

Pensamiento Matemático



MARIO PÉREZ RUIZ
ADELINA OCAÑA GÓMEZ



UNIVERSIDAD DE BOGOTÁ
JORGE TADEO LOZANO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES E INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

Pensamiento Matemático

MARIO PÉREZ RUIZ
ADELINA OCAÑA GÓMEZ



UNIVERSIDAD DE BOGOTÁ
JORGE TADEO LOZANO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES E INGENIERÍA • DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

Pérez Ruiz, Mario Ernesto
Pensamiento matemático / Mario Pérez Ruiz, Adelina Ocaña Gómez
– Bogotá: Universidad de Bogotá Jorge Tadeo
Lozano. Facultad de Ciencias Naturales e Ingeniería. Departamento de
Ciencias Básicas, 2013.
424 p.; 22 cm.

ISBN: 978-958-725-113-5

1. MATEMÁTICAS. 2. FUNCIONES. 3. LOGARITMOS I. Ocaña
Gómez, Adelina. II. tit.

CDD510”p438”

Fundación Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano
Carrera 4 N° 22-61 – PBX: 242 7030 – www.utadeo.edu.co

PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Mario Ernesto Pérez Ruiz

Adelina Ocaña Gómez

ISBN: 978-958-725-113-5

© Fundación Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano
2013

RECTORA: Cecilia María Vélez White

VICERRECTOR ACADÉMICO: Diógenes Campos Romero

DECANO DE LA FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES E INGENIERÍA: Daniel Bogoya Maldonado

DIRECTOR DEL DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS: Favio Ernesto Cala Vitery

DIRECTOR EDITORIAL (E): Jaime Melo Castiblanco

COORDINACIÓN EDITORIAL Y REVISIÓN DE ESTILO: Henry Colmenares Melgarejo

CONCEPTO GRÁFICO, DISEÑO, DIAGRAMACIÓN Y PORTADA: Luis Carlos Celis Calderón

FIGURAS Y TABLAS: Adelina Ocaña Gómez

EDICIÓN DE FÓRMULAS: Francisco Jiménez Montero

Prohibida la reproducción total o parcial por cualquier medio sin autorización escrita de la Universidad.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen la colaboración recibida por los profesores del Área de Matemáticas de la Universidad Jorge Tadeo Lozano, tanto de tiempo completo como de cátedra, quienes al implementar la propuesta del presente texto durante los años 2011 y 2012, dieron apoyo y retroalimentación significativos.

PRESENTACIÓN

Pensamiento Matemático es un texto de matemáticas que cubre temas usualmente incluidos en libros del área de precálculo, con la intención de consolidar el lenguaje matemático básico que requieren la mayoría de las profesiones y de servir como preparación para el cálculo.

El título *Pensamiento Matemático* responde a la aceptación generalizada de que “el centro de atención de la educación matemática es el desarrollo del pensamiento matemático, entendiendo *pensamiento* como la unidad de procesos y contenidos”.¹ Dentro de estos procesos generales de pensamiento (razonamiento, resolución y planteamiento de problemas, comunicación, modelación y elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos), se ha puesto de relieve el proceso de *modelación*, articulado con el concepto de *función* (concepto unificador del curso).

El libro se divide en cuatro unidades, con sus respectivas secciones. En la primera unidad se incluyen aspectos generales de las funciones, la Función Lineal, Funciones a Trozos, Transformaciones, Operaciones y Composición de funciones. En la segunda unidad se presenta el estudio de las Funciones Cuadráticas, Polinomiales y Racionales. En la tercera unidad se encuentran las Funciones Exponenciales y Logarítmicas, y finalmente en la cuarta unidad se desarrollan los contenidos relacionados con las Funciones Trigonométricas. En algunas secciones se introducen los contenidos con una *actividad inicial*, que busca motivar el estudio de los conceptos incluidos en la unidad; posteriormente se realiza una descripción de los conceptos, apoyados con ejemplos, gráficas, actividades a desarrollar y ejercicios y problemas que afiancen los contenidos tratados.

1. Serie Cuadernos de Currículo. Orientaciones curriculares para el campo de *Pensamiento Matemático*, Alcaldía Mayor de Bogotá, Secretaría de Educación, 2007.

El texto busca, de igual manera, facilitar la transición a textos de matemáticas que emplean un lenguaje más formal. Al leer detenidamente cada uno de los párrafos, generalmente breves, y escribir en los espacios en blanco el desarrollo de las actividades correspondientes, se espera conseguir poco a poco dicho objetivo. La importancia de una clara comprensión de los conceptos sin descuidar las destrezas operativas, las cuales van de la mano, son aspectos a tener en cuenta durante todo el desarrollo del curso.

El uso de la *tecnología* para agilizar el cálculo y la representación gráfica de diferentes expresiones, con el fin de dar paso a las interpretaciones a que den lugar los problemas y las ecuaciones, es un punto al que se quiere dar énfasis a lo largo del libro.

De esta manera el presente texto pretende apoyar el desarrollo de procesos relacionados con la lectura y la escritura, al igual que mejorar en la interpretación y argumentación al enfrentar situaciones problema que se presenten.

CONTENIDO

Unidad 1

Sección 1.1 Generalidades de la Función	15
1.1.1 Formas de representar o describir una función	21
1.1.2 Gráficas en el plano cartesiano que son gráficas de funciones	29
Ejercicios	31
Sección 1.2 Intervalos donde una Función es Creciente, Decreciente o Constante	41
Ejercicios	46
Sección 1.3 Función Lineal	49
Ejercicios	56
Sección 1.4 Funciones Definidas a Trozos	63
Ejercicios	71
Sección 1.5 Transformaciones de Funciones	77
1.5.1 Desplazamientos verticales	79
1.5.2 Desplazamientos horizontales	82
1.5.3 Reflexión de una gráfica en los ejes coordenados	84
1.5.4 Alargamiento o compresión vertical	89
1.5.5 Alargamiento o compresión horizontal	93
1.5.6 Transformaciones sucesivas	99
Ejercicios	104
Sección 1.6 Operaciones con Funciones	111
Ejercicios	115
Sección 1.7 Composición de Funciones	119
Ejercicios	129
Ejercicios Finales de la Unidad 1	133

Unidad 2

Sección 2.1 Funciones Cuadráticas	145
2.1.1 Gráficas de las funciones cuadráticas	149
2.1.2 Forma general y forma estándar	157
Ejercicios	164
2.1.3 Problemas de aplicación	167
Problemas	171
Sección 2.2 Funciones Polinomiales	175
2.2.1 Gráficas de funciones potencia	179
2.2.2 Gráficas de funciones obtenidas por transformaciones de funciones potencia	181
Ejercicios	186
2.2.3 Bosquejando la gráfica de una función polinomial	187
Ejercicios	199
Sección 2.3 Funciones Racionales	203
2.3.1 Gráficas de funciones racionales $h(x) = \frac{1}{x}$	206
2.3.2 Transformaciones de la función	211
2.3.3 Asíntotas oblicuas	222
Ejercicios	229
Ejercicios Finales de la Unidad 2	233

Unidad 3

Sección 3.1 Funciones Uno a Uno y sus Inversas	243
Ejercicios	258
Sección 3.2 Funciones Exponenciales	263
Ejercicios	272
Sección 3.3 Interés Compuesto	277
Ejercicios	281
Sección 3.4 Interés Compuesto Continuo	283
Ejercicios	286
Sección 3.5 Dinámica de Poblaciones y Desintegración Radiactiva	287
3.5.1 Dinámica de poblaciones	288
3.5.2 Desintegración radiactiva	290
Problemas	292
Sección 3.6 Logaritmos	295
3.6.1 Valores logarítmicos especiales	297
Ejercicios	298
3.6.2 Logaritmos decimales	300
3.6.3 Propiedades de los logaritmos	300
Ejercicios	307
Sección 3.7 Función Logarítmica	311
Ejercicios	315
Sección 3.8 Ecuaciones Exponenciales y Logarítmicas	317
Ejercicios	321
Sección 3.9 Otros Modelos con Funciones Exponenciales y Logarítmicas	323
3.9.1 Dinámica de poblaciones (segunda parte)	323
3.9.2 Desintegración radiactiva (segunda parte)	325
3.9.3 Ley de enfriamiento de Newton	327
3.9.4 Escalas logarítmicas	329
3.9.4.1 Escala de Richter	329

3.9.4.2 Escala del pH	331
Problemas	333
Ejercicios Finales de la Unidad 3	337

Unidad 4

Sección 4.1 Funciones Periódicas	345
Ejercicios	353
Sección 4.2 Funciones Circulares	355
4.2.1 Las funciones seno y coseno	357
4.2.2 Gráfica de las funciones seno y coseno	361
4.2.3 Funciones sinusoidales	362
Ejercicios	365
Sección 4.3 Funciones definidas con el Seno y Coseno	367
4.3.1 Gráfica de la función tangente	368
4.3.2 Las funciones secante, cosecante y cotangente	371
4.3.3 Funciones inversas	372
Ejercicios	375
Sección 4.4 Funciones Trigonométricas	379
4.4.1 Semejanza de triángulo	386
4.4.2 Trigonometría de los triángulos rectángulos	388
4.4.3 Problemas de aplicación	392
Problemas	397
4.4.4 Ley de los senos	398
Problemas	403
4.4.5 Ley de los cosenos	405
Problemas	409
Ejercicios Finales de la Unidad 4	410
Anexo	415
Funciones Pares - Funciones Impares	415
Bibliografía	421

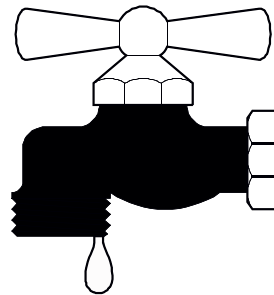
UNIDAD

1

1.1 GENERALIDADES DE LA FUNCIÓN

ACTIVIDAD INICIAL

ESCAPE DE AGUA



El goteo permanente de una llave, un escape en la cisterna de un baño, generan pérdida de agua.



Describa un procedimiento para estimar la cantidad de agua que se pierde debido a una llave que gotea.



¿Cómo calcularía el correspondiente costo en dinero?

Pensamiento Matemático

Se recoge el agua que gotea de una llave en un recipiente con una capacidad de trece litros el cual contiene inicialmente tres litros de agua; se observa que cada hora se recogen dos litros de agua.



Añada una pregunta a la situación anterior que la convierta en un problema.



Complete los valores de volumen de agua en el recipiente correspondientes a los valores de tiempo indicados en la tabla 1:

Tiempo (t) (horas)	Volumen (v) (litros)
0	
1	
2	
3.5	
	13

Tabla 1



¿Qué interpretación le da al último renglón de la tabla?

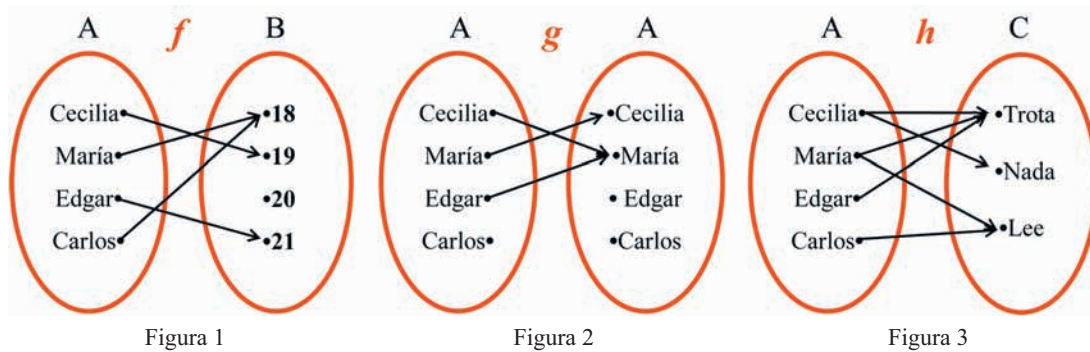
Situación 1

Cecilia, María, Carlos y Edgar son jóvenes que ingresan a trabajar a una empresa. Alguna información relacionada con ellos se encuentra en las figuras 1, 2 y 3 por medio de las *correspondencias* f , g y h , donde:

f indica las edades, en años.

g indica quién le envía correo a quién después de la reunión.

h indica las actividades que realizan.



De los **diagramas de flechas** de las figuras 1, 2 y 3 observamos que Cecilia, por ejemplo, tiene 19 años, le envió un correo a María, le gusta ir a nadar y trotar. En el lenguaje de las correspondencias decimos que en la correspondencia f , a Cecilia le corresponde el 19 (o que la **imagen** de Cecilia por la correspondencia f es 19); en g , a Cecilia le corresponde María y en h , a Cecilia le corresponde nadar y trotar.

Las correspondencias que estudiaremos en este curso son del tipo que se define a continuación.

Una correspondencia f de un conjunto A en un conjunto B que asigna a cada elemento de A un único elemento de B , es una **función**.

De las correspondencias entre los conjuntos de las figuras 1, 2 y 3 tenemos que:

f es función de A en B pues a cada elemento de A le corresponde un solo elemento de B .

g no es función de A en A porque a Carlos no le corresponde algún elemento en A .

h no es función de A en C pues a Cecilia le corresponde más de un elemento en C .



¿Cuáles de las correspondencias señaladas en las figuras 4, 5, 6 y 7 son funciones de D en E?

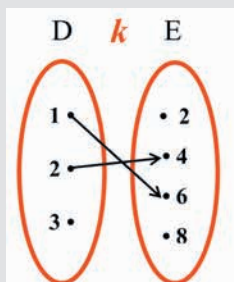


Figura 4

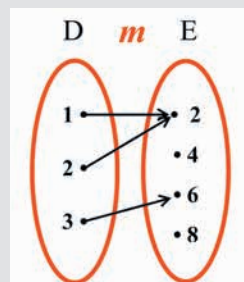


Figura 5

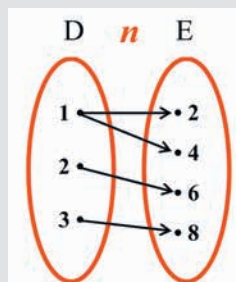


Figura 6

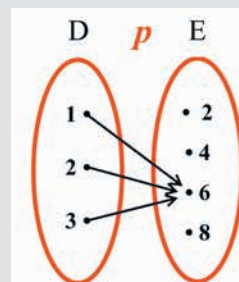


Figura 7

Cuando una correspondencia es función, como en el caso de f , figura 1, se usa también una representación llamada **notación funcional**. Por ejemplo, para representar con notación funcional que a Cecilia le corresponde el número 19, lo hacemos así:

$$f(\text{Cecilia}) = 19$$

Leemos lo anterior:

f de Cecilia es igual a 19

Observemos también con respecto a f que de todos los elementos de A salen flechas (como era de esperarse pues por ser f una función, a cada elemento de A le tiene que corresponder algún elemento de B) y que no llegan flechas a todos los elementos de B (o que no todos los elementos de B son imagen de algún elemento de A). A continuación se hace distinción de los conjuntos formados por los elementos mencionados:

Sea f una función de A en B . El conjunto A es el **dominio** de f , el conjunto B es el **codominio** de f y el subconjunto de B formado por los elementos que son imágenes es el **rango** de f .

Las abreviaturas $\text{dom } f$, $\text{codom } f$ y $\text{ran } f$ serán usadas para esos conjuntos, respectivamente.

Ejemplo 1

Para la función f de la figura 1 determine dominio, codominio y rango.

Solución

$$\text{dom } f = A = \{\text{Cecilia, María, Carlos, Edgar}\}$$

$$\text{codom } f = B = \{18, 19, 20, 21\}$$

$$\text{ran } f = \{18, 19, 21\}$$



Una función m entre los conjuntos $D = \{1, 2, 3\}$ y $E = \{2, 4, 6, 8\}$ está definida así: $m(1) = 4$, $m(2) = 6$, $m(3) = 4$. Haga el diagrama de flechas de m y determine su dominio y rango.

Consideremos la función r de la figura 8:

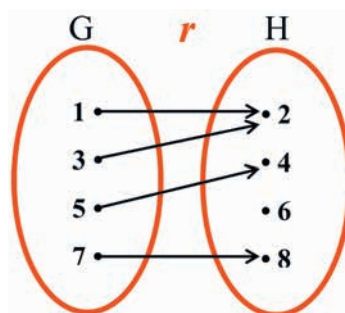


Figura 8

Para esta función tenemos que $r(1) = 2$. La notación funcional la entendemos mejor si comparamos la función con una *máquina* (figura 9): al introducir el 1 (*input* o *entrada*) en la máquina, esta lo procesa y lo convierte en 2 (*output* o *salida*).

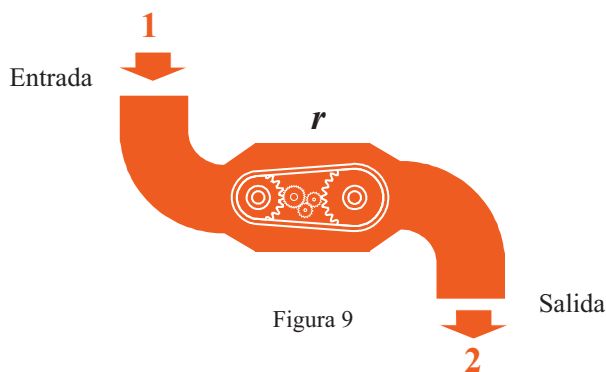


Figura 9

En $r(1) = 2$, imaginemos que r es el nombre de la máquina, el paréntesis es el cuerpo de la máquina en la cual *entra* el número 1, y el 2 que está después del igual es el número que *sale* de la máquina.

En esta comparación de una función con una máquina, los elementos del dominio de la función son los objetos que se permiten entrar en la máquina, aquellos para los cuáles estas se construyen, y los elementos del rango son los objetos que produce la máquina.

1.1.1 FORMAS DE REPRESENTAR O DESCRIBIR UNA FUNCIÓN

Como las funciones que encontraremos a lo largo del curso involucran conjuntos infinitos, la manera de definir las por medio de diagramas de flechas ya no es apropiada. Habrá entonces que utilizar una regla (usualmente una expresión algebraica) que indique cómo establecer la correspondencia entre los conjuntos.

Retomemos la situación inicial para ilustrar lo mencionado anteriormente y otros aspectos generales relacionados con las funciones. El tiempo que va transcurriendo desde que se abre la llave es un ejemplo de una cantidad *variable*:

Una *variable* es una letra que representa cualquier elemento de un conjunto.

Utilizaremos la letra t para la variable tiempo. Como el tiempo de llenado del recipiente es de 5 horas, t toma valores en el conjunto de los números comprendidos entre 0 y 5, incluidos el 0 y el 5, el cual es un conjunto infinito; este conjunto es el *intervalo cerrado* de extremos 0 y 5: $[0, 5]$.

El volumen v de agua que va quedando en el recipiente también es una variable.



¿En qué conjunto toma valores la variable v ?

Pensamiento Matemático

Como inicialmente había 3 litros de agua en el recipiente y ya que cada hora ingresan 2 litros constantemente, las variables t y v las podemos relacionar con la ecuación:

$$v = 2t + 3$$

En esta ecuación, a cada valor del tiempo le corresponde un único valor del volumen; por tanto, consideramos a la variable v como una función de la variable t .

A la variable t se le llama la **variable independiente** pues se le puede asignar cualquier valor del dominio (el intervalo $[0, 5]$). La variable v se llama la **variable dependiente**; el valor que toma depende de t ya que el volumen en el recipiente depende del tiempo transcurrido.

El nombre que usualmente damos a la función es el mismo que el de la variable dependiente. Así, llamamos v a esta función. Con notación funcional escribimos:

$$v(t) = 2t + 3, \quad t \in [0, 5]$$

Los valores que toma v para valores particulares de t , se llaman **valores funcionales**; por ejemplo:

$$\text{para } t = 1, v(1) = 2(1) + 3 = 5$$

$$\text{para } t = 2, v(2) = 2(2) + 3 = 7$$



Determine los siguientes valores funcionales: $v(1.5)$; $v(3.8)$

Los puntos del plano cartesiano correspondientes a los pares ordenados $(t, v(t))$ constituyen la **gráfica** de la función. Veremos más adelante (sección 1.3) que funciones como v tienen gráficas como la de la figura 10.

Tiempo (t) (horas)	Volumen (v) (litros)
0	3
1	5
2	7
3.5	10
5	13

Tabla 1

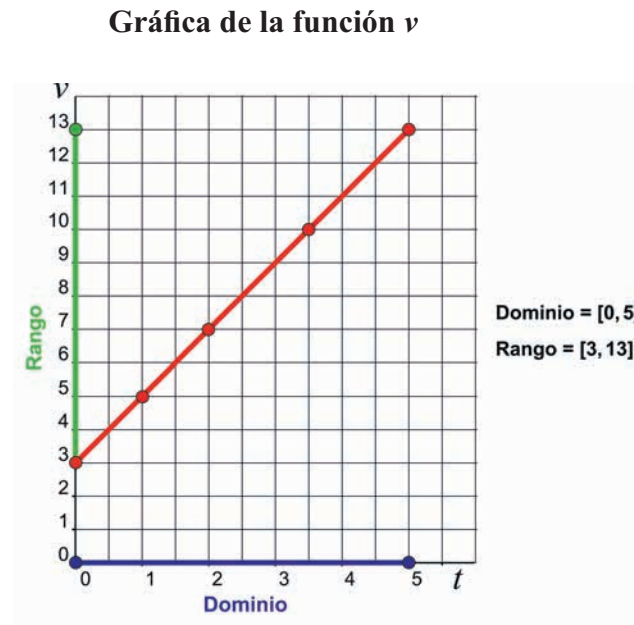


Figura 10

Otra manera de representar o describir una función es por medio de palabras o *verbalmente*. Por ejemplo, la función $v(t) = 2t + 3$ se representa verbalmente diciendo que “multiplica por 2 y luego suma tres”.

