y+1)+2$, se obtiene $y=$:

A. $\frac{11}{2}$

B. $\frac{11}{12}$

C. $\frac{13}{2}$

D. $\frac{1}{4}$

35. La solución de la ecuación $1-2(3x-1)-4(2-x)=5-3(4x-2)$, es:

A. $\frac{3}{7}$

B. $\frac{8}{5}$

C. $-\frac{8}{3}$

D. $\frac{11}{5}$

36. La solución de la ecuación $\frac{x-1}{3}=\frac{2x-7}{5}$, es $x=$:

A. $-\frac{16}{11}$

B. $\frac{26}{11}$

C. 26

D. 16

37. La suma de tres enteros consecutivos es 17 menos que 4 veces el menor. Los números son:

A. 10, 11, 12

B. 20, 21, 22

C. 18, 19, 20

D. 22, 23, 24

38. El costo de una llamada de larga distancia es de \$1800 para los 3 primeros minutos y de \$500 por cada minuto adicional o fracción de minuto. Teniendo en cuenta esta información, es falso que:

A. si la llamada duró 8 minutos el costo fue de \$4300

B. la expresión que representa el costo de una llamada que dura x minutos, para $x > 3$ es $C = 500\,(x - 3) + 1800$

C. si la llamada dura 9.5 minutos el costo es de \$5050

D. para una llamada que dure 2 minutos se debe pagar \$1000

39. Si el precio del cobre es \$1300 la libra y el precio del zinc es \$600 la libra, ¿cuántas libras de ambos deben mezclarse para obtener 70 libras de bronce, el cual se vende a \$900 la libra? (Al fundir cobre y zinc se obtiene bronce).

A. 40 libras de cobre y 30 libras de zinc

B. 35 libras de cobre y 35 libras de zinc

C. 20 libras de cobre y 50 libras de zinc

D. 30 libras de cobre y 40 libras de zinc

40. La ecuación $27a^2 - 36a = -12$, tiene como solución:

A. $a = \dfrac{3}{2}$

B. $a = \dfrac{2}{3}$

C. $a = -\dfrac{9}{4}$

D. $a = -\dfrac{3}{2}$

41. Los valores que satisfacen la ecuación $7t = t^2 - 30$, son:

A. $t = -10$ y $t = 3$

B. $t = 11$ y $t = -5$

C. $t = 6$ y $t = -5$

D. $t = 10$ y $t = -3$

42. De la ecuación cuadrática $3x^2 - 5x = 9$, es correcto afirmar que:

A. no tiene soluciones en los reales

B. tiene una única solución, $x = 3$

C. tiene dos soluciones enteras, $x_1 = 27$ y $x_2 = 5$

D. tiene dos soluciones enteras, $x_1 = \dfrac{5 + \sqrt{133}}{6}$ y $x_2 = \dfrac{5 - \sqrt{133}}{6}$

43. Una caja fuerte tiene 5 cm de altura; el largo de la caja es 5 cm más que el ancho. Si su volumen es de 1500 cm^3, las medidas del largo y ancho son respectivamente.

A. 15 cm y 10 cm

B. 20 cm y 15 cm

C. 25 cm y 20 cm

D. 30 cm y 25 cm

Bibliografía

ÁNGEL, Allen R. *Álgebra intermedia*, Editorial Pearson, sexta edición, 2004.

BELLO, Ignacio. *Álgebra*, México, Thompson Editores, 2004.

BOLT, Brian. *Divertimientos matemáticos*, Barcelona, Editorial Labor, primera edición, 1987.

COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. *¿Qué son las matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales*, México, Fondo de Cultura Económica, 2002.

GARDNER, Martín. *¡Ajá!, paradojas. Paradojas que hacen pensar*, Barcelona, Editorial Labor, tercera edición, 1983.

MANKIEWICZ, Richard. *Historia de las matemáticas*, Barcelona, Ediciones Paidós, 2000.

MILLER, Charles y otros. *Matemáticas: razonamiento y aplicaciones*, Pearson Adison Wesley, décima edición, 2006.

POSAMENTIER, Alfred S. *Math wonders to inspire teachers and students*, ASCD, 2003.

TUSSY, Alan. *Matemáticas básicas para universitarios*, Editorial Thompson, tercera edición, 2007.

Universidad de Bogotá
JORGE TADEO LOZANO
www.utadeo.edu.co