Pensamiento Matemático

Observe cómo interviene el orden en que se realizan las operaciones en las descripciones verbales de las siguientes funciones:

Representación algebraica

Representación verbal

$$f(x) = x^2$$

Eleva al cuadrado

$$f(x) = x + 5$$

Suma cinco

$$f(x) = \frac{x + 5}{2}$$

Suma cinco y luego divide por dos

$$f(x) = \frac{x}{2} + 5$$

Divide por dos y luego suma cinco

Hemos visto que una función puede representarse o describirse de varias maneras:

- con flechas (figura 1) $\rightarrow$ *representación sagital*
- por medio de una tabla (tabla 1) $\rightarrow$ *representación tabular*
- en el plano cartesiano (figura 10) $\rightarrow$ *representación gráfica*
- por medio de una ecuación ($v(t) = 2t + 3$) $\rightarrow$ *representación algebraica*
- con palabras (“multiplica por 2 y suma 3”) $\rightarrow$ *representación verbal*

Los ejemplos 2, 3 y 4 ilustran los aspectos generales de las funciones presentados hasta el momento:

Ejemplo 2

Un artículo cuesta \$500; tomemos el costo C de varios de esos mismos artículos como una función de la cantidad n de ellos. Por ejemplo: $C(1) = 500$, $C(4) = 2\,000$.

- Defina algebraicamente la función C
- ¿Cuál es el dominio y el rango de C ?

Solución

- $C(n) = 500n$
- El dominio es el conjunto de los enteros no negativos: $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ y el rango es el conjunto de los múltiplos no negativos de 500: $\{0, 500, 1\,000, 1\,500, \dots\}$.



Haga la gráfica de la función C .

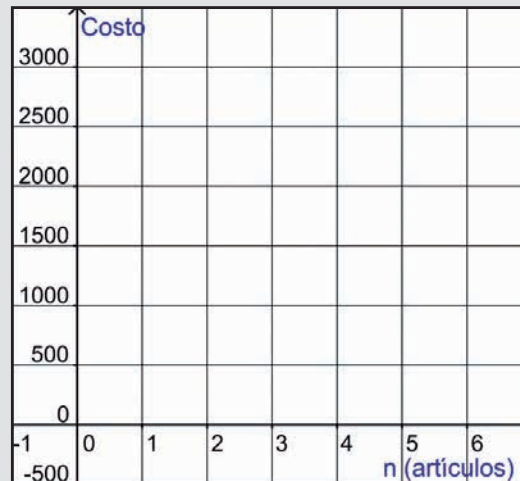


Figura 11

Ejemplo 3

La función $f(x) = x^2$, o también $y = x^2$, es la función que “*eleva al cuadrado*”. En la figura 12 vemos la gráfica de esta función:

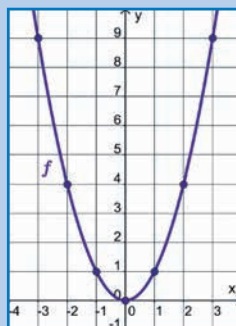


Figura 12

- i. ¿Cuál es el dominio y rango de f ?
- ii. Halle los siguientes valores funcionales $f(-7)$, $f(4.2)$, $f(-x)$, $f(x-3)$, $f(a+h)$.

Solución

- i. El dominio es el conjunto de los números reales, es decir, el intervalo $(-\infty, \infty)$; el rango es el conjunto de los números reales no negativos: el intervalo $[0, \infty)$.
- ii. Valores funcionales :

$$f(-7) = (-7)^2 = 49$$

$$f(4.2) = (4.2)^2 = 17.64$$

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2$$

$$f(x-3) = (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$$

$$f(a+h) = (a+h)^2 = a^2 + 2ah + h^2$$



Si f es la función $f(x) = x^2$, encuentre: $f(2x)$; $f(x + 4)$; $f(x - h)$

Ejemplo 4

En la figura 13 tenemos la gráfica de una función g .

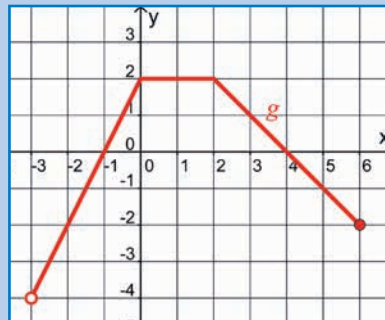


Figura 13

Con respecto a esta función, halle:

- $g(-2)$.
- dominio y rango.
- $g(-3)$.
- puntos de corte de la gráfica con los ejes o “*interceptos con los ejes*”.
- los valores de x que satisfacen la ecuación $g(x) = -2$.

Solución

- i. $g(-2) = -2$
- ii. El dominio de g es el intervalo $(-3, 6]$; el rango de g es el intervalo $(-4, 2]$.
- iii. $g(-3)$ no está definido ya que -3 no está en el dominio de g .
- iv. Corte con el eje y o **y -intercepto** es el punto $(0, 2)$.
Cortes con el eje x o **x -interceptos** (llamados también *ceros* de la función) son los puntos $(-1, 0)$, $(4, 0)$.
- v. Los valores de x para los cuales se verifica que $g(x) = -2$, son $x = -2$ y $x = 6$, es decir, aquellos puntos de la gráfica de g en los que la segunda coordenada es -2 ; dichos puntos son $(-2, -2)$ y $(6, -2)$. Estos puntos se obtienen en las intersecciones de la recta horizontal que pasa por -2 , en el eje y , con la gráfica de la función (figura 14):

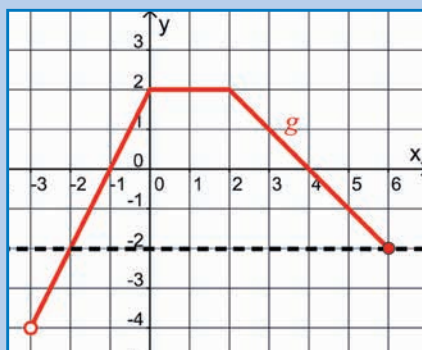


Figura 14



Para la función g de la figura 14, estime:

- $g(1)$; $g(2.5)$
- los valores de x para los cuales $g(x) = 1$

1.1.2 GRÁFICAS EN EL PLANO CARTESIANO QUE SON GRÁFICAS DE FUNCIONES

Examinaremos ahora qué gráficas del plano cartesiano pueden ser la gráfica de una función.

Observemos las gráficas de las figuras 15 y 16:

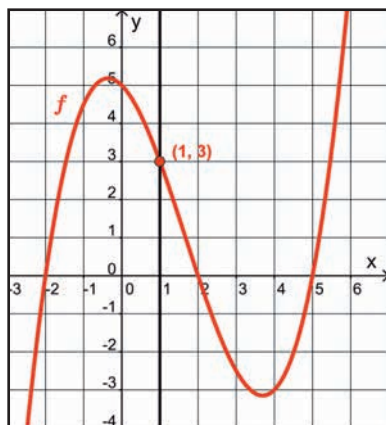


Figura 15

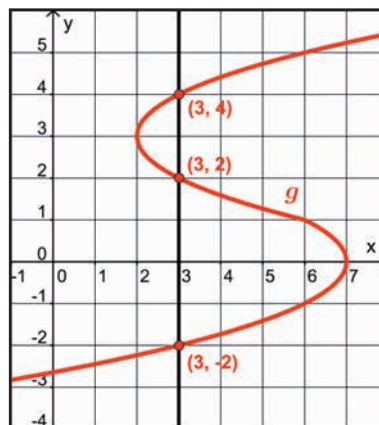


Figura 16

En la figura 15 se observa que a cada uno de los valores del dominio le corresponde un único valor del rango; por ejemplo a $x = 1$, le corresponde solamente $y = 3$. Notemos que la recta vertical que pasa por $(1, 3)$, no intercepta a ningún otro punto de la gráfica; la gráfica de la figura 15 sí es la gráfica de una función (en este momento no nos preocupamos por su representación algebraica).

En la figura 16, los puntos $(3, 4)$, $(3, 2)$, $(3, -2)$ indican que al número 3 le corresponden tres valores: -2 , 2 y 4 . Esta correspondencia no puede ser entonces una función. Observemos que la recta vertical de la figura 16 intercepta a la gráfica en más de un punto.

Las anteriores consideraciones ilustran la

Prueba de la recta vertical

Si alguna recta vertical en el plano xy intercepta a la gráfica en más de un punto, entonces la gráfica no define a y como una función de x .

Ejemplo

¿Cuáles de las siguientes gráficas definen a y como una función de x ?

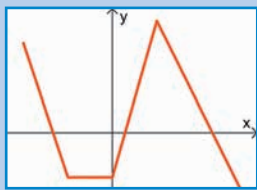


Figura 17

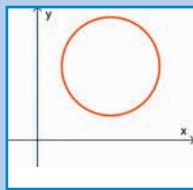


Figura 18

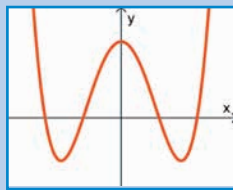


Figura 19

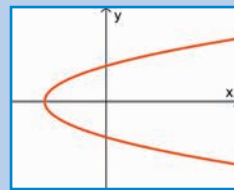


Figura 20

Solución

La prueba de la recta vertical indica que las gráficas de las figuras 17 y 19 definen a y como una función de x ya que ninguna recta vertical intercepta a la gráfica en más de un punto (figuras 21 y 23). Las gráficas de las figuras 18 y 20 no corresponden a gráficas de funciones: hay rectas verticales que interceptan a la curva en más de un punto (figuras 22 y 24).

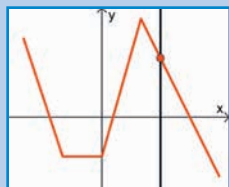


Figura 21

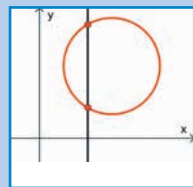


Figura 22

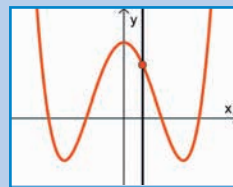


Figura 23

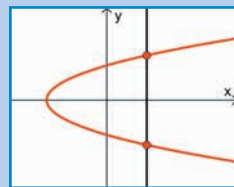


Figura 24

EJERCICIOS

I. Identifique cuáles de las siguientes correspondencias son funciones; para cada función, halle el dominio y el rango:

1)

2)

3)

4)

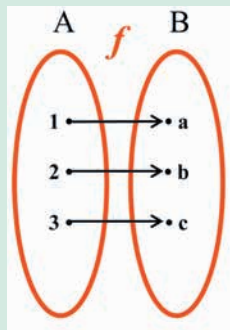


Figura 25

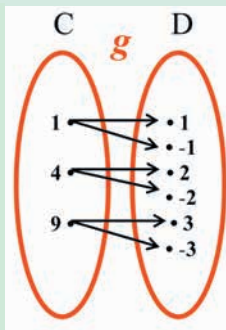


Figura 26

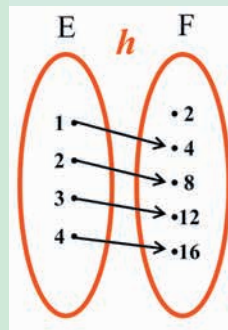


Figura 27

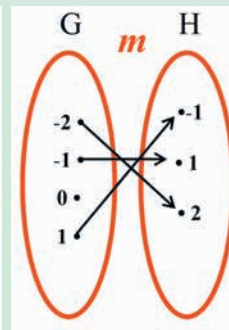


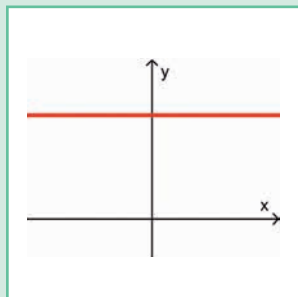
Figura 28

II. Indique cuáles de las siguientes correspondencias definen una función entre los conjuntos A y B:

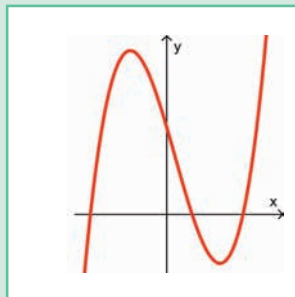
Conjunto A	Correspondencia	Conjunto B
Números reales	Cubo de un número	Números reales
Estudiantes de la Universidad	Número de asignaturas que cursan	Números naturales
Ciudadanos colombianos	N° de documento de identidad	Números naturales
Números enteros	Raíz cuadrada	Números reales
Estudiantes de primer semestre	Asignaturas registradas	Asignaturas que ofrece la Universidad

III. Determine qué gráficas, de la figura 29, definen a y como una función de x :

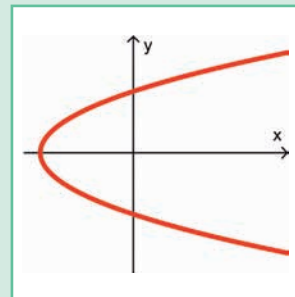
1)



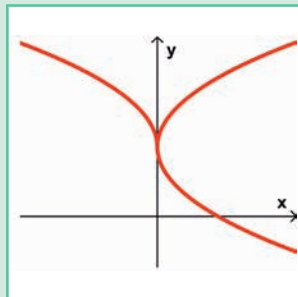
2)



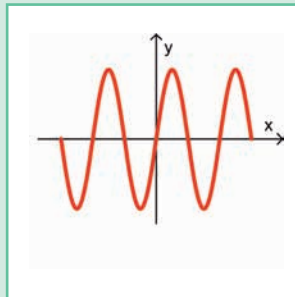
3)



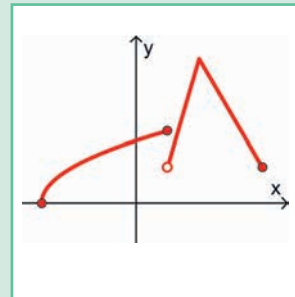
4)



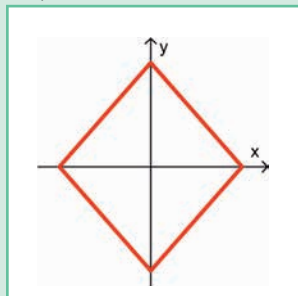
5)



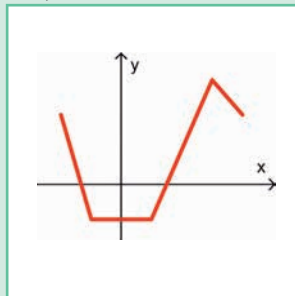
6)



7)



8)



9)

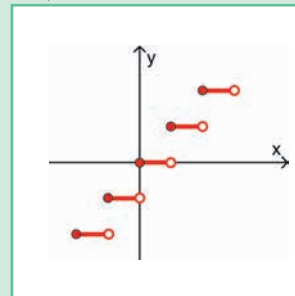
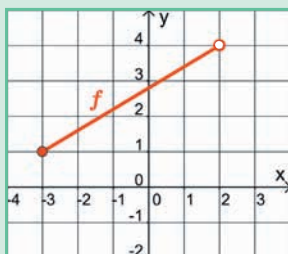


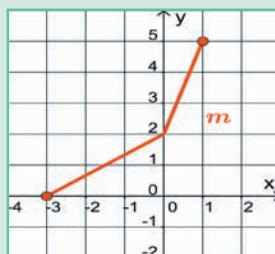
Figura 29

IV. Identifique dominio y rango de cada función que aparece en la figura 30:

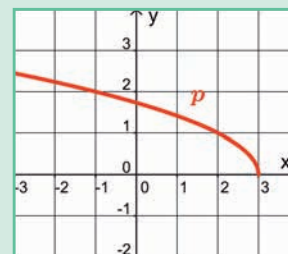
1)



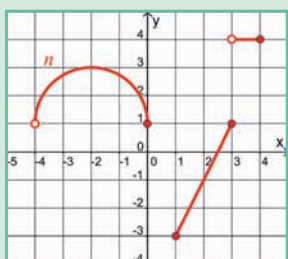
2)



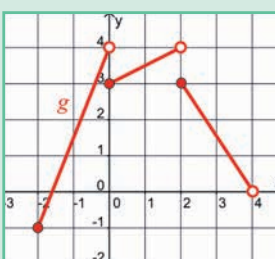
3)



4)



5)



6)

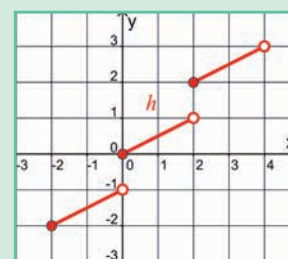


Figura 30

V. Exprese en forma verbal las siguientes funciones:

1) $f(x) = 5x - 4$

2) $g(x) = 5(x - 4)$

3) $p(t) = t^3 + 6$

4) $h(r) = \frac{3r^2 + 1}{2}$

5) $n(t) = \sqrt{2t} - 7$

6) $m(z) = \sqrt{2z - 7}$

VI. Las funciones definidas verbalmente; represéntelas algebraicamente:

- 1) Reste 5 y multiplique por 6.
- 2) Divida por 4 y luego sume 11.
- 3) Sume 11 y después divida por 4.
- 4) Eleve al cuadrado, multiplique por 3 y reste 6.
- 5) Multiplique por 3, reste 6 y eleve al cuadrado.
- 6) Sume 8, multiplique por 7 y saque raíz cúbica.

VII. En las figuras 31 y 32 se dan las gráficas de las funciones f y g respectivamente:

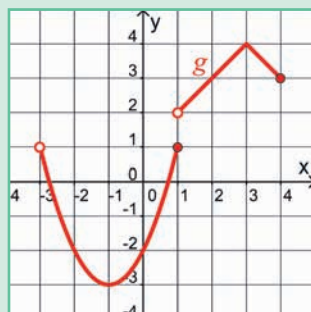


Figura 31

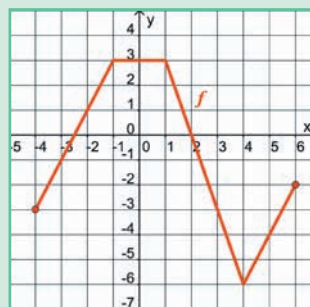


Figura 32

Determine:

$$f(-3) = \quad g(1) = \quad f(4) = \quad g(-3) = \quad f(6) = \quad g(-1) =$$

Dom f :

Dom g :

Rango f :

Rango g :

Corte con el eje y :

Corte con el eje y :

Cortes con el eje x :

Cortes con el eje x :

VIII. Se dan las gráficas de las funciones g y m (figuras 33 y 34):

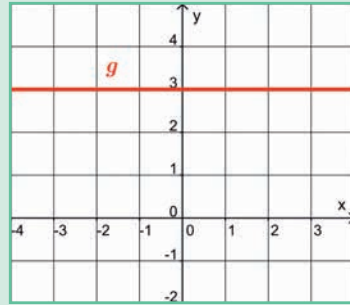


Figura 33

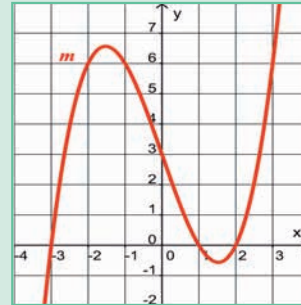


Figura 34

Estime los siguientes valores funcionales:

- | | | | |
|--------------|--------------|-----------------------------------|------------------------------------|
| 1) $g(-3) =$ | 2) $m(0) =$ | 3) $g\left(\frac{1}{2}\right) =$ | 4) $m(2.5) =$ |
| 5) $m(-1) =$ | 6) $g(0) =$ | 7) $m(2) =$ | 8) $m(-2.5) =$ |
| 9) $g(2) =$ | 10) $m(3) =$ | 11) $m\left(\frac{1}{2}\right) =$ | 12) $m\left(-\frac{1}{2}\right) =$ |

IX. Para cada función, determine los valores funcionales indicados:

1) $f(x) = 2x - 7$

a) $f(-3)$

b) $f(0)$

c) $f(a)$

d) $f(x - 1)$

e) $f(x + h)$

$$2) g(t) = -3t + 4$$

a) $g(-3)$

b) $g(-2)$

c) $g\left(\frac{4}{3}\right)$

d) $g(-t)$

e) $g(t+2)$

$$3) h(x) = 2x^2 - 4x - 2$$

a) $h(0)$

b) $h(-1)$

c) $h\left(\frac{1}{2}\right)$

d) $h(-x)$

e) $h(2-x)$

$$4) f(x) = -3r^2 + 5r$$

a) $f(-2)$

b) $f(\sqrt{2})$

c) $f\left(\frac{1}{3}\right)$

d) $f(1-r)$

e) $f(-3r)$

$$5) g(d) = d^3 - 4$$

a) $g(-2)$

b) $g(1)$

c) $g(\sqrt[3]{4})$

d) $g(-d)$

e) $g(d+1)$

$$6) h(x) = \frac{x-3}{x+2}$$

a) $h(3)$

b) $h(0)$

c) $h(\pi)$

d) $h(-3)$

e) $h(x+5)$

f) $h(-2)$

$$7) f(x) = \sqrt{x+1}$$

a) $f(8)$

b) $f(0)$

c) $f(-x)$

d) $f(4-x)$

e) $f(x^2-1)$

X. En cada caso, dibuje la gráfica de una función f que cumpla las condiciones dadas:

- 1) Tenga como dominio el intervalo $[-3, 2)$ y rango el intervalo $[1, 5)$.
- 2) Dominio el intervalo $(-4, 3)$ y rango $[-3, 1) \cup [2, 4)$.
- 3) $f(-1) = 3$, $f(4) = -2$, dominio $(-4, 1] \cup (3, 5]$.
- 4) Dominio $(-4, 1] \cup [3, 5)$, rango el intervalo $[-3, 4)$, y los puntos $(-3, 2)$, $(2, -3)$ pertenezcan a la gráfica de la función.

XI. Las siguientes preguntas son de *selección múltiple con múltiple respuesta* (dos de los enunciados son **verdaderos** y dos son **falsos**). Marque la letra que corresponda en la tabla de respuestas:

Si 1 y 2 son correctos marque A

Si 2 y 3 son correctos marque B

Si 3 y 4 son correctos marque C

Si 2 y 4 son correctos marque D

Teniendo en cuenta las gráficas de las funciones f y g , que aparecen en las figuras 35 y 36, responda las preguntas 1 a 4.

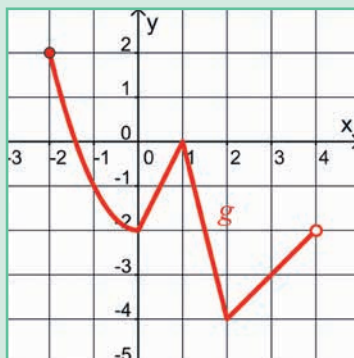


Figura 35

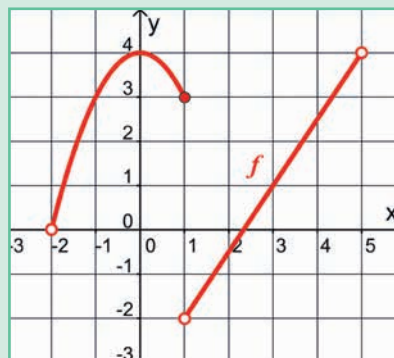


Figura 36

- 1) Con respecto a la función g , de la figura 35, ¿cuáles de los enunciados son verdaderos?
 1. El punto de corte de la gráfica con el eje y es $(0, -2)$.
 2. $g(-1) = -1$.
 3. El rango de la función es el intervalo $(-4, 2)$.
 4. $g(x) = -2$ si $x = 2$.

- 2) De la función g , es correcto afirmar que:
 1. Los puntos de corte con el eje x son $(-2, 0)$ y $(-1, 0)$.
 2. El dominio de la función es el intervalo $[-2, 4)$.
 3. $g(5)$ no está definido.
 4. El punto $(3, 3)$ pertenece a la gráfica de la función.

3) Con respecto a la función f , de la figura 36, es correcto afirmar que:

1. Si $x = 1$, entonces $y = -2$.
2. El punto $(3, 1)$ pertenece a la gráfica de la función.
3. El dominio de la función es el intervalo $(-2, 6)$.
4. y -intercepto es el punto $(0, 4)$.

4) De la función f es cierto que:

1. $f(4) = 5$.
2. Los puntos de corte con el eje x son $(-2, 0)$ y $(3, 0)$.
3. $f(-1) = 3$.
4. El rango de la función es el intervalo $(-2, 4]$.

Tabla de respuestas

Pregunta	A	B	C	D
1				
2				
3				
4				

XII. Para cada una de las funciones dadas, halle y simplifique

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}, h \neq 0:$$

1) $f(x) = 3x + 1$

2) $f(x) = x^2$

3) $f(x) = x^2 - 2x$

4) $f(x) = 4$

1.2 INTERVALOS DONDE UNA FUNCIÓN ES CRECIENTE, DECRECIENTE O CONSTANTE

ACTIVIDAD INICIAL

Un piloto de cometa ala delta despegue desde una pista de lanzamiento que se encuentra a 500 pies sobre el nivel del mar.



Figura 1

Pensamiento Matemático

Un altímetro permite determinar la elevación E del piloto con respecto al sitio desde donde se lanzó. La gráfica siguiente muestra la elevación E como una función del tiempo t , en minutos, transcurridos después del lanzamiento:



Figura 2

¿En qué intervalos de tiempo asciende el piloto? ¿En cuáles desciende?

¿Cuándo está el piloto a la misma altura del sitio de donde se lanzó?

¿En qué intervalos de tiempo vuela a altura constante y por cuánto tiempo lo hace?

Un aspecto a describir del *comportamiento* de una función, a partir de la gráfica, consiste en indicar en qué intervalos del dominio crece, decrece o permanece constante. Si al recorrer la gráfica de izquierda a derecha encontramos que en un intervalo abierto la gráfica *sube* o *baja*, entonces la función es **creciente** o **decreciente**, respectivamente, en dicho intervalo. Si no sube ni baja es **constante** en ese intervalo.

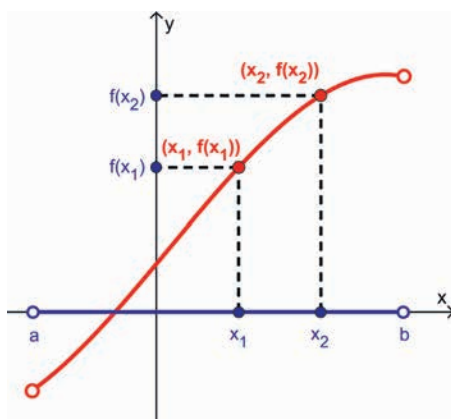


Figura 3

Una función f es **creciente** en un intervalo abierto (a, b) , si para cualquier x_1 y x_2 en el intervalo, tales que $x_1 < x_2$, se cumple que $f(x_1) < f(x_2)$

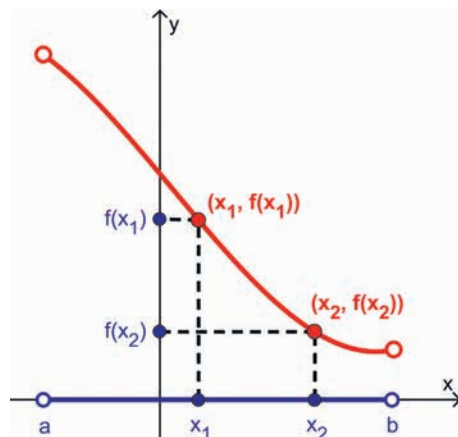


Figura 4

Una función f es **decreciente** en un intervalo abierto (a, b) , si para cualquier x_1 y x_2 en el intervalo, tales que $x_1 < x_2$, se cumple que $f(x_1) > f(x_2)$

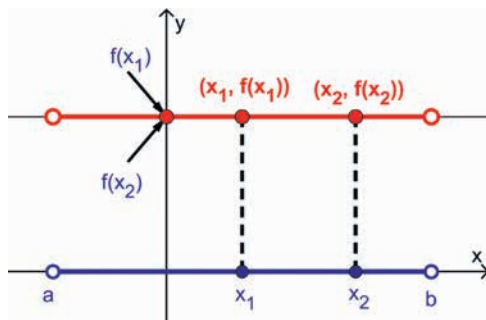


Figura 5

Una función f es **constante** en un intervalo abierto (a, b) , si para cualquier x_1 y x_2 en el intervalo, tales que $x_1 \neq x_2$, se cumple que $f(x_1) = f(x_2)$

Tomemos por ejemplo, la función f cuya gráfica se muestra en la figura 6:

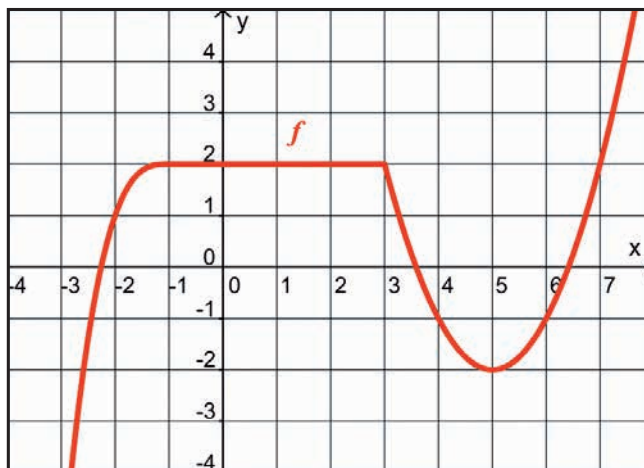


Figura 6

f es creciente en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(5, \infty)$; es decreciente en el intervalo $(3, 5)$ y es constante en el intervalo $(-1, 3)$.



Escriba los intervalos donde crece, decrece o es constante la función g cuya gráfica es:

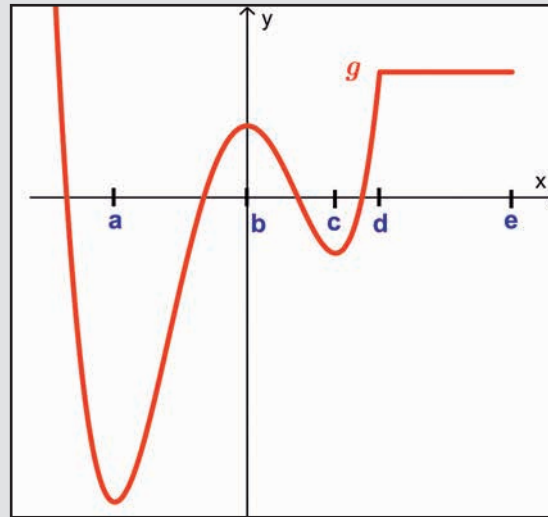


Figura 7



Escriba los intervalos donde crece, decrece o es constante la función de elevación E (figura 2):

EJERCICIOS

- I. Para cada función de la figura 8, indique los intervalos en los que es creciente, decreciente o constante.

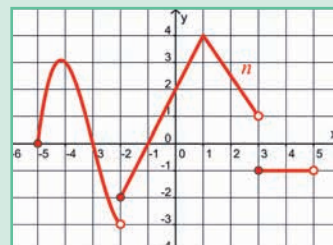
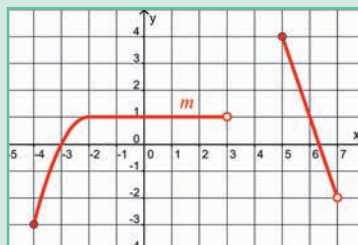
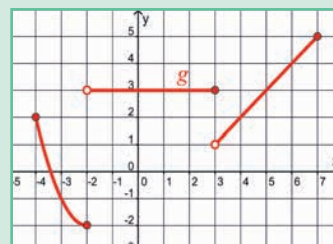
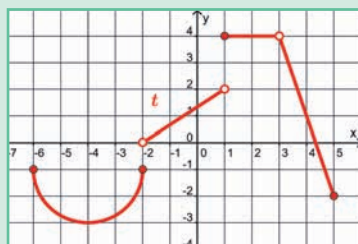
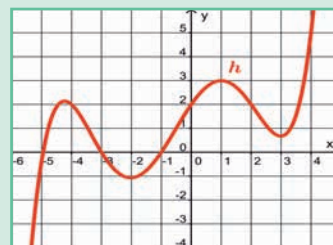
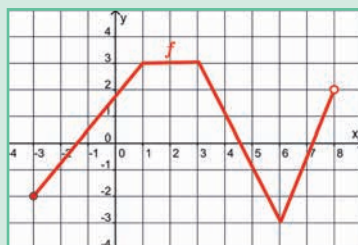


Figura 8

II. En cada caso, dibuje la gráfica de una función que tenga como dominio los números reales y que cumpla las condiciones pedidas:

- 1) Que sea decreciente en el intervalo $(1, \infty)$ y creciente en el intervalo $(-\infty, 1)$.
- 2) Creciente en el intervalo $(-3, 2)$ y constante en el intervalo $(2, 6)$.
- 3) Creciente en los reales positivos, decreciente en los reales negativos y $f(0) = 2$.
- 4) Decreciente en $-5 < x < 1$, creciente en $3 < x < 7$, $f(-5) = 4$, $f(3) = -2$ y $f(5) = 2$.

III. Preguntas de selección múltiple con múltiple respuesta:

Si 1 y 2 son correctos marque A

Si 2 y 3 son correctos marque B

Si 3 y 4 son correctos marque C

Si 2 y 4 son correctos marque D

- 1) De la función f , cuya gráfica está en la figura 9, es correcto afirmar:

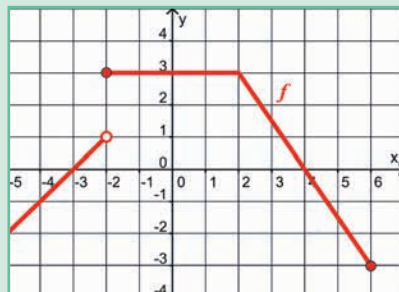


Figura 9

1. Es creciente en el intervalo $(-\infty, -2)$.
2. El rango es el intervalo $(-\infty, 3]$.
3. Es constante en el intervalo $(2, \infty)$.
4. $f(x) = 0$, para $x = 3$.

2) De la función g , cuya gráfica está en la figura 10, es cierto que:

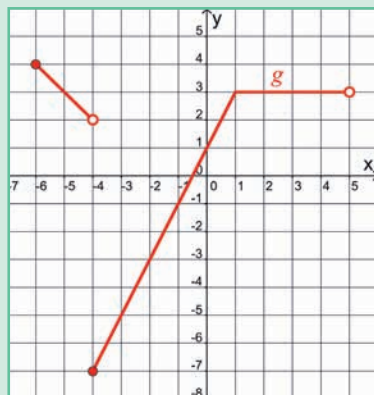


Figura 10

1. Es constante en el intervalo $(-4, 1)$.
2. El dominio de g es el intervalo $[-6, 5)$.
3. Es decreciente en el intervalo $(1, 5)$.
4. $g(x) = 3$ para $x = 3$.

Tabla de respuestas

Pregunta	A	B	C	D
1				
2				

1.3 FUNCIÓN LINEAL

En la actividad inicial expresábamos el volumen v como una función del tiempo t : $v(t) = 2t + 3$. Nos ocuparemos ahora de funciones como esa.¹

Una función que puede escribirse en la forma $f(x) = mx + b$, donde m y b son constantes, es una **función lineal**. La gráfica de una función lineal es una **línea recta**.

¹ Antes de continuar con el estudio de las funciones lineales es importante hacer una revisión de cómo trazar la gráfica correspondiente a una ecuación lineal en dos variables y el proceso contrario, cómo conseguir la ecuación correspondiente a una recta del plano.

Algunas características de las funciones lineales las identificaremos considerando los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1

Haga la gráfica y determine dominio, rango y cortes con los ejes de las funciones lineales $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$, $h(x) = -\frac{2}{3}x$, $j(x) = 5$

Solución

Escribamos la ecuación $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$ como $y = \frac{1}{2}x - 3$. Observemos que esta corresponde a la ecuación de la recta expresada en la forma pendiente-intercepto: $y = mx + b$; m es la pendiente, b es el intercepto con el eje y .

En la recta $y = \frac{1}{2}x - 3$, el intercepto con el eje y es igual a -3 y la pendiente es igual a $\frac{1}{2}$. Una forma de hacer la gráfica de esta recta consiste en dibujar primero el punto correspondiente al corte con el eje y : $(0, -3)$; otro punto de la recta lo conseguimos por medio de la pendiente: a partir del punto $(0, -3)$ hacemos un desplazamiento horizontal de 2 unidades a la derecha y luego un desplazamiento vertical de unidad hacia arriba, llegando al punto $(2, -2)$. Trazamos luego la recta por $(0, -3)$ y $(2, -2)$, figura 1, que es la gráfica de la función lineal $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$:

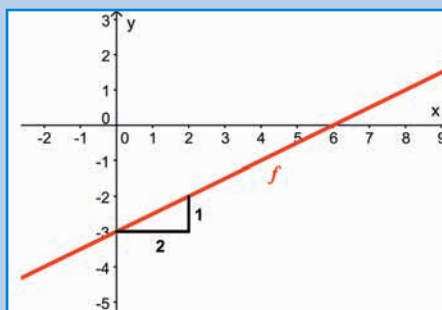


Figura 1

Dominio: números reales

Rango: números reales

Corte con el eje y :

$(0, -3)$, ya que $f(0) = -3$

Corte con el eje x :

$(6, 0)$, al resolver la ecuación

$f(x) = 0$, esto es $\frac{1}{2}x - 3 = 0$
encontramos que $x = 6$.

En la función $h(x) = -\frac{2}{3}x$, tenemos que $y = -\frac{2}{3}x + 0$; luego $m = -\frac{2}{3}$, $b = 0$.

Gráfica de la función h (figura 2):

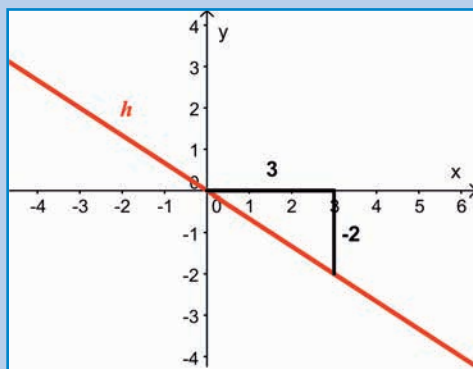


Figura 2

Dominio: números reales.

Rango: números reales.

y – intercepto: $(0, 0)$.

x – intercepto: $(0, 0)$.

Para la función $j(x) = 5$, $y = 0x + 5$, $m = 0$, $b = 5$, la gráfica es:

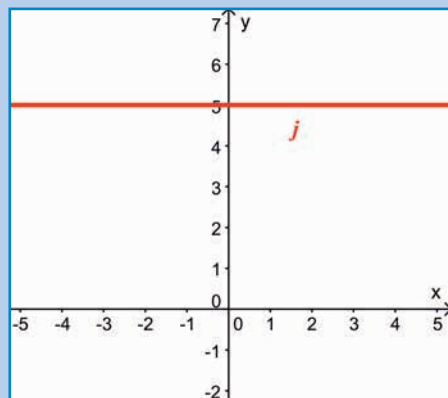


Figura 3

Dominio: números reales.

Rango: $\{5\}$

Corte con el eje y : $(0, 5)$.

Corte con el eje x : no hay.



Haga la gráfica de cada función lineal; determine dominio, rango y cortes con los ejes

1) $g(x) = -x + 2$

2) $k(x) = -4$

3) $l(x) = x$

4) $m(x) = 2x - 3$

1)

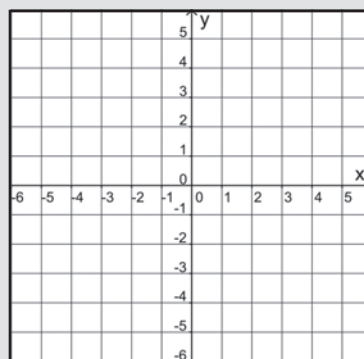


Figura 4

2)

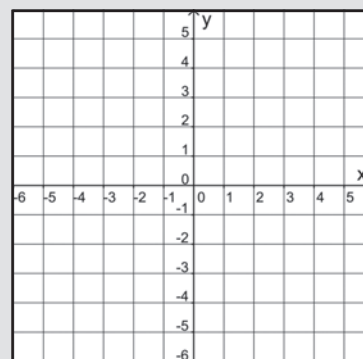


Figura 5

3)

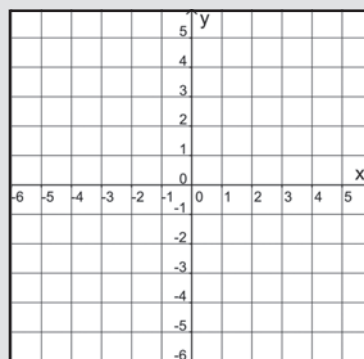


Figura 6

4)

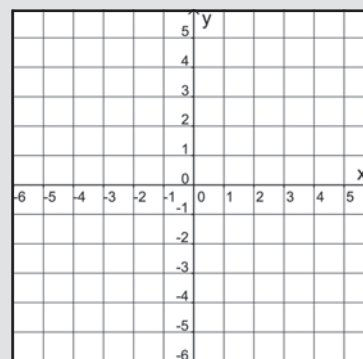


Figura 7



Escriba las palabras *decreciente*, *creciente* o *constante* en las casillas de la tabla 1, según corresponda.

Función lineal $f(x) = mx + b$

$m \neq 0$	
$m = 0$	
$m < 0$	

Tabla 1

Ejemplo 2

La escala de temperatura Fahrenheit (F) se puede expresar como una función lineal de la escala Celsius (C). Una temperatura de 10 °C corresponde a 50 °F y una de 25 °C corresponde a 77 °F.

- Escriba a F como una función de C
- ¿Qué interpretación puede darse a la pendiente y al intercepto con el eje F?
- La temperatura de ebullición del agua es de 100 °C, ¿a cuántos °F equivale?
- ¿A qué temperatura las dos escalas marcan el mismo número?

Solución

a) $F = mC + b$

Los puntos (10, 50) y (25, 77) pertenecen a la gráfica de F.

Pendiente: $m = \frac{77 - 50}{25 - 10} = \frac{27}{15} = \frac{9}{5}$

Remplazamos $F = 50$, $C = 10$, $m = \frac{9}{5}$ en $F = mC + b$: $50 = \frac{9}{5}10 + b$

$$50 - 18 = b$$

$$b = 32$$

Luego, F como función de C es :

$$F(C) = \frac{9}{5}C + 32$$

- b) La pendiente $\frac{9}{5}$ indica que por cada 5 grados de aumento en temperatura medidos en la escala Celsius, la medición en la escala Fahrenheit aumenta 9 grados. El intercepto con el eje F es $(0, 32)$ lo cual indica que 0 grados centígrados corresponden a 32 grados Fahrenheit.

- c) $C = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$

$$F = \frac{9}{5}100 + 32$$

$$F = 180 + 32 = 212$$

Luego, $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ corresponde a $212\text{ }^{\circ}\text{F}$; el punto de ebullición del agua es $212\text{ }^{\circ}\text{F}$

- d) Hacemos $F = C$ y reemplazamos en $F = \frac{9}{5}C + 32$.

$$C = \frac{9}{5}C + 32$$

$$C - \frac{9}{5}C = 32$$

$$-\frac{4}{5}C = 32$$

$$C = -40$$

Por tanto, una temperatura de $-40\text{ }^{\circ}\text{C}$ corresponde a $-40\text{ }^{\circ}\text{F}$.



De acuerdo con la Ley de Charles, la presión P , medida en pascales, de un volumen fijo de gas, está relacionada linealmente con la temperatura T , medida en grados Celsius. En un experimento se encontró que cuando, $T = 30$, $P = 80$ y cuando $T = 60$, $P = 100$.

- Exprese la presión P como función de la temperatura T .
- Haga la gráfica de la función P .

VARIACION DIRECTA

Una persona camina en línea recta, con rapidez uniforme, a razón de 2 metros por segundo a partir de cierto lugar. La distancia que la separa de ese lugar la podemos expresar como una función del tiempo en la forma $d = 2t$. Es frecuente expresar la relación entre distancia y tiempo diciendo que la distancia varía en forma *directa* con respecto al tiempo; con esto se quiere decir que si el tiempo (transcurrido desde que sale de ese lugar) se duplica, entonces la distancia recorrida se duplica, si el tiempo se triplica la distancia se triplica, etc. (si x crece, y crece).



Haga la gráfica de la función $d = 2t, t \geq 0$

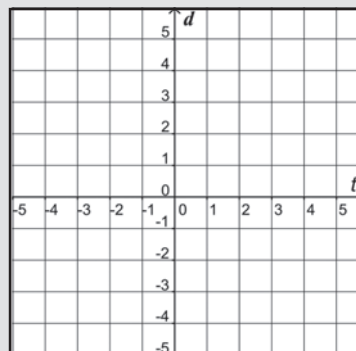


Figura 8

Si una función lineal es de la forma $y = mx$ entonces decimos que y varía en forma **directa** con respecto a x o que y es **directamente proporcional** a x ; m es la **constante de proporcionalidad**. La gráfica es una recta que pasa por el origen.

EJERCICIOS

I. De las siguiente funciones, identifique cuáles son lineales; para las que lo sean, haga su gráfica, determine el dominio, rango, cortes con los ejes, y si es una función creciente, decreciente o constante.

1) $f(x) = x - 2$

2) $g(x) = 3$

3) $g(x) = -x$

4) $h(x) = 2x^2 + 3x - 1$

5) $h(x) = \frac{x+2}{x-1}$

6) $f(x) = \frac{1}{3}x - 2$, si $-3 \leq x \leq 6$

7) $f(x) = -2x + 1$

8) $g(x) = \cos x$

9) $g(x) = \sqrt{x-3}$

10) $f(x) = 0$, si $-2 \leq x \leq 5$

11) $h(x) = e^{2x}$

12) $h(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$, si $-3 \leq x \leq 3$

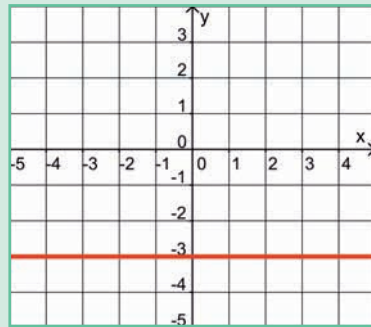
II. Forme las parejas correspondientes a la ecuación y su gráfica:

1) $f(x) = -\frac{2}{3}x - 3$ ()

2) $f(x) = -\frac{2}{3}x + 3$ ()

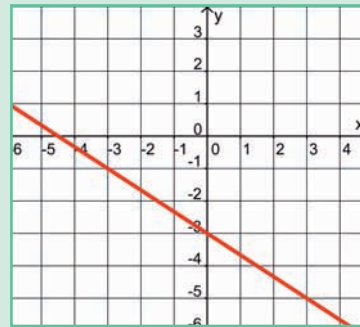
3) $f(x) = \frac{2}{3}x - 3$ ()

a)

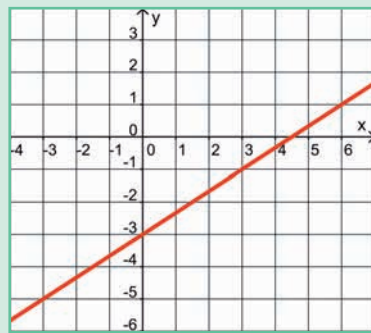


4) $f(x) = -3$ ()

b)



c)



d)

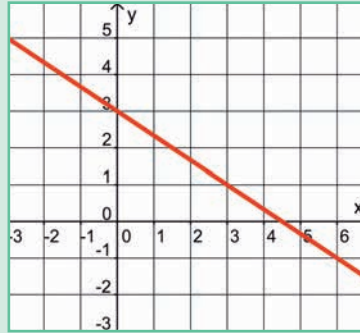


Figura 9

III. Problemas sobre variación directa:

- 1) Suponga que y varía directamente con x . Cuando $x = 3$, $y = 9$. Halle y cuando $x = 12$.

- 2) Tres galones de gasolina cuestan \$24 000. Expresa el costo C de una compra de gasolina como una función de la cantidad x de galones comprados.
- 3) Considere latas cilíndricas con la misma base. El volumen de una lata es proporcional a la altura de la misma. Si el volumen de una lata es 300 cm^3 cuando su altura es 11 cm , halle el volumen de una lata de 16 cm de altura.

IV. Para los ejercicios del 1 al 3 tenga en cuenta:

Si 1 y 2 son correctos marque A

Si 2 y 3 son correctos marque B

Si 3 y 4 son correctos marque C

Si 2 y 4 son correctos marque D

1) De la función $f(x) = -3x + 2$, es correcto afirmar:

1. la gráfica de f es una recta.
2. la gráfica corta el eje y en el punto $(0, 2)$.
3. es una función creciente.
4. $f\left(\frac{4}{3}\right) = 6$.

2) De la función $g(x) = \frac{3}{2}x - 1$, es cierto que:

1. la gráfica de g es una recta cuya pendiente es $m = \frac{3}{2}$
2. $g(x) = -3$ para $x = -\frac{4}{3}$
3. la gráfica corta al eje x en el punto $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$
4. es una función creciente.

- 3) Dados los puntos $(-2, 2)$, $(4, -2)$, y h la función cuya gráfica es la recta que los une, es correcto afirmar que:
1. la gráfica de h intercepta al eje x en el punto $(2, 0)$
 2. $h(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$
 3. la pendiente de la recta es $\frac{2}{3}$
 4. la función es decreciente.

Tabla de respuestas

Pregunta	A	B	C	D
1				
2				
3				

V. Problemas

- 1) Al ascender el aire seco se enfría y expande. A nivel del suelo la temperatura es de 24°C , y a una altura de 800 metros es de 16°C .
 - a. Escriba la expresión que modela la temperatura T (en $^\circ\text{C}$) como función de la altura h (en kilómetros). Suponga que la relación entre T y h es lineal.
 - b. ¿Qué representa la pendiente?
 - c. Haga la gráfica de la función T .
 - d. ¿Cuál es la temperatura a una altura de 1.5 km?

- 2) Un antropólogo puede usar la función lineal para estimar la estatura de un hombre o de una mujer, dada la longitud del húmero, el hueso del codo al hombro.

La estatura, en centímetros, de un hombre adulto con un húmero de longitud x , en centímetros, está dada por la función:

$$H(x) = 2.89x + 70.64$$

La estatura, en centímetros, de una mujer adulta con un húmero de longitud x , en centímetros, está dada por la función:

$$M(x) = 2.75x + 71.48$$

Un húmero de 26 cm fue encontrado en unas ruinas. Asumiendo que era de una mujer, ¿qué estatura tenía ella? Compare el resultado si se asume que era de un hombre. ¿Cuál es el dominio de la función M ?

Para los problemas 3 y 4 tenga en cuenta la siguiente información:

Costo fijo (gastos generales): es la suma de todos los costos que son independientes del nivel de producción, por ejemplo, alquiler y seguros. Este costo se debe pagar independientemente de que se produzca o no.

Costo variable: es la suma de todos los costos dependientes del nivel de producción, por ejemplo, salarios y materiales.

Costo total: es la suma de los costos variable y fijo:

$$\text{Costo total} = \text{Costo variable} + \text{Costo fijo}$$

Ingreso total: es el dinero que se recibe por la venta de un producto.

$$\text{Ingreso total} = (\text{precio por unidad}) (\text{número de unidades})$$

Utilidad (o ganancia): es el ingreso total menos el costo total.

$$\text{Utilidad} = \text{ingreso total} - \text{costo total}$$

- 3) El costo de cada camisa es de \$2 000 y los *costos fijos* de producción son \$800 000. La capacidad máxima de producción de la fábrica es de 1 500 camisas.
 - a. Escriba una función que modele el costo de producción C de n camisas.
 - b. Determine el dominio de C
 - c. Halle $C(570)$.
 - d. ¿Cuántas camisas se producen si el costo es de \$ 2 670 000?
- 4) Los costos de capital de una empresa son altos por los elementos que duran más de un año y pierden el valor o se desgastan con el tiempo. Ejemplos de estos son los equipos y muebles. El valor de estos declina o deprecia (baja), con el paso del tiempo. Una forma de calcular la depreciación es con el método de la línea recta, usando el valor inicial y estimando la vida útil del activo. Suponga que un software adquirido en enero de 2008 por un valor de 1 500 000 pesos, en noviembre de 2008 se estimó su valor en 850 000 pesos.
 - a. ¿Cuál es el valor con que se deprecia por mes dicho software?
 - b. Escriba la expresión que modela el costo C del software en función de t , medido en meses.
 - c. Encuentre el intercepto con el eje horizontal (t). ¿Qué significa?
 - d. Haga el gráfico de la función $C(t)$.

- 5) El encargado de un puesto de venta encuentra que el número de gaseosas que vende cada semana depende del precio de cada una. Si el precio es de \$2 000, vende 750 gaseosas; por cada aumento de \$150 en el precio de la gaseosa, vende 90 gaseosas menos cada semana.
- ¿Cuántas gaseosas vende si el precio se aumenta en \$450, y cuántas si el precio se disminuye \$300?
 - Escriba el modelo lineal que relaciona el número de gaseosas vendidas L y el precio p de cada una.
 - ¿Cuál es la pendiente y qué representa?
 - ¿Qué representa el intercepto con el eje y ?
 - ¿Cuáles son los costos fijos y los costos variables?

1.4 FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS

En ocasiones, la definición de una función requiere de varias instrucciones como lo ilustra la siguiente situación:

La tarifa para entrar a un espectáculo es de \$10 000 para menores de edad y de \$15 000 para mayores de edad. Consideremos la tarifa T como una función de la edad x de una persona. La gráfica de T se muestra en la figura 1:

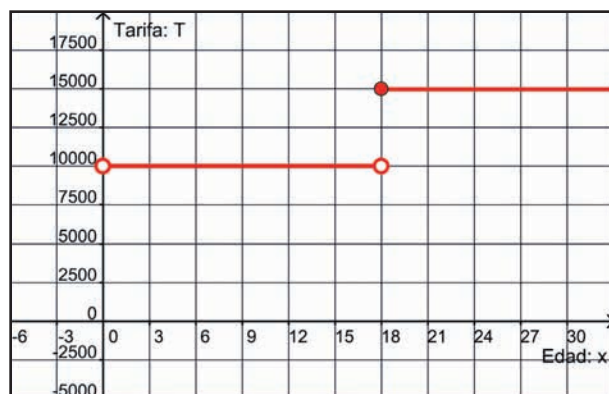


Figura 1

Podemos definir la función T así:

$$T(x) = \begin{cases} 10\,000 & \text{si } 0 \leq x < 18 \\ 15\,000 & \text{si } x \geq 18 \end{cases}$$

La función anterior está definida *a trozos* o *por partes*.

*Una función f está definida a **trozos** si en diferentes partes de su dominio está definida con expresiones distintas.*

Ejemplo 1

Defina cada una de las funciones de la figura 2; determine luego los siguientes valores funcionales: $f(3)$; $f(0)$; $f(-2)$; $g(2)$; $g(-1)$; $g(5)$; $g(-3)$

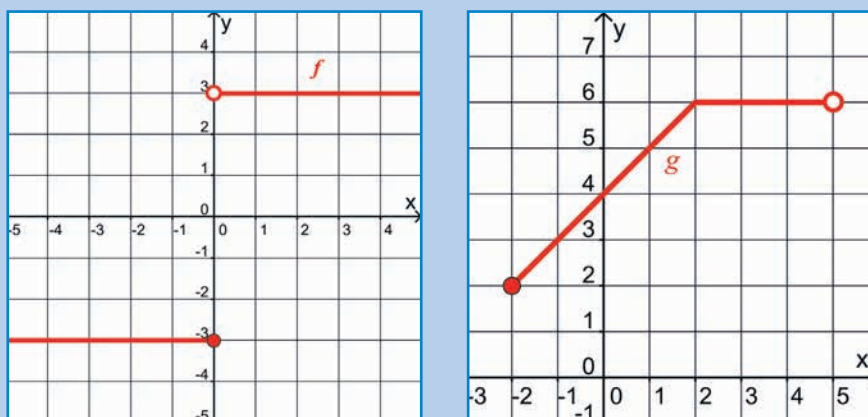


Figura 2

Solución

Los segmentos horizontales de la gráfica de f pertenecen a las rectas $y = -3$; $y = 3$. Definimos entonces la función haciendo las restricciones indicadas en la gráfica:

$$g(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } x \leq 0 \\ 3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Para hacer la definición de la función g , hallamos la ecuación de la recta que contiene al segmento inclinado: $y = x + 4$. El segmento horizontal pertenece a la recta $y = 6$. Haciendo las restricciones correspondientes tenemos:

$$g(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ 6 & \text{si } 2 < x < 5 \end{cases}$$

Valores funcionales:

$$f(3) = 3; f(0) = -3; f(-2) = -3; g(2) = 6; g(-1) = -1 + 4 = 3; \\ g(5): \text{no está definido}; g(-3): \text{no está definido}$$



Defina a trozos las funciones cuyas gráficas se muestran en la figura 3:

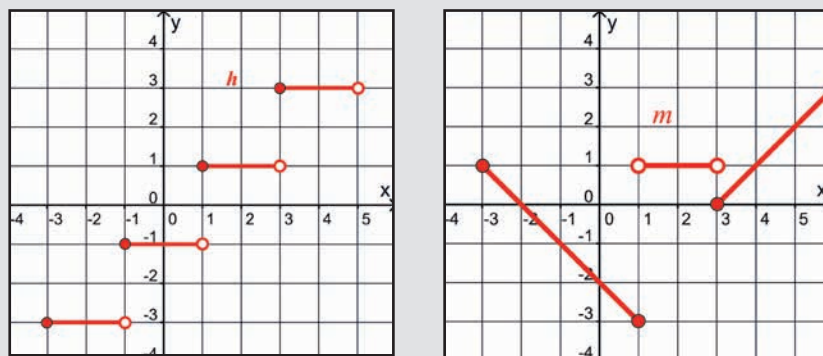


Figura 3

Ejemplo 2

Trace la gráfica de la función:

$$p(x) = \begin{cases} -x + 3, & -4 \leq x \leq 1 \\ 2x - 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

Solución

Trazamos las dos rectas y borramos la parte de ellas que no está en el intervalo correspondiente:

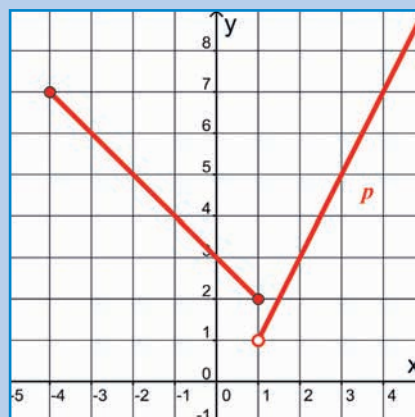


Figura 4

Ejemplo 3

En la oficina de correos, el costo de enviar una carta cuyo peso sea menor o igual a 10 gramos es de \$3 500; por cada gramo o fracción adicional se cobran \$500. Si p representa el peso de las cartas, y C el costo del envío, trace la gráfica y defina a trozos la función C .

Solución

De acuerdo a la información dada, la gráfica correspondiente a la función C es:

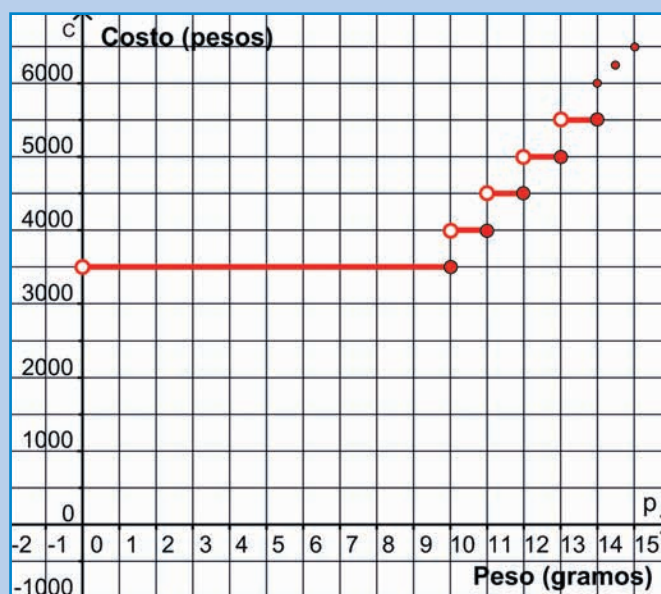


Figura 5

Definición a trozos:

$$C(p) = \begin{cases} 3500 & \text{si } 0 \leq p < 10 \\ 4000 & \text{si } 10 \leq p < 11 \\ 4500 & \text{si } 11 \leq p < 12 \\ 5000 & \text{si } 12 \leq p < 13 \\ 5500 & \text{si } 13 \leq p < 14 \\ \dots & \dots \end{cases}$$

Ejemplo 4

Considere la distancia D de un punto de la recta numérica al origen (figura 6) como una función de la coordenada del punto. Haga la gráfica de la función D y defínala como una función a trozos.

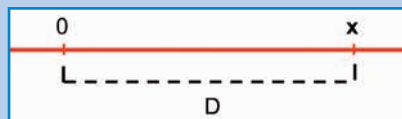


Figura 6

Solución

La siguiente tabla muestra la distancia D de varios puntos de la recta numérica al origen:

Coordenada del punto	0	2	-2	4	-4
D	0	2	2	4	4

La función D se llama también función *valor absoluto* y se representa con un par de barras: $| \quad |$. Esta función la definimos a trozos así:

$$D(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La gráfica de la función valor absoluto es:

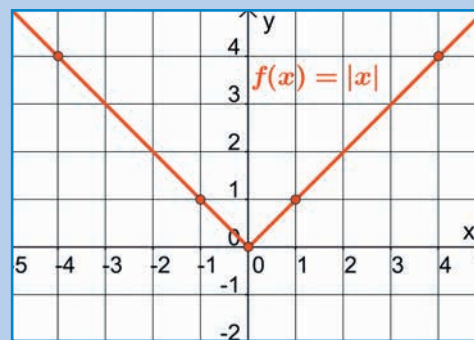


Figura 7



Resuelva la ecuación: $|y| = 4$

Los ejemplos 1 y 3 muestran funciones cuyas gráficas están formadas por segmentos horizontales en las cuales se han utilizado dos o más instrucciones (se han definido a trozos). No siempre se requieren varias instrucciones para definir una función cuya gráfica esté formada por varios segmentos como se aprecia en el ejemplo siguiente:

Ejemplo 5

Consideremos la *función que asigna a cada número real x el mayor entero que es menor o igual a x* (si el número es entero la función asigna el mismo número; si no lo es entonces asigna el entero más próximo que se encuentra a la izquierda, en la recta numérica). Esta función se llama función *mayor entero* y se simboliza $\llbracket x \rrbracket$.

Por ejemplo:

$$\llbracket 0 \rrbracket = 0, \quad \llbracket 1 \rrbracket = 1, \quad \llbracket 1.7 \rrbracket = 1, \quad \llbracket 2.55 \rrbracket = 2, \quad \llbracket -0.35 \rrbracket = -1, \quad \llbracket -1 \rrbracket = -1, \\ \llbracket -1.78 \rrbracket = -2, \quad \llbracket -3.5 \rrbracket = -4$$

Por tanto:

$$\llbracket x \rrbracket = \begin{array}{l} \begin{array}{l} \text{Z} \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 2 \\ \vdots \\ 3 \\ \vdots \\ \dots \\ \vdots \\ -1 \\ \vdots \\ -2 \\ \vdots \\ -3 \\ \vdots \\ \dots \end{array} \begin{array}{l} \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \text{si } 2 \leq x < 3 \\ \text{si } 3 \leq x < 4 \\ \dots \\ \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \text{si } -2 \leq x < -1 \\ \text{si } -3 \leq x < -2 \\ \dots \end{array} \end{array}$$

Gráfica de la función mayor entero:

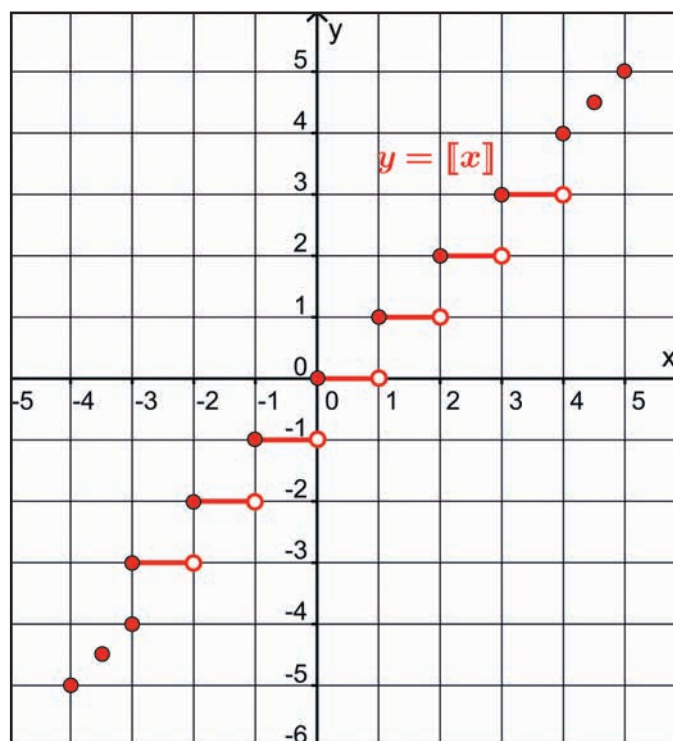


Figura 8

Notemos que solo se requirió de una instrucción para definirla y su gráfica consta de infinitos segmentos.

EJERCICIOS

I. Calcule los valores funcionales correspondientes a cada función:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 \\ -2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x & \text{si } -5 \leq x < -1 \\ x^2 + 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 4 \\ -5x + 2 & \text{si } 4 < x \leq 8 \end{cases}$$

$$1) \quad f(-3) = \quad \quad \quad f(1) = \quad \quad \quad f(4) =$$

$$2) \quad g(-4) = \quad \quad \quad g(-1) = \quad \quad \quad g(0) =$$

II. Haga la gráfica de cada función:

$$1) \quad f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x \leq 2 \\ -3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$2) \quad h(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x - 1 & \text{si } x < -3 \\ 2 & \text{si } x \geq -3 \end{cases}$$

$$3) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{si } x < 4 \\ x - 3 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

$$4) \quad f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \leq -1 \\ -1 & \text{si } -1 < x < 3 \\ -\frac{1}{3}x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

$$5) \quad g(x) = \begin{cases} 3x + 3 & \text{si } x < -2 \\ -3 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ -x + 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

III. Escriba el dominio y el rango de las funciones cuyas gráficas se muestran; luego defina, a trozos, cada una:

1)

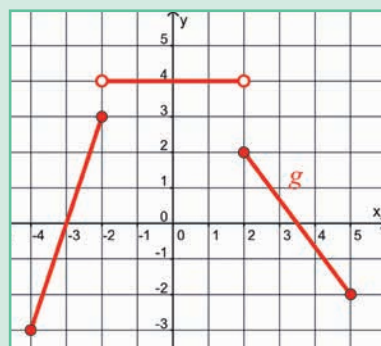


Figura 9

2)

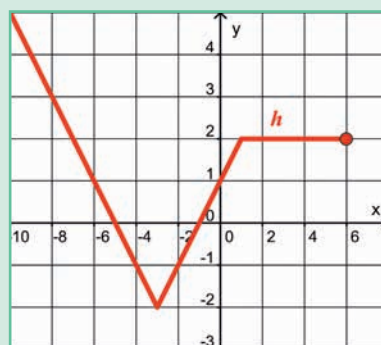


Figura 10

3)

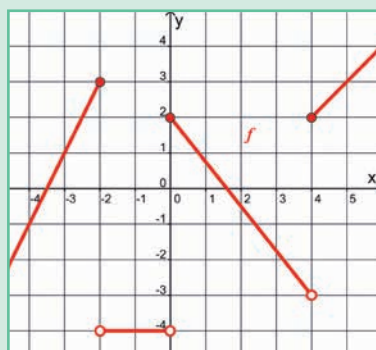


Figura 11

IV. Problemas:

- 1) El cargo básico en la facturación del servicio de agua en una ciudad es de \$5 000. Para un consumo no superior a 20 metros cúbicos se cobra el metro cúbico a \$2 000. Los metros cúbicos que se consuman por encima de 20 se cobran a \$3 000 cada uno.
 - a) ¿Cuál es el valor a pagar si hubo un consumo de 16 metros cúbicos?
 - b) ¿Cuál es el valor a pagar si hubo un consumo de 24.5 metros cúbicos?
 - c) Exprese el costo C en la facturación como una función del número de metros cúbicos x consumidos.
 - d) Haga la gráfica de la función C .
- 2) En cierta ciudad la carrera mínima en taxi cuesta \$4 000 la cual corresponde a recorridos de 50 unidades o menos (cada 100 metros recorridos el taxímetro avanza una unidad); por cada unidad mayor que 50, se cobra \$70.
 - a) Exprese el costo de una carrera como función de la cantidad de unidades marcadas por el taxímetro; indique el dominio.

- b) ¿Cuánto se debe pagar por un recorrido de 96 unidades?
- c) Trace la gráfica de la función.
- d) Si el costo de una carrera fue de \$11 000, ¿cuántas unidades marcó el taxímetro?

3) La tarifa, por persona, en un hotel es la siguiente: si el número de noches de hospedaje es menor o igual a 3, se paga \$50 000 por cada noche; la noche adicional vale \$40 000.

- a) ¿Cuánto paga una persona de hospedaje por 2 noches?, ¿por 5 noches?, ¿por 9 noches?
- b) Exprese el valor a pagar como una función de la cantidad de noches de hospedaje.
- c) Trace la gráfica de la función.
- d) ¿Cuántas noches se hospedó una persona que pagó \$390 000?

V. Preguntas de selección múltiple con **única** respuesta:

- 1) La función f que define la gráfica que se muestra en la figura 12, es:

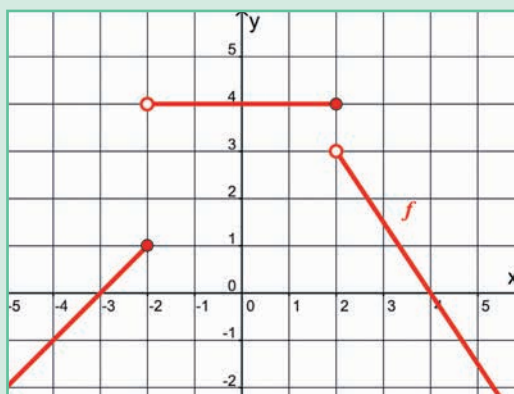


Figura 12

$$\text{A. } f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \leq -2 \\ -4 & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ \frac{3}{2}x + 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\text{B. } f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \leq -2 \\ 4 & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ -\frac{3}{2}x + 6 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\text{C. } f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \leq -1 \\ 4 & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ -\frac{3}{2}x + 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\text{D. } f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \leq -1 \\ -4 & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ \frac{3}{2}x + 6 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

2) De la función $g(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ -\frac{1}{2}x + 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$, el enunciado **falso** es:

A. $g(x) = -13$ si $x = -4$

B. la gráfica de g es

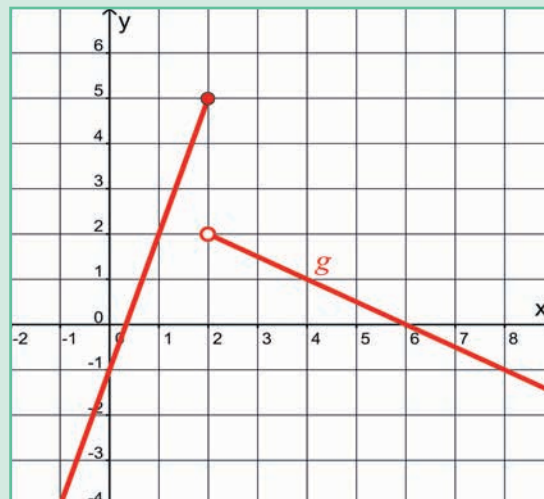


Figura 13

C. $g(5) = -\frac{1}{2}$

D. el rango de g es el intervalo $(-\infty, 5]$

1.5 TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES

Las funciones lineales que vimos en las secciones anteriores son de fácil representación en el plano cartesiano ya que solo requieren de dos puntos. Veremos ahora funciones que requieren de más puntos para trazar sus gráficas.

Una técnica muy útil para trazar la gráfica de una función consiste en examinar si se puede obtener a partir de la gráfica de una función ya conocida mediante ciertas *transformaciones geométricas*.

Al efectuar una transformación geométrica a la gráfica de una función, lo que resulta no es siempre la gráfica de alguna función. En la figura 1 se muestra la gráfica de una función f ; en la figura 2 la gráfica obtenida al hacer una traslación de la gráfica de f , y en la figura 3 la obtenida al realizar una rotación de la gráfica de f . ¿Cuál de esas transformaciones produce la gráfica de una función?

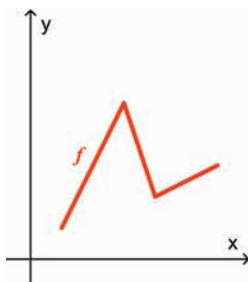


Figura 1

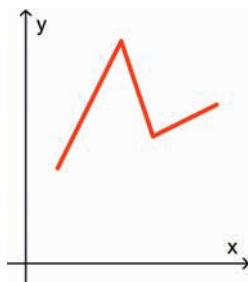


Figura 2

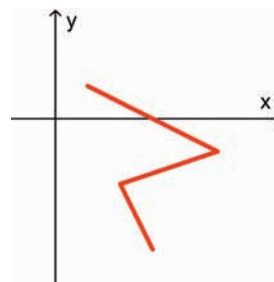


Figura 3

Veremos en esta sección algunas transformaciones geométricas que convierten gráficas de funciones en gráficas de nuevas *funciones*, cuyas ecuaciones se obtienen realizando operaciones algebraicas sencillas.

Ilustraremos las transformaciones que veremos con el efecto que producen en la gráfica de la función que aparece a continuación:

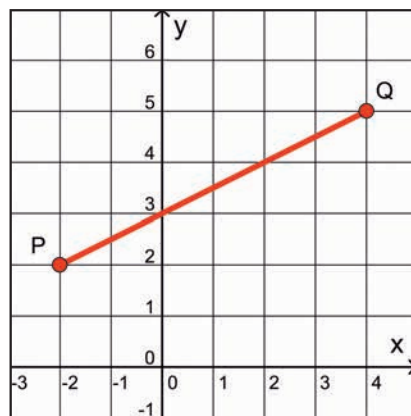


Figura 4



Compruebe que la gráfica de la figura 4 corresponde a la función:

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 3, -2 \leq x \leq 4$$



Determine el dominio y rango de f .

1.5.1 DESPLAZAMIENTOS VERTICALES

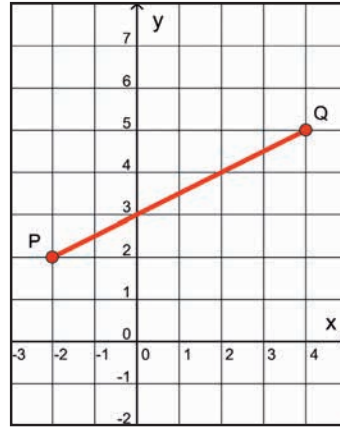


Figura 5



Dibuje en la figura 5 el segmento $P'Q'$ que se obtiene al desplazar 2 unidades *hacia arriba* el segmento PQ.



Determine las coordenadas de P' y de Q' .



Defina algebraicamente la función g cuya gráfica es el segmento $P'Q'$; indique dominio y rango de g .

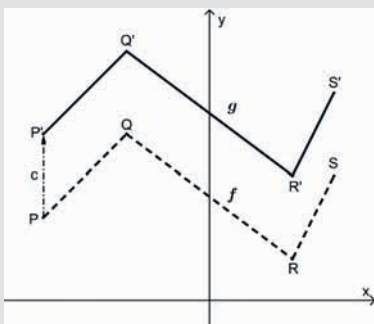


Compruebe que las ecuaciones correspondientes a f y a g cumplen la relación:
 $g(x) = f(x) + 2$.

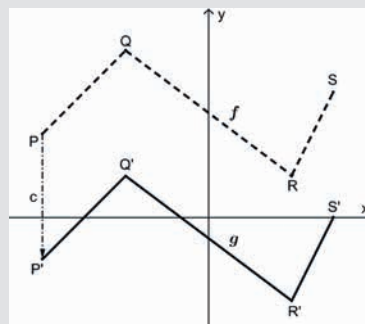
La siguiente propiedad nos dice cómo encontrar, de manera inmediata, la ecuación de la función g correspondiente a un desplazamiento vertical de la gráfica de una función f .

Sea $y = f(x)$, y c un número real

DESPLAZAMIENTO VERTICAL DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN



Sea c un número positivo. Al desplazar c unidades hacia *arriba* la gráfica de la función f se obtiene una función g cuya ecuación es $g(x) = f(x) + c$



Sea c un número positivo. Al desplazar c unidades hacia *abajo* la gráfica de la función f se obtiene una función g cuya ecuación es $g(x) = f(x) - c$



Los enunciados recíprocos de los anteriores también son ciertos. Escríbalos.

Ejemplo

En la figura 6, la gráfica que aparece en el medio, es la de la función valor absoluto $f(x) = |x|$. ¿Cuáles son las ecuaciones correspondientes a las funciones g y h ?

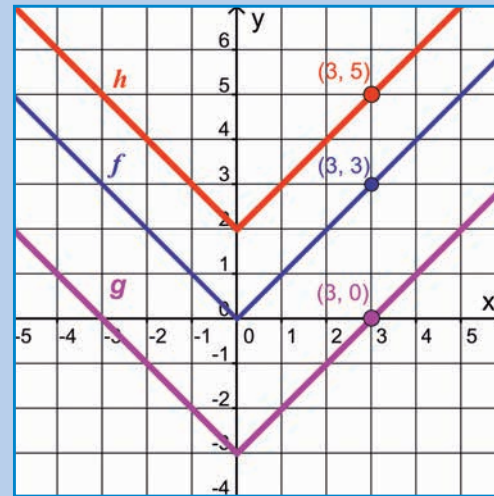


Figura 6

Solución

Como la gráfica de h se ha desplazado 2 unidades hacia arriba con respecto a la gráfica de f , la ecuación de h es: $h(x) = f(x) + 2 = |x| + 2$.

La gráfica de g se ha desplazado 3 unidades hacia abajo respecto a la gráfica de f , la ecuación de g es: $g(x) = f(x) - 3 = |x| - 3$.

1.5.2 DESPLAZAMIENTOS HORIZONTALES

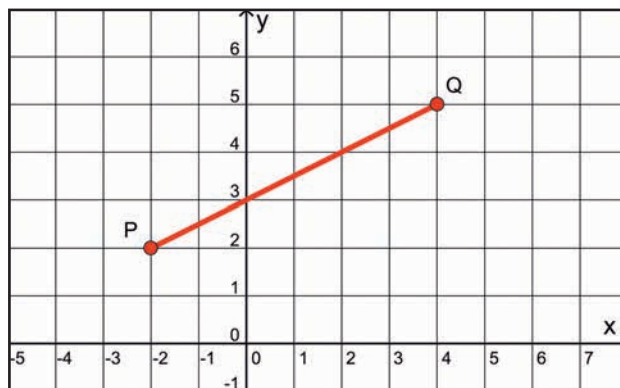


Figura 7



Dibuje en la figura 7 el segmento $P'Q'$ que se obtiene al desplazar 3 unidades *hacia la derecha* el segmento PQ .



Determine las coordenadas de P' y de Q' .



Defina algebraicamente la función g cuya gráfica es el segmento $P'Q'$; indique dominio y rango de g .

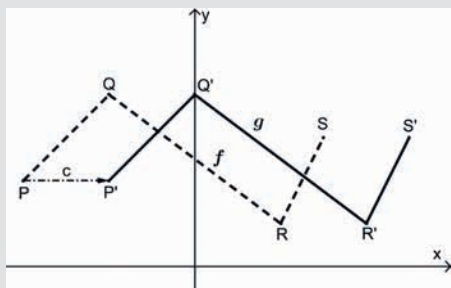


Compruebe que las ecuaciones correspondientes a f y a g cumplen la relación:
 $g(x) = f(x - 3)$.

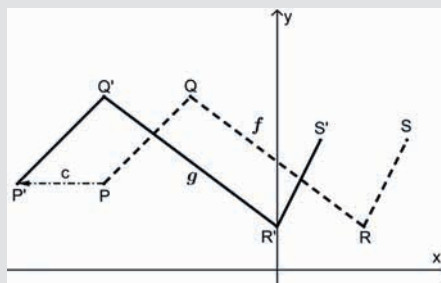
La siguiente propiedad nos dice cómo encontrar de manera inmediata la ecuación de la función g correspondiente a un desplazamiento horizontal de la gráfica de una función f :

Sea $y = f(x)$, y c un número real

DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN



Sea c un número positivo. Al desplazar c unidades hacia la *derecha* la gráfica de la función f se obtiene una función g cuya ecuación es

$$g(x) = f(x - c)$$


Sea c un número positivo. Al desplazar c unidades hacia la *izquierda* la gráfica de la función f se obtiene una función g cuya ecuación es

$$g(x) = f(x + c)$$

Ejemplo

¿Cuáles son las ecuaciones correspondientes a las funciones g y h de la figura 8?

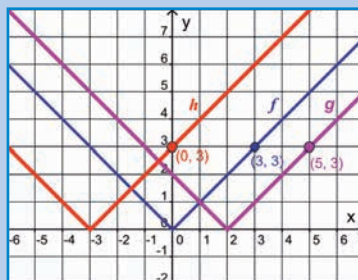


Figura 8

Solución

La gráfica de la función g se obtiene desplazando la gráfica de la función f , hacia la derecha 2 unidades; luego, la ecuación de g es: $g(x) = f(x - 2) = |x - 2|$.

La gráfica de la función h se obtiene desplazando la gráfica de la función f , hacia la izquierda 3 unidades; por lo tanto la ecuación de h es: $h(x) = f(x + 3) = |x + 3|$.

1.5.3 REFLEXIÓN DE UNA GRÁFICA EN LOS EJES COORDENADOS

Primero reflejemos una gráfica en el eje x :

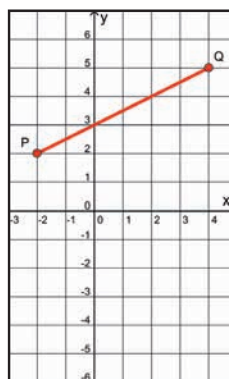


Figura 9



Dibuje en la figura 9 el segmento $P'Q'$ que se obtiene al *reflejar* el segmento PQ en el eje x .



Determine las coordenadas de P' y de Q' .



Defina algebraicamente la función g cuya gráfica es el segmento $P'Q'$; indique dominio y rango de g .



Compruebe que las ecuaciones correspondientes a f y a g cumplen la relación: $g(x) = -f(x)$

Ahora reflejemos una gráfica en el eje y :

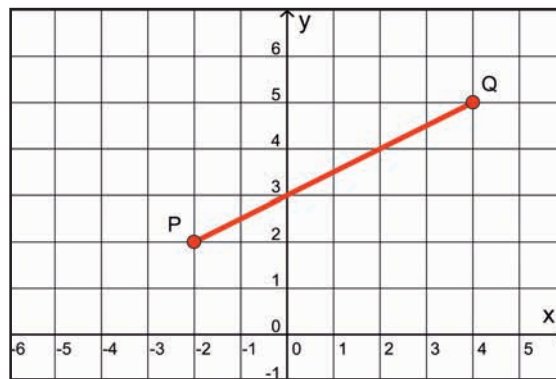


Figura 10

Pensamiento Matemático



Dibuje en la figura 10 el segmento $P'Q'$ que se obtiene al *reflejar* el segmento PQ en el eje y .



Determine las coordenadas de P' y de Q'



Defina algebraicamente la función g cuya gráfica es el segmento $P'Q'$; indique dominio y rango de g .

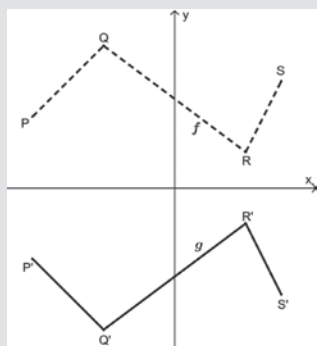


Compruebe que las ecuaciones correspondientes a f y a g cumplen la relación:
 $g(x) = f(-x)$

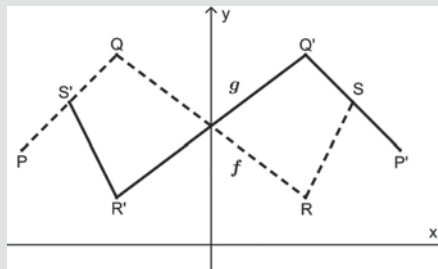
La siguiente propiedad nos indica cómo encontrar de manera inmediata la ecuación de la función g correspondiente a un reflejo en el eje x o en el eje y de la gráfica de una función f .

$$\text{Sea } y = f(x)$$

REFLEJO DE UNA GRÁFICA EN LOS EJES COORDENADOS



Al reflejar la gráfica de la función f en el eje x se obtiene la gráfica de una función g cuya ecuación es

$$g(x) = -f(x)$$


Al reflejar la gráfica de la función f en el eje y se obtiene la gráfica de una función g cuya ecuación es

$$g(x) = f(-x)$$

Ejemplo

Dada $f(x) = 2x - 3$, graficar las siguientes funciones:

a) $y = -f(x)$

b) $y = f(-x)$

Solución

a) La transformación corresponde a una reflexión en el eje x :

$$y = -f(x) = -(2x - 3)$$

$$y = -2x + 3$$

Al reflejar la recta $y = 2x - 3$ en el eje x se obtiene la recta $y = -2x + 3$

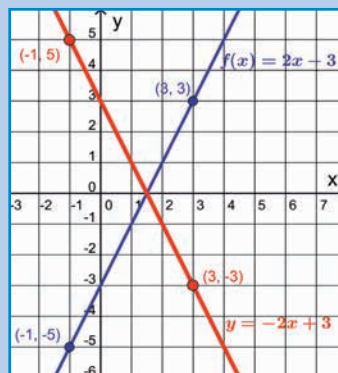


Figura 11

b) La transformación corresponde a una reflexión en el eje y :

$$y = f(-x) = 2(-x) - 3$$

$$y = -2x - 3$$

Al reflejar la recta $y = 2x - 3$ en el eje y se obtiene la recta $y = -2x - 3$

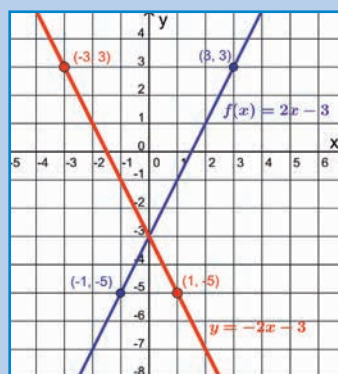


Figura 12

1.5.4 ALARGAMIENTO O COMPRESIÓN VERTICAL

Comenzamos con un *alargamiento vertical*:

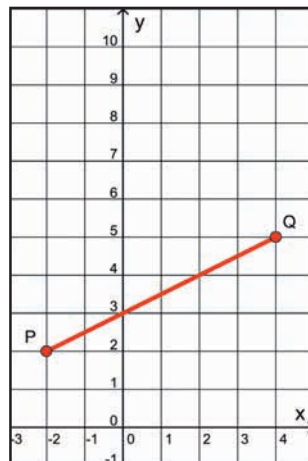


Figura 13



Dibuje en la figura 13 el segmento $P'Q'$ que se obtiene cuando la segunda coordenada de cada punto (o coordenada y) se multiplica por 2.



Determine las coordenadas de P' y de Q' .



Defina algebraicamente la función g cuya gráfica es el segmento $P'Q'$; indique dominio y rango de g .



Compruebe que las ecuaciones correspondientes a f y a g cumplen la relación:
 $g(x) = 2f(x)$

Ahora una *compresión vertical*:

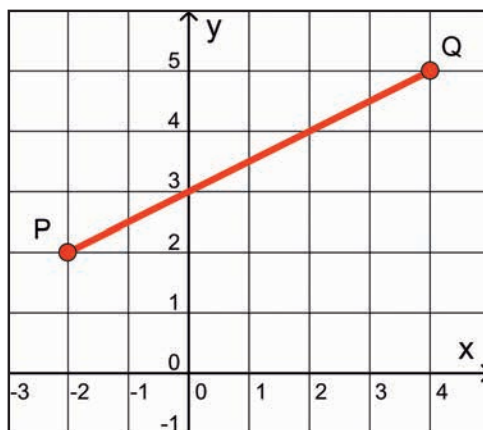


Figura 14



Dibuje en la figura 14 el segmento $P'Q'$ que se obtiene cuando la segunda coordenada de cada punto (o coordenada y) se divide por 2.



Determine las coordenadas de P' y de Q' .



Defina algebraicamente la función g cuya gráfica es el segmento $P'Q'$; indique dominio y rango de g .

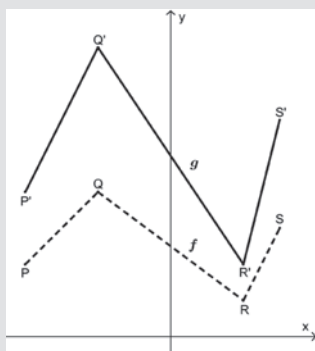


Compruebe que las ecuaciones correspondientes a f y a g cumplen la relación:
$$g(x) = \frac{1}{2}f(x)$$

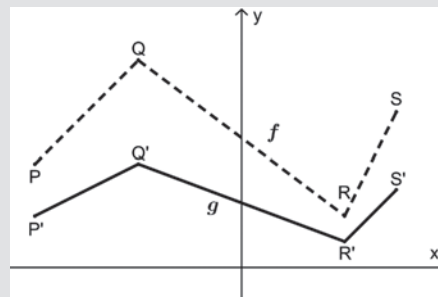
La siguiente propiedad nos indica cómo encontrar de manera inmediata la ecuación de la función g correspondiente a un desplazamiento vertical de la gráfica de una función f .

Sea $y = f(x)$, y c un número real

ALARGAMIENTO O COMPRESIÓN VERTICAL



Al multiplicar la coordenada y de cada punto de la gráfica de una función f por un número c , $c \geq 1$, se obtiene la gráfica de una función g cuya ecuación es $g(x) = cf(x)$. La nueva gráfica es un *alargamiento vertical* de la anterior.



Al multiplicar la coordenada y de cada punto de la gráfica de una función f por un número c , $0 < c < 1$, se obtiene la gráfica de una función g cuya ecuación es $g(x) = cf(x)$. La nueva gráfica es una *compresión vertical* de la anterior.

Ejemplo

Dada $f(x) = |x|$, graficar las siguientes funciones:

a) $y = 2f(x)$

b) $y = \frac{1}{2}f(x)$

Solución

a) La transformación $y = 2f(x)$ corresponde a un alargamiento vertical al doble:

$$y = 2f(x) = 2|x|$$

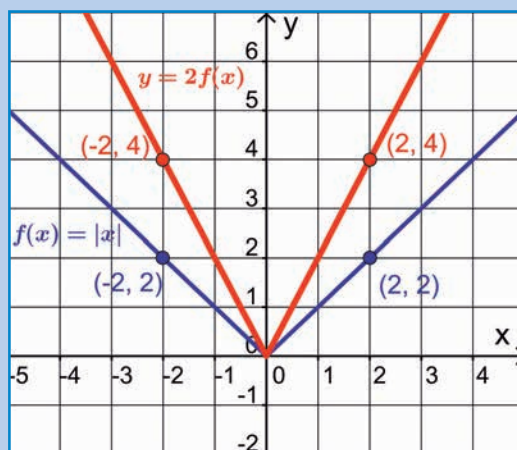


Figura 15

b) La transformación $y = \frac{1}{2}f(x)$ corresponde a una compresión vertical a la mitad:

$$y = \frac{1}{2}f(x) = \frac{1}{2}|x|$$

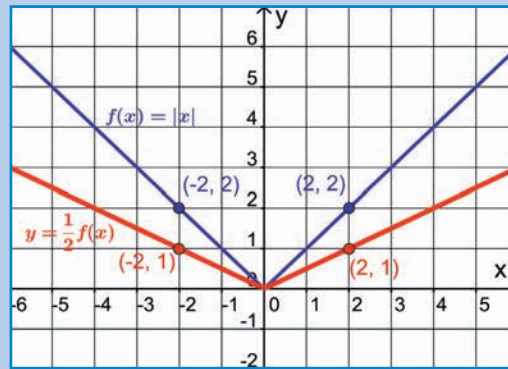


Figura 16



Dada la función $h(x) = -3x + 6$ grafique las siguientes transformaciones:

a. $y = 3h(x)$

b. $y = \frac{1}{3}h(x)$

1.5.5 ALARGAMIENTO O COMPRESIÓN HORIZONTAL

Primero un *alargamiento horizontal*:

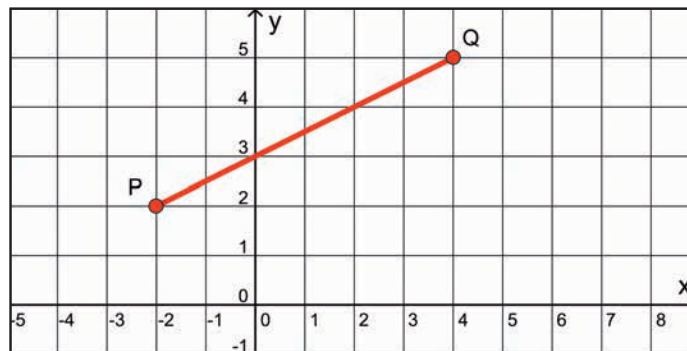


Figura 17

 Dibuje en la figura 17 el segmento $P'Q'$ que se obtiene cuando la primera coordenada de cada punto (o coordenada x) se multiplica por 2.

 Determine las coordenadas de P' y de Q' .

 Defina algebraicamente la función g cuya gráfica es el segmento $P'Q'$; indique dominio y rango de g .

 Compruebe que las ecuaciones correspondientes a f y a g cumplen la relación:
$$g(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right)$$

Ahora una *compresión horizontal*:

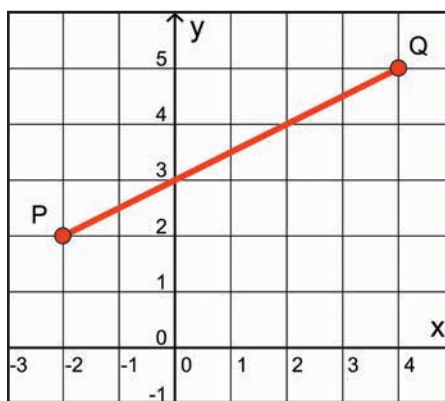


Figura 18



Dibuje en la figura 18 el segmento $P'Q'$ que se obtiene cuando la primera coordenada de cada punto (o coordenada x) se divide por 2.



Determine las coordenadas de P' y de Q' .



Defina algebraicamente la función g cuya gráfica es el segmento $P'Q'$; indique dominio y rango de g .

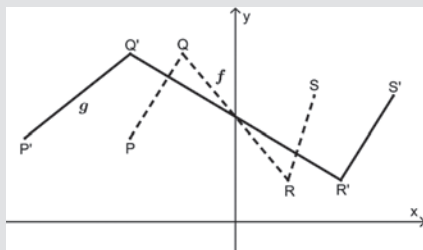


Compruebe que las ecuaciones correspondientes a f y a g cumplen la relación:
 $g(x) = f(2x)$.

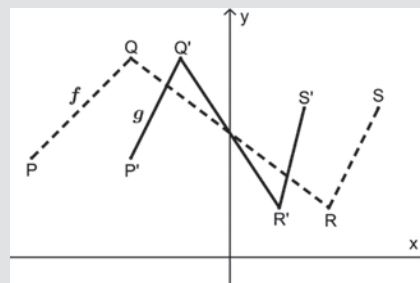
La siguiente propiedad nos indica cómo encontrar de manera inmediata la ecuación de la función g correspondiente a un alargamiento o compresión horizontal de la gráfica de una función f .

Sea $y = f(x)$, y c un número real

ALARGAMIENTO O COMPRESIÓN HORIZONTAL



Al multiplicar la coordenada x de cada punto de la gráfica de una función f por un número c , $c > 1$, se obtiene la gráfica de una función g cuya ecuación es $g(x) = f\left(\frac{1}{c}x\right)$. La nueva gráfica es un *alargamiento horizontal* de la anterior.



Al dividir la coordenada x de cada punto de la gráfica de una función f por un número c , $c > 1$, se obtiene la gráfica de una función g cuya ecuación es $g(x) = f(cx)$. La nueva gráfica es una *compresión horizontal* de la anterior.

Ejemplo

Dado $f(x) = |x|$, graficar las siguientes funciones:

a) $y = f(2x)$

b) $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$

Solución

a) La transformación corresponde a una compresión horizontal a la mitad:

$$y = f(2x) = |2x|$$

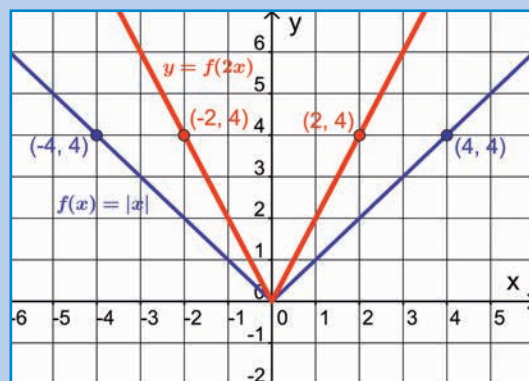


Figura 19

b) La transformación corresponde a una alargamiento horizontal al doble:

$$y = f\left(\frac{1}{2}x\right) = \left|\frac{1}{2}x\right|$$

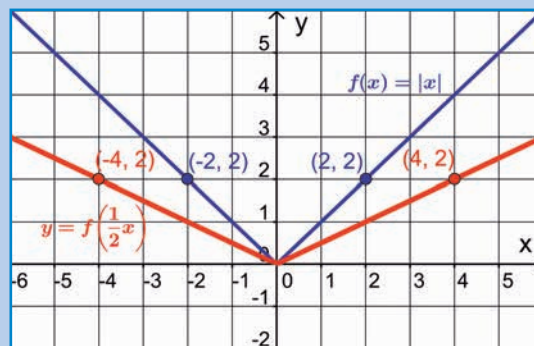


Figura 20



Dada la función $h(x) = 2x - 1$ grafique las siguientes transformaciones:

a. $y = h(3x)$

b. $y = h\left(\frac{1}{3}x\right)$

Conviene familiarizarnos con las gráficas de algunas *funciones básicas*, las cuales se utilizan con bastante frecuencia:

FUNCIÓN CONSTANTE

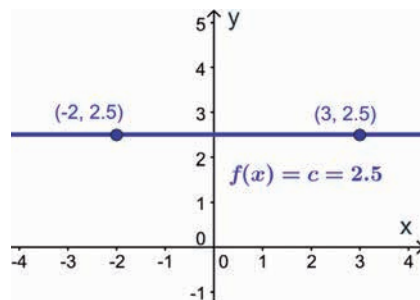


Figura 21

FUNCIÓN IDÉNTICA

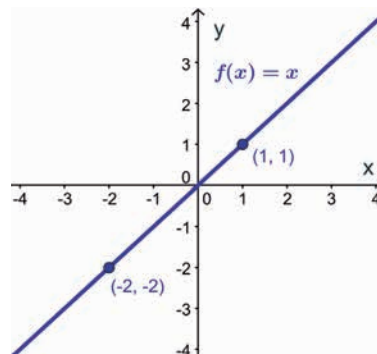


Figura 22

FUNCIÓN CUADRÁTICA

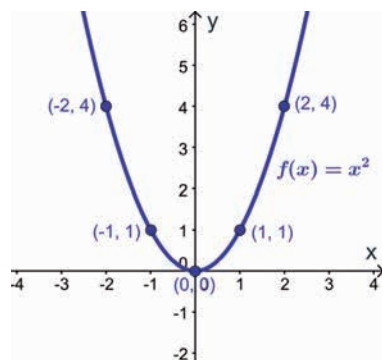


Figura 23

FUNCIÓN CÚBICA

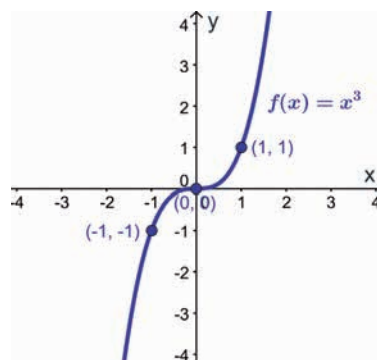


Figura 24

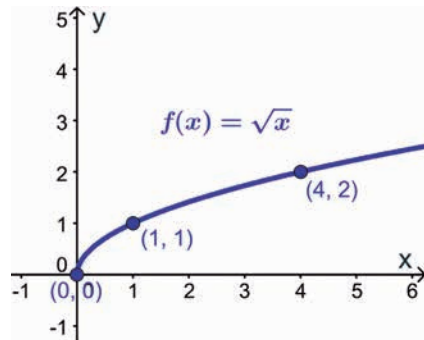
FUNCIÓN RAÍZ CUADRADA

Figura 25

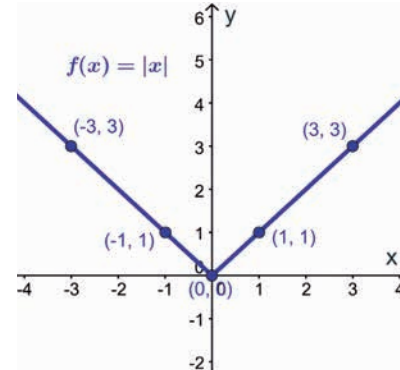
FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO

Figura 26

1.5.6 TRANSFORMACIONES SUCESIVAS

Después de realizada una transformación a la gráfica de una función, se puede realizar otra transformación a la nueva gráfica y así sucesivamente. El orden en que se van realizando las transformaciones está implícito en la escritura, comenzando por lo indicado en el paréntesis.

Ejemplo 1

Describe cómo se puede obtener la gráfica de cada una de las siguientes funciones a partir de la gráfica de la función f .

a) $y = -5 f(x - 4) + 6$

b) $y = \frac{1}{2} f(-x) - 3$

Solución

- a) La gráfica de f se desplaza 4 unidades hacia la derecha, se alarga verticalmente 5 veces, se refleja en el eje x y finalmente se desplaza 6 unidades hacia arriba.
- b) La gráfica de f se refleja en el eje y , se acorta verticalmente por $\frac{1}{2}$ y por último se desplaza 3 unidades hacia abajo.

Ejemplo 2

Escriba la ecuación que representa cada paso en la transformación que se indica sobre la función $g(x) = \sqrt{x}$:

La gráfica de g se desplaza 3 unidades a la izquierda, luego se refleja en el eje x , y finalmente se desplaza hacia abajo 5 unidades.

Solución

1. La gráfica de g se desplaza 3 unidades a la izquierda:

$$g_1(x) = g(x + 3) = \sqrt{x + 3}$$

2. Luego se refleja en el x :

$$g_2(x) = -g_1(x) = g(x + 3) = -\sqrt{x + 3}$$

3. Finalmente se desplaza hacia abajo 5 unidades:

$$g_3(x) = g_2(x) - 5 = -g_1(x) - 5 = -g(x + 3) - 5 = -\sqrt{x + 3} - 5$$

Luego la función que se obtiene es: $y = -\sqrt{x + 3} - 5$

Ejemplo 3

$y = -2 f(x - 3) + 1$ indica la siguiente sucesión de transformaciones: desplazamiento de 3 unidades a la derecha, alargamiento vertical por 2, reflejo en el eje x , desplazamiento vertical de 1 unidad hacia arriba (similar al orden en que se realizan las operaciones aritméticas).

Ilustremos lo anterior para el caso de la función $f(x) = x^2$. Señalamos con un número cada gráfica para indicar el orden en que vamos realizando las transformaciones. Para facilitar el trazado hemos escogido tres puntos de referencia: $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$; seguimos la pista a los correspondientes puntos que se obtienen con cada transformación para trazar cada parábola:

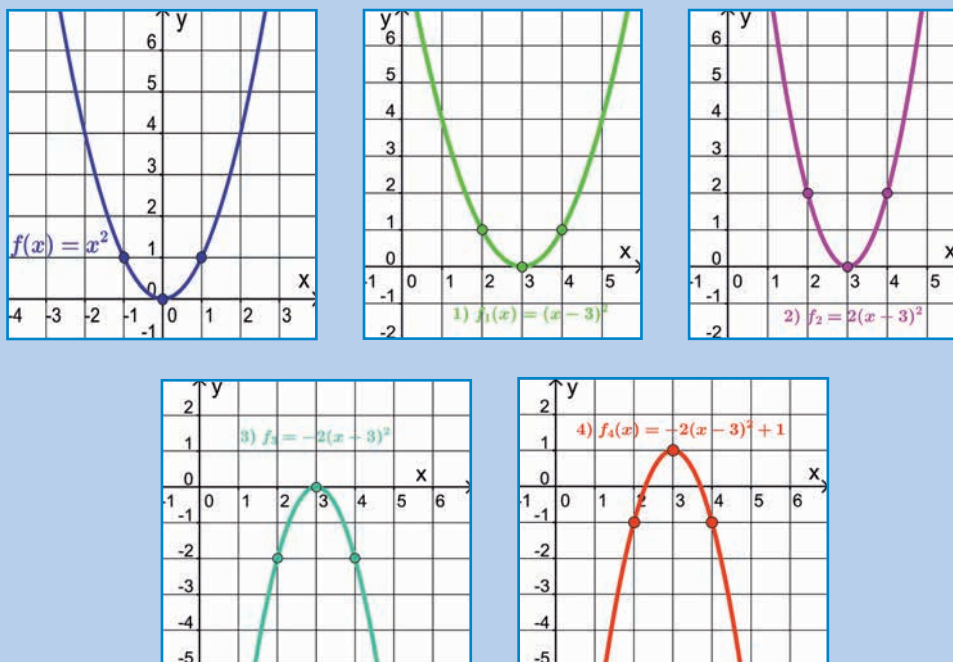


Figura 27

En un solo plano cartesiano:

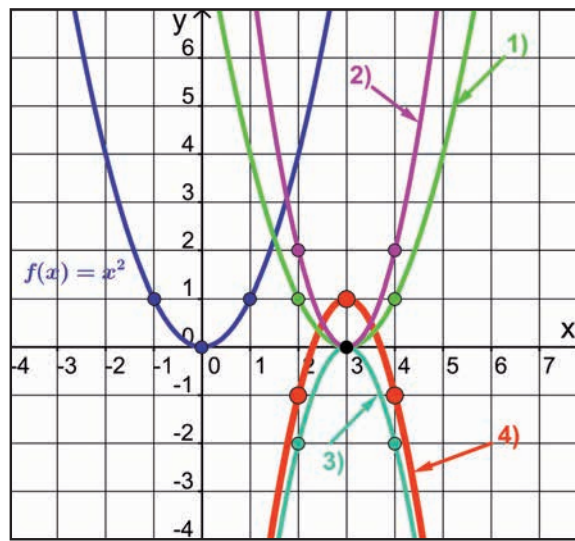


Figura 28



En la tabla se presentan transformaciones particulares de una función. Descríbalas verbalmente.

	Para trazar la gráfica de	a la gráfica de la función $y = f(x)$ la tenemos que
1	$y = f(x) + 2$	desplazar 2 unidades hacia arriba
2	$y = f(x) - 2$	
3	$y = f(x + 2)$	
4	$y = f(x - 2)$	
5	$y = -f(x)$	

6	$y = f(-x)$	
7	$y = 2 f(x)$	
8	$y = \frac{1}{2} f(x)$	
9	$y = f(2x)$	
10	$y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$	

Tabla 1

RESUMEN



Elabore una tabla resumen de las transformaciones estudiadas en esta sección: si conocemos la gráfica de $y = f(x)$,

	Para trazar la gráfica de	a la gráfica de la función $y = f(x)$ la tenemos que
1	$y = f(x) + c$	desplazar c unidades hacia arriba , si $c > 0$ y c unidades hacia abajo si $c < 0$
2	$y = f(x + c)$	
3	$y = -f(x)$	
4	$y = f(-x)$	
5	$y = cf(x)$	
6	$y = f(cx)$	

Tabla 2

EJERCICIOS

- I. Suponga que se da la gráfica de una función f . Describa cómo se puede obtener la gráfica de cada una de las siguientes funciones a partir de la gráfica de f :

1. $y = f(x - 8)$ _____

2. $y = f(x) + 7$ _____

3. $y = -f(x + 6)$ _____

4. $y = f(2x) - 5$ _____

5. $y = f(x + 11) - 2$ _____

6. $y = -\frac{1}{2}f(x - 4)$ _____

7. $y = -3f(-x) + 1$ _____

8. $y = f\left(\frac{1}{4}x\right) - 8$ _____

- II. Se da la descripción verbal de las transformaciones que se realizan a partir de la gráfica de cada función. Haga la gráfica y escriba la ecuación que representa dichas transformaciones:

1. Función: $y = x^2$; desplazar 3 unidades a la derecha, reflejar en el eje x y subir 4 unidades.
2. Función: $y = |x|$; reflejar en el eje x , alargar verticalmente al doble y bajar 6 unidades.
3. Función: $y = x^3$; reflejar en el eje y , acortar verticalmente a la mitad y reflejar en el eje x .
4. Función: $y = \sqrt{x}$; desplazar 4 unidades a la izquierda, reflejar en el eje x , alargar verticalmente al triple y subir 6 unidades.
5. Función: $y = x^2$; desplazar 2 unidades a la izquierda, reflejar en el eje x , alargar horizontalmente al doble y bajar 3 unidades.

III. Describa cómo se puede obtener la gráfica de cada función a partir de una de las gráficas de las funciones básicas (figuras 21 a 26 de esta sección).

1) $h(x) = (x - 2)^2 + 5$

2) $f(x) = -2|x - 4|$

3) $g(x) = -\sqrt{x + 3} - 1$

4) $h(x) = 3x + 1$

5) $f(x) = \frac{1}{2}|x| - 3$

6) $g(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^2$

7) $g(x) = \frac{1}{2}x^3 - 6$

8) $f(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{x - 4}$

9) $f(x) = 2\sqrt{-x} + 3$

10) $g(x) = -2(x + 3)^2$

11) $h(x) = |x + 2| - 1$

12) $h(x) = 2(x + 3)^3$

IV. La gráfica de la función g se muestra a continuación,

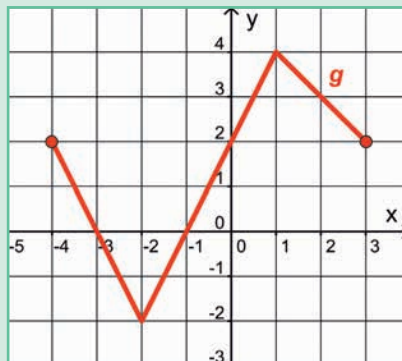


Figura 29

Trace la gráfica de las siguientes funciones:

1) $f(x) = -g(x + 3)$

2) $f(x) = \frac{1}{2}g(x) - 3$

3) $f(x) = -g(-x) + 3$

4) $f(x) = -2g(x - 3)$

5) $f(x) = g(x + 3) - 2$

6) $f(x) = g(-2x) + 3$

V. El punto $P = (2, 5)$ está en la gráfica de $y = f(x)$; en qué punto se transforma P de acuerdo con cada transformación:

1) $y = 2f(x)$

2) $y = f(x + 2) - 3$

3) $y = -f(-x)$

4) $y = -f(x - 3) + 4$

- VI. La gráfica de la función $f(x) = |x|$ pasa por los puntos $(-2, 2)$, $(0, 0)$, $(3, 3)$.
¿Con qué transformación la gráfica que se obtiene pasa respectivamente por los puntos $(0, 1)$, $(2, 3)$, $(5, 0)$?
- VII. En la figura 30 se muestra la gráfica de $y = f(x)$. Relacione cada una de las ecuaciones con su gráfica:

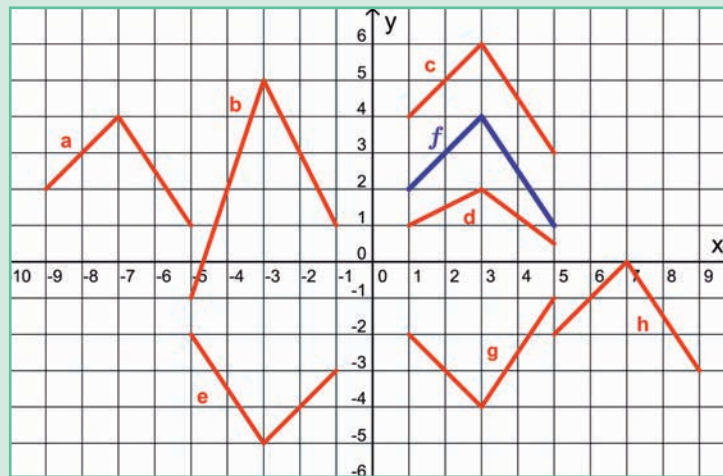


Figura 30

- | | | | |
|--------------------------|-----|-----------------------|-----|
| 1) $y = f(x) + 2$ | () | 2) $y = f(x - 4) - 4$ | () |
| 3) $y = \frac{1}{2}f(x)$ | () | 4) $y = f(x + 10)$ | () |
| 5) $y = -f(x)$ | () | 6) $y = 2f(-x) - 3$ | () |
| 7) $y = -f(-x) - 1$ | () | | |

VIII. Dadas las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = x$, $m(x) = |x|$ y $p(x) = x^3$. Halle la ecuación correspondiente a cada una de las siguientes transformaciones.

1) $y = 2f(x + 1)$

2) $y = g(x - 1) + 3$

3) $y = -4h(x - 2)$

4) $y = m(2x) - 3$

5) $y = p(x - 1)$

6) $y = f(2x) - 3$

7) $y = h(-4x) - 1$

8) $y = -2m(x) + 1$

9) $y = -2p(x) - 4$

10) $y = -2g(3x)$

11) $y = h(x + 1) + 2$

12) $y = f(-x) + 2$

13) $y = -m\left(\frac{1}{2}x\right)$

14) $y = -g(-3x)$

IX. Trace la gráfica de cada función:

1) $f(x) = (x - 2)^2 + 3$

2) $f(x) = (x + 4)^3 - 3$

3) $f(x) = -|x| + 2$

4) $f(x) = -\sqrt{x + 2}$

5) $f(x) = -2(x + 2)^2$

6) $f(x) = -(x - 4)^3$

7) $f(x) = -\sqrt{-x} + 2$

8) $f(x) = 2|x - 3|$

9) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3$

10) $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x + 4}$

11) $f(x) = -\frac{1}{2}|x + 1| - 3$

12) $f(x) = -3(x + 2)^2 - 1$

X. Exprese la función g en términos de la función f :

1)

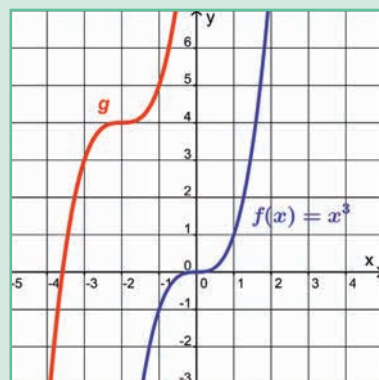


Figura 31

2)

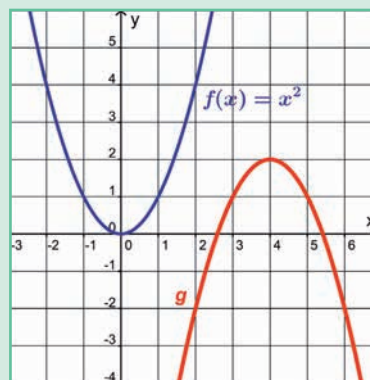


Figura 32

3)

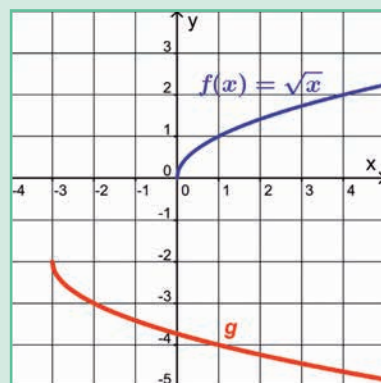


Figura 33

4)

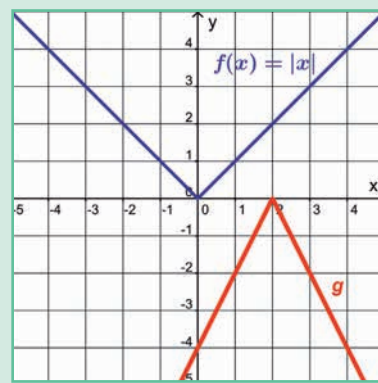


Figura 34

1.6 OPERACIONES CON FUNCIONES

ACTIVIDAD INICIAL



Se tiene una caja cuyas dimensiones se muestran en la figura 1. El cm^2 de material que se utiliza para construir las caras laterales cuesta \$5 mientras que el de la base o la tapa cuesta \$6.

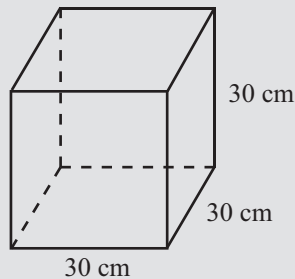


Figura 1

- 1) ¿Cuál es el costo del material, C_l , utilizado para construir las caras laterales?
- 2) ¿Cuál es el costo del material, C_b , para la base y la tapa?
- 3) ¿Cuál es el costo total del material, C , para toda la caja?



Consideremos una caja cúbica de arista x (figura 2) con los costos de materiales como en la actividad anterior.

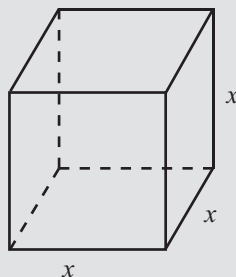


Figura 2

- 4) Exprese C_l en función de x .
- 5) Exprese C_B en función de x .
- 6) Exprese C en términos de las funciones C_l y C_B .
- 7) Exprese C en función de x .

Con las funciones C_l y C_B de la actividad anterior se definió una nueva función C que es la suma de ellas: $C = C_l + C_B$. En general, si se tienen dos funciones f y g , la **función suma** de ellas, escrita $f + g$, la definimos sumando las expresiones algebraicas de f y g .

Por ejemplo, si: $f(x) = 5x - 1$, $g(x) = -2x + 3$, definimos $f + g$ así:

$$\begin{aligned}
 (f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\
 &= (5x - 1) + (-2x + 3) \\
 &= 3x + 2
 \end{aligned}$$

Ejemplo

Dadas las funciones $h(x) = 3x + 5$, y $t(x) = \sqrt{x + 4}$, halle:

$$(h + t)(5)$$

$$(h + t)(-8)$$

Solución

$$1) (h + t)(5) = h(5) + t(5) = (3 \cdot (5) + 5) + \sqrt{5 + 4} = 20 + 3 = 23$$

2) Observemos que en este caso $h(-8) = 3(-8) + 5 = -19$, pero, $t(-8) = \sqrt{-8 + 4} = \sqrt{-4}$, no es un número real. En este caso, al no estar definida t en -8 , tampoco queda definida $h + t$ en -8 .

En el ejemplo anterior determinamos primero el dominio de las funciones h y g ; h está definida en los números reales, o sea en el intervalo $(-\infty, \infty)$, mientras que t lo está para los números reales mayores o iguales que -4 , o sea en el intervalo $[-4, \infty)$. La función $h + t$ queda definida solamente para aquellos valores en los cuales h y t están definidas simultáneamente, es decir, en la intersección de sus dominios:

$$\begin{aligned} \text{dom } h &= (-\infty, \infty) & \text{dom } t &= [-4, \infty) \\ \text{dom}(h + t) &= \text{dom } h \cap \text{dom } t = (-\infty, \infty) \cap [-4, \infty) = [-4, \infty). \end{aligned}$$



Figura 3

Volviendo a las funciones $f(x) = 5x - 1$, $g(x) = -2x + 3$, conseguimos con ellas otras funciones: la **función resta**, $f - g$, la **función multiplicación**, fg y la **función división**, $\frac{f}{g}$, efectuando las operaciones respectivas:

$$\begin{aligned}(f - g)(x) &= f(x) - g(x) \\ &= (5x - 1) - (-2x + 3) \\ &= 5x - 1 + 2x - 3 \\ &= 7x - 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(fg)(x) &= f(x)g(x) \\ &= (5x - 1)(-2x + 3) \\ &= -10x + 15x + 2x - 3 \\ &= -10x + 17x - 3\end{aligned}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{5x - 1}{-2x + 3}$$

Las funciones anteriores se definen en la intersección de los dominios, con la salvedad de que para la división hay que excluir aquellos valores de x donde el denominador se hace cero (en este ejemplo hay que excluir a $\frac{3}{2}$).

 Si $f(x) = 3x - 2$ y $g(x) = x^2 - 3x$, encuentre $f + g$, $g - f$, fg , $\frac{f}{g}$, los dominios y luego calcule:

a) $(f + g)(-3) =$

b) $(g - f)(0) =$

c) $(fg)(2) =$

d) $\left(\frac{f}{g}\right)(-1) =$

Operaciones con funciones

Dadas las funciones f y g , determinamos primero el dominio de cada una y definimos con ellas las funciones suma, resta, multiplicación y división, denotadas respectivamente $f + g$, $f - g$, fg , $\frac{f}{g}$, así :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Estas tienen como dominio la intersección de los dominios de f y de g , esto es: $\text{dom } f \cap \text{dom } g$; en la división excluimos en el dominio los valores de x para los cuales $g(x) = 0$

EJERCICIOS

I. Dadas las funciones $g(x) = -3x + 4$ y $h(x) = \frac{3}{2}x - 2$, halle:

1) $(h + g)(5)$

2) $(g - h)(-2)$

3) $(hg)(4)$

4) $\left(\frac{g}{h}\right)(2)$

II. Dadas las gráficas de las funciones f y g , halle el dominio y rango de cada una de ellas y estime:

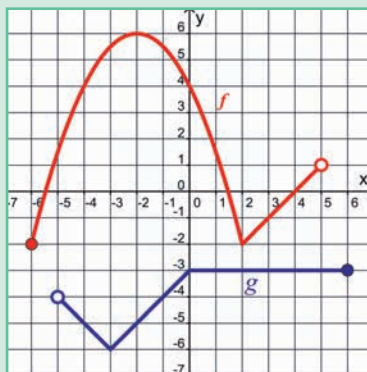


Figura 4

- | | |
|----------------------------------|-----------------------------------|
| 1) $(f + g)(3)$ | 2) $(g - f)(2)$ |
| 3) $(fg)(-4)$ | 4) $\left(\frac{g}{f}\right)(-2)$ |
| 5) $\left(\frac{f}{g}\right)(4)$ | 6) $(f - g)(6)$ |
| 7) $(gf)(0)$ | 8) $(g + f)(-6)$ |
| 9) $(g + f)(-1)$ | 10) $(f - g)(-3)$ |

III. Encuentre $f + g$, $g - f$, fg , $\frac{f}{g}$,

$$f(x) = 2x + 5, \quad g(x) = -3x + 2$$

$$f(x) = -\frac{4}{3}x - 2, \quad g(x) = \frac{2}{3}x + 4$$

$$f(x) = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{2}, \quad g(x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{3}$$

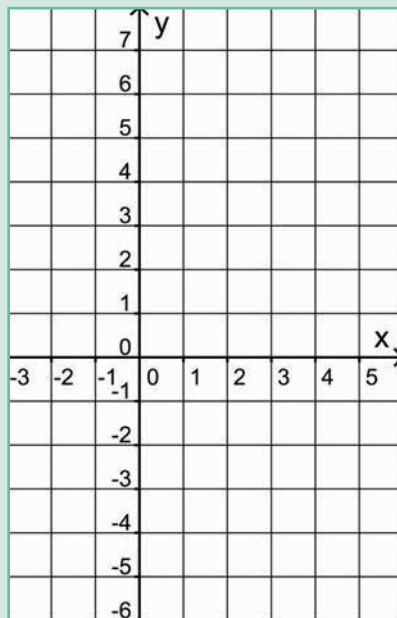
IV. Halle $f + g$, $f - g$, $h + m$, $h - m$ y el dominio de cada una:

$$f(x) = -x + 2, \text{ si } -2 \leq x \leq 4 \quad g(x) = 2x - 1, \text{ si } -2 \leq x \leq 4$$

$$h(x) = -\frac{1}{2}x + 1, \text{ si } -2 \leq x \leq 8 \quad m(x) = \frac{3}{2}x - 2, \text{ si } -4 \leq x \leq 6$$

V. Represente gráficamente, en el mismo plano, las funciones del ejercicio anterior y trace la gráfica que se indica en cada caso.

1) $f + g$



1) $f - g$

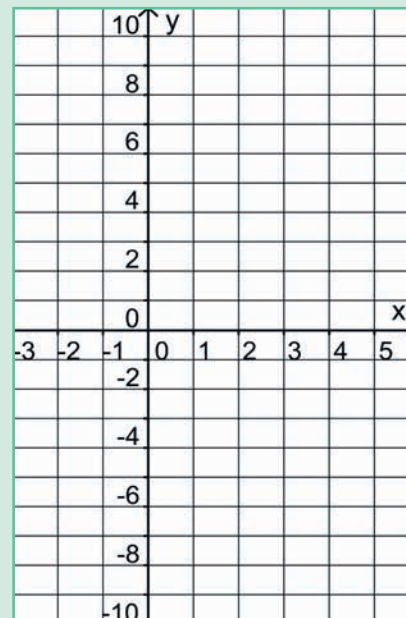


Figura 5

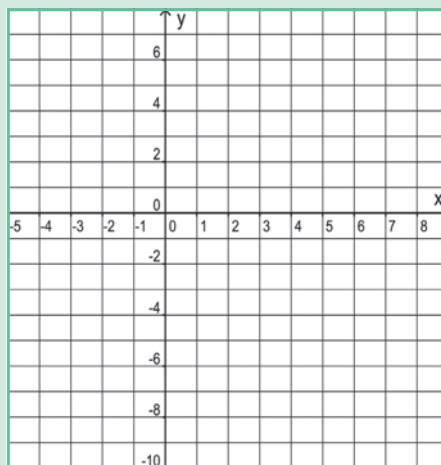
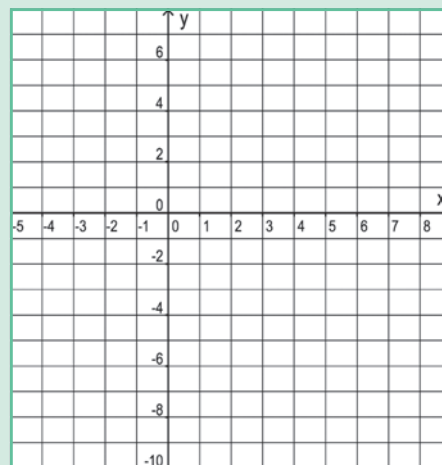
2) $h + m$ 2) $h - m$ 

Figura 6

VI. Utilice las gráficas de las funciones f y g , para trazar la gráfica de $f + g$ y $f - g$

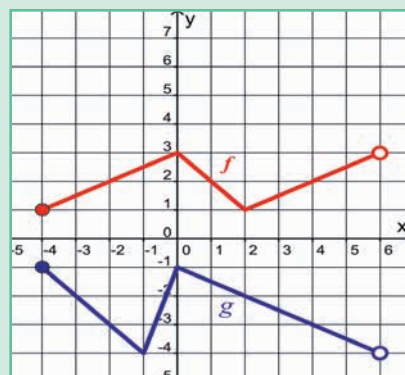


Figura 7

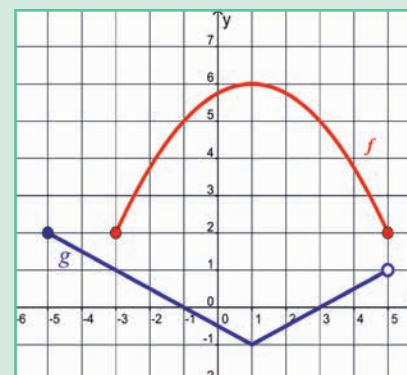


Figura 8

1.7 COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

ACTIVIDAD INICIAL

En la vida real encontramos situaciones en donde una variable depende de otra y esta a su vez depende de otra variable. Consideremos por ejemplo las escalas de temperatura Fahrenheit, Celsius y Kelvin. La fórmula $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ indica cómo convertir grados Fahrenheit (F) a grados Celsius (C); por otra parte, la fórmula $K = C + 273$ nos dice cómo convertir grados Celsius a grados Kelvin (K).



¿A cuántos grados Kelvin equivale una temperatura de 50 grados Fahrenheit?

Consideremos las funciones f y g , descritas verbalmente así:

“ f es la función que multiplica por dos y luego suma ocho”

“ g es la función que multiplica por tres y luego resta catorce”



Defina algebraicamente las funciones f y g :

Imaginemos las funciones f y g como máquinas, formando un mecanismo como el de la figura 1, en el cual al ingresar un valor como el 1 en la máquina f , esta lo transforma en: $2 \times (1) + 8 = 10$. El 10 a su vez es recibido por la máquina g la cual lo convierte en: $3 \times 10 - 14 = 30 - 14 = 16$

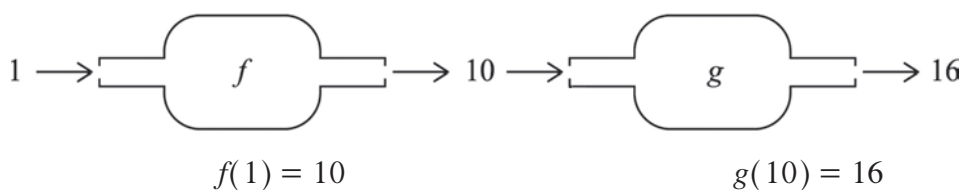


Figura 1

Si ingresamos el 6 en la máquina f , esta lo transforma en 20, es decir, $f(6) = 20$; enseguida, la función g convierte a 20 en 46, es decir, $g(20) = 46$.

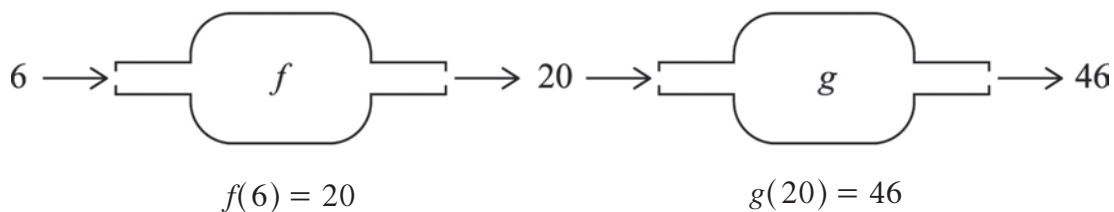


Figura 2



Complete la tabla 1:

	f		g	
1	$\mapsto$	10	$\mapsto$	16
6	$\mapsto$	$\mapsto$	$\mapsto$	46
4		$\mapsto$		
11	$\mapsto$		$\mapsto$	
	$\mapsto$	-2	$\mapsto$	
	$\mapsto$		$\mapsto$	34
$\frac{3}{2}$	$\mapsto$		$\mapsto$	
$-\frac{5}{6}$	$\mapsto$		$\mapsto$	

Tabla 1

Ahora construiremos una sola máquina que remplace el mecanismo anterior; esta máquina tendrá que transformar el 1 en 16, el 6 en 46, etc.

Ejemplo 1

Indique cómo programar la máquina que remplace el mecanismo descrito al comienzo de esta sección y verifique el procedimiento con los valores de entrada 1 y 6.

Solución

Expresamos primero en lenguaje algebraico lo que hacen las funciones f y g :

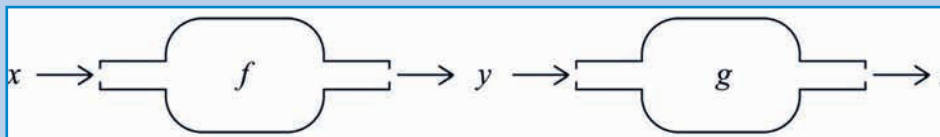


Figura 3

donde $y = 2x + 8$ (1)

$z = 3y - 14$ (2)

Remplazamos y de la ecuación (1) en la ecuación (2):

$$z = 3(2x + 8) - 14$$

$$z = 6x + 24 - 14$$

$$z = 6x + 10$$

Lo anterior indica que la máquina buscada, debe primero *multiplicar por 6* y luego *sumar 10*.

Verificamos que al 1 le asigna el 16, al 6 el 46, etc.

$$1 \rightarrow 6(1) + 10 = 16$$

$$6 \rightarrow 6(6) + 10 = 46$$

A la máquina o función del ejemplo 1 la llamaremos la *función compuesta* de g y f , la cual denotamos $g \circ f$:

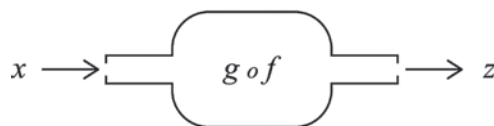


Figura 4

$$(g \circ f)(x) = 6x + 10$$

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

La función compuesta $f \circ g$, de dos funciones f y g se

define: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todos los x en el dominio de g tales que $g(x)$ está en el dominio de f .

Ejemplo 2

A partir de las fórmulas $C(F) = \frac{5}{9}(F - 32)$, $K = C + 273$, que permiten convertir grados Fahrenheit (F) a grados Celsius (C), y grados Celsius a grados Kelvin (K), respectivamente, consiga una fórmula para convertir grados Fahrenheit a grados Kelvin.

Solución

La figura 5 muestra que estamos tratando de construir un “puente” que vaya de F a K :

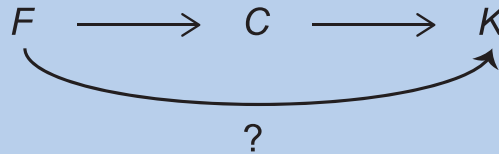


Figura 5

Expresemos las fórmulas con la notación funcional:

$$C(F) = \frac{5}{9}(F - 32), \quad K(C) = C + 273$$

La fórmula que se busca corresponde a la composición de las funciones K y C :

$$\begin{aligned} (K \circ C)(F) &= K(C(F)) = K\left(\frac{5}{9}(F - 32)\right) \\ &= \frac{5}{9}(F - 32) + 273 \\ &= \frac{5}{9}(F) - \frac{5}{9}(32) + 273 \\ &= \frac{5F + 2297}{9} \end{aligned}$$

$$(K \circ C)(F) = \frac{5}{9}F + \frac{2297}{9}$$

Ejemplo 3

Dadas las funciones $f(x) = x + 5$ y $g(x) = \sqrt{x - 3}$, halle $f \circ g$, $f \circ f$ y $g \circ f$. Determine los dominios de cada una de las composiciones. ¿es $(f \circ g)(7)$ igual a $(g \circ f)(7)$?

Solución

- a) Dominio de f : $(-\infty, \infty)$
 Dominio de g : $[3, \infty)$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(\sqrt{x - 3}) \\ &= \sqrt{x - 3} + 5\end{aligned}$$

Esta función está definida para los x tales que $x - 3 \geq 0$, o sea, para $x \geq 3$; por tanto, el dominio de $f \circ g$ es $[3, \infty)$

- b)
$$\begin{aligned}(f \circ f)(x) &= f(f(x)) \\ &= f(x + 5) \\ &= (x + 5) + 5 \\ &= x + 5 + 5\end{aligned}$$

$$(f \circ f)(x) = x + 10$$

El dominio de $(f \circ f)$ es $(-\infty, \infty)$

- c)
$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x + 5) \\ &= \sqrt{x + 5 - 3}\end{aligned}$$

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{x + 2}$$

Esta función está definida para los x tales que $x + 2 \geq 0$, o sea, para $x \geq -2$; por tanto, el dominio de $(g \circ f)$ es $[-2, \infty)$

d) ¿es $(f \circ g)(7)$ igual a $(g \circ f)(7)$?

$$(f \circ g)(7) = \sqrt{7-3} + 5 = 7$$

$$(g \circ f)(7) = \sqrt{7+2} = 3$$

Observamos que $(f \circ g)(7) \neq (g \circ f)(7)$

En general, $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$ lo cual significa que el proceso de composición de funciones, no es conmutativo.



Dadas las funciones $m(t) = t^2 - 2$ y $p(t) = \sqrt{2t-1}$, halle:

a) $(m \circ p)(5)$

b) $(p \circ m)(5)$

c) $(m \circ p)(2)$

d) $(p \circ m)(0)$

e) $(m \circ m)(-3)$

f) $(p \circ p)\left(\frac{5}{2}\right)$

Ejemplo 4

Dadas las gráficas de las funciones f y g que se muestran en la figura 6, halle $(f \circ g)(-1)$, $(g \circ g)(0)$.

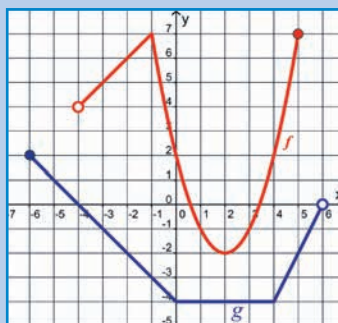


Figura 6

Solución

- a) $(f \circ g)(-1) = f(g(-1)) = f(-3) = 5$
- b) $(g \circ g)(0) = g(g(0)) = g(-4) = 0$



Utilice las gráficas de f y g para encontrar:

- a) $(g \circ f)(-3)$
- b) $(f \circ g)(-3)$
- c) $(f \circ f)(3)$
- d) $(f \circ g)(2)$
- e) $(g \circ g)(-6)$

Ejemplo 5

Expresa la función $h(x) = (4x - 5)^3$ como composición de dos funciones.

Solución

Consideremos la función h como el resultado del siguiente proceso: realizar primero lo que está en el paréntesis y luego elevar al cubo. La primera parte la representamos con la función $g(x) = 4x - 5$ y la segunda parte con la función $f(x) = x^3$. Por tanto:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(4x - 5) = (4x - 5)^3$$

y así: $h(x) = (f \circ g)(x)$, con $g(x) = 4x - 5$, $f(x) = x^3$



Si $h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, expresa h como la composición de dos funciones. Determine el dominio de cada una.

Ejemplo 6

Un globo se eleva verticalmente desde el piso con una velocidad de 40 m/min. El globo está siendo monitoreado desde un punto P a 150 m del punto de partida Q . Sea d la distancia del punto P al globo y t el tiempo, en minutos, desde que empezó a elevarse. Expresa d como una función de t . ¿A qué distancia se encuentra el globo del punto P , transcurridos 4 minutos?

Solución

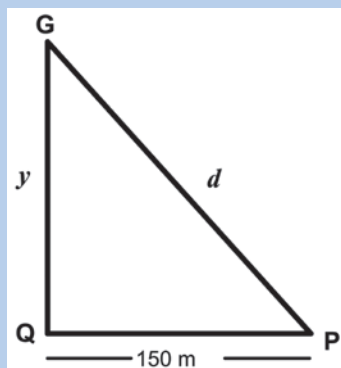


Figura 7

La altura y del globo es una función del tiempo t . Como en el movimiento uniforme, la distancia es igual a la velocidad por el tiempo:

$$y(t) = 40t$$

A su vez, d es una función de y ; por el teorema de Pitágoras tenemos:

$$d(y) = \sqrt{y^2 + 150^2}$$

Como d depende de y , y depende de t , entonces d depende de t ; con la composición expresamos esta dependencia:

$$\begin{aligned} (d \circ y)(t) &= d(y(t)) \\ &= \sqrt{(40t)^2 + 150^2} \\ &= \sqrt{1600t^2 + 22500} \end{aligned}$$

La distancia de P al globo G , a los 4 minutos es:

$$(d \circ y)(4) = \sqrt{1600(4)^2 + 22500} = 219.32 \text{ m}$$

EJERCICIOS

I. Dadas las funciones $f(x) = 4x + 3$ y $g(x) = x^2 - 2x$, halle:

- | | |
|----------------------|--|
| 1) $(f \circ g)(3)$ | 2) $(g \circ f)(-4)$ |
| 3) $(f \circ g)(-2)$ | 4) $g(f(4))$ |
| 5) $(f \circ g)(0)$ | 6) $g\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ |
| 7) $(f \circ g)(x)$ | 8) $(g \circ f)(x)$ |
| 9) $(f \circ f)(x)$ | 10) $(g \circ g)(x)$ |

En la figura 8 se dan las gráficas de las funciones h y g .

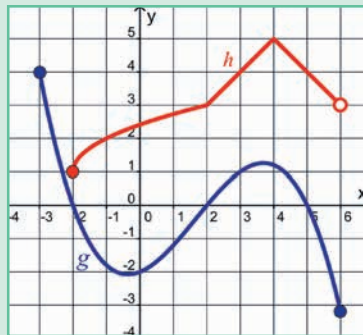


Figura 8

II. Estime los siguientes valores funcionales:

- | | |
|----------------------|---------------------|
| 1) $(h \circ g)(-2)$ | 2) $g(h(-2))$ |
| 3) $(g \circ h)(3)$ | 4) $g(g(4))$ |
| 5) $h(g(1))$ | 6) $(h \circ h)(2)$ |
| 7) $g(h(5))$ | 8) $(g \circ g)(5)$ |

III. Con la información de la tabla 2 halle los valores funcionales indicados:

x	$f(x)$	$g(x)$
2	-1	-3
5	2	-1
-1	-2	5
-2	0	3
-3	5	2

Tabla 2

- | | |
|----------------------|----------------------|
| 1) $f(g(2))$ | 2) $(f \circ f)(-1)$ |
| 3) $g(f(-3))$ | 4) $(f \circ g)(5)$ |
| 5) $(g \circ g)(-3)$ | 6) $f(f(5))$ |
| 7) $(g \circ f)(-1)$ | 8) $f(g(-1))$ |

IV. Expresé la función h como composición de dos funciones

- 1) $h(x) = \sqrt[3]{x+3}$
- 2) $h(x) = (3x^2 + 5)^4$
- 3) $h(x) = \sqrt{5x-2}$
- 4) $h(x) = \left| \frac{3}{2}x - 4 \right|$

V. Para cada par de funciones f y g , determine $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$:

1) $f(x) = 2x + 5$ $g(x) = -3x - 4$

2) $f(x) = 3x - 2$ $g(x) = -x^2 + 2x - 1$

3) $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$ $g(x) = 2x + 2$

4) $f(x) = \sqrt{x + 3}$ $g(x) = x^2$

VI Problemas

El costo semanal C de producir q unidades en una fábrica está dado:

$$C(q) = 12q + 8\,000, \quad q \in \mathbb{N}$$

el número de unidades q producidas en t horas esta dado por:

$$q(t) = 50t, \quad t \in \mathbb{R} \geq 0$$

- a) Trace las gráficas de C , q y $(C \circ q)$
- b) Encuentre e interprete $(C \circ q)(t)$
- c) Halle e interprete $(C \circ q)(8)$
- d) Resuelva e interprete la ecuación $(C \circ q)(t) = 14\,000$

- 2) En una construcción se debe preparar una base cuadrada para colocar en el centro un cilindro donde irá una columna (figura 9)

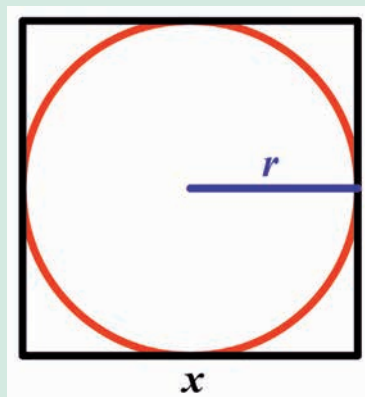


Figura 9

- a) Escriba el radio r del cilindro como una función de la longitud x del lado del cuadrado.
- b) Escriba el área A de la base circular de la columna como una función del radio.
- c) Encuentre e interprete $(A \circ r)(x)$.

EJERCICIOS FINALES DE LA UNIDAD 1

1. Llene la tabla si $f(x) = 3x - 4$

x	-2		a	$a + 1$	
$f(x)$		-2			0

2. Si $g(x) = 2x^2 - 5x + 1$, evalúe:

- a. $g(0)$ b. $g(-1)$ c. $g(x+2)$ d. $g(-x)$

3. Dada la función
$$h(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{si } -4 \leq x \leq 1 \\ 3 - 2x & \text{si } 1 < x < 4 \\ 5 & \text{si } 4 \leq x \leq 9 \end{cases}$$
, determine:

- a. $h(-3)$ b. $h(1)$ c. $h(2)$ d. $h(6)$ e. $h(11)$

4. A partir de la gráfica de una función f

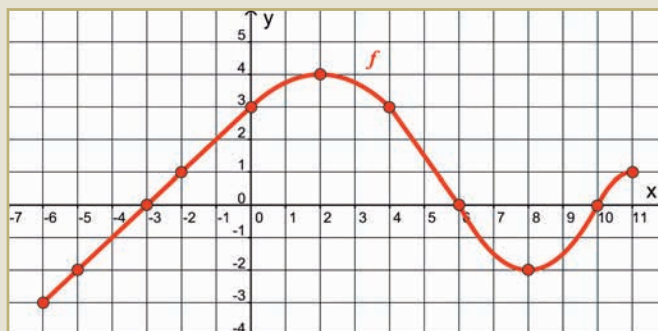


Figura 1

determine:

- $f(-6)$; $f(0)$; $f(6)$; $f(8)$; $f(11)$
- ¿Es $f(3)$ positivo o negativo?
- ¿Es $f(-4)$ positivo o negativo?
- ¿Para qué valores de x es $f(x) = 0$?
- ¿Para qué valores de x es $f(x) \geq 0$?
- ¿Cuál es el dominio de f ?
- ¿Cuál es el rango de f ?
- ¿Cuáles son los interceptos con el eje x ?
- ¿Cuál es el intercepto con el eje y ?
- ¿Para qué valores de x es $f(x) = 3$?
- ¿Para qué valores de x es $f(x) = -3$?
- ¿Cuántas veces intercepta la recta $y = \frac{1}{2}$ a la gráfica?
- ¿Cuántas veces intercepta la recta $y = -4$ a la gráfica?
- ¿Cuántas veces intercepta la recta $x = 5$ a la gráfica?
- ¿Cuántas veces intercepta la recta $x = -7$ a la gráfica?

5. Se dan las gráficas de las funciones f , g y cinco enunciados relacionados:

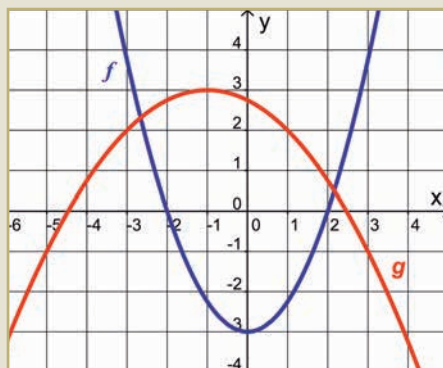


Figura 2

Enunciados:

- $f(2) = g(2) = 0$.
- f y g tienen el mismo dominio.
- $f(-1) \geq g(-1)$.
- f y g interceptan al eje x en un único punto.
- $f(x) \leq g(x)$ para todo x en el intervalo $[-2, 2]$.

De los enunciados anteriores, son verdaderos:

- | | | |
|-----------------|------------|-------------|
| A. solamente II | C. I y III | E. III y IV |
| B. solamente IV | D. II y V | |

6. Encuentre los valores de x para los cuales $f(x) = g(x)$, de manera gráfica y algebraica:

- $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = -3x - 2$
- $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$, $g(x) = -\frac{1}{3}x + 4$
- $f(x) = x^2 + 2x - 3$, $g(x) = 3x + 3$

7. Dadas las funciones $f(x) = x - 4$, $g(x) = x^2 + 1$, encuentre:

- | | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|
| a. $(f + g)(-2)$ | f. $(f - g)(x)$ | k. $(f \circ x)(x)$ |
| b. $(f - g)(4)$ | g. $(f \circ g)(0)$ | l. $(f \circ f)(x)$ |
| c. $(g - f)(4)$ | h. $(g \circ f)(0)$ | m. $(f \circ g)(x)$ |
| d. $(f \circ x)(0)$ | i. $(f + g)(x)$ | n. $(g \circ f)(x)$ |
| e. $\left(\frac{f}{g}\right)(-1)$ | j. $\left(\frac{g}{f}\right)(-1)$ | o. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ |

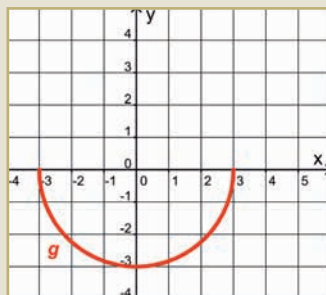
8. Encuentre los valores de A , B y C que verifiquen las condiciones indicadas:

- $f(x) = -3x^2 + Ax + 9$ y $f(2) = -7$
- $g(x) = 2x^3 + Bx^2 - 3x - 7$ y $g(-2) = 5$
- $h(x) = \frac{3x - 5}{C - 2x}$ y $h(3) = 4$

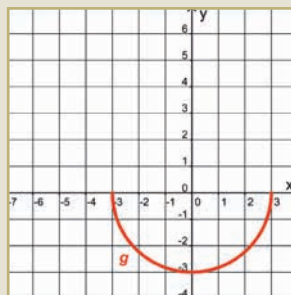
9. La función $h(x) = -4x + 3$ y una función m satisfacen:

$$(h + m)(x) = -\frac{3}{2}x - 5. \text{ Encuentre la función } m.$$

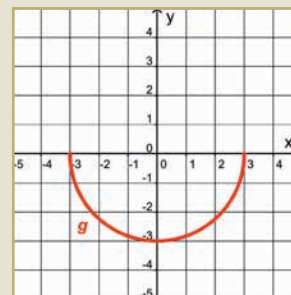
10. Trace las gráficas de las funciones f_1 , f_2 , f_3 :



$$f_1(x) = g(x - 2) + 4$$



$$f_2(x) = -2g(x + 1)$$



$$f_3(x) = -g(-2x) - 4$$

Figura 3

11. La función de Heaviside (H), ampliamente utilizada en ingeniería, se define:

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0 \\ -1, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Trace la gráfica de la función H y la de la función f definida como:

$$f(x) = H(x + 2) - 3$$

12. El punto $(3, -2)$ está en la gráfica de $y = f(x)$, ¿cuál de los siguientes puntos está en la gráfica de $y = 2f(-x)$?

a) $(3, -4)$

b) $(6, -4)$

c) $(-3, -4)$

d) $(-6, -4)$

13. El punto $(-2, 3)$ está en la gráfica de $y = f(x)$, ¿cuál de los siguientes puntos está en la gráfica de $y = 2f(-x)$?
- a) $(4, -6)$ b) $(-1, -3)$ c) $(1, 3)$ d) $(-1, -1.5)$
14. El punto $(-1, -5)$ está en la gráfica de $y = f(x)$, ¿cuál de los siguientes puntos está en la gráfica de $y = -f(x + 3) - 2$?
- a) $(2, -7)$ b) $(-4, -7)$ c) $(2, 3)$ d) $(-4, 3)$

TRANSFORMACIONES CON VALOR ABSOLUTO

15. Haga las gráficas de las funciones $f_1(x) = x(x - 4)$,
 $f_2(x) = x(x - 2)(x + 4)$.
- a) Grafique las funciones $F_1(x) = |f_1(x)|$, $F_2(x) = |f_2(x)|$. Describa un procedimiento para trazar la gráfica de $F(x) = |f(x)|$ a partir de la gráfica de f .
- b) Grafique las funciones $G_1(x) = f_1(|x|)$, $G_2(x) = f_2(|x|)$. Describa un procedimiento para trazar la gráfica de $F(x) = f(|x|)$ a partir de la gráfica de f .
16. La gráfica de la función h se muestra a continuación:

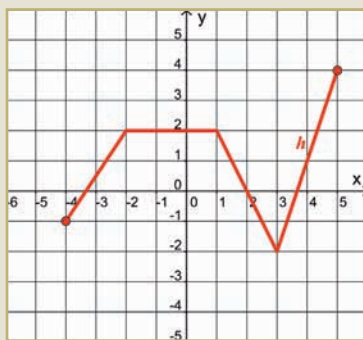


Figura 4

- a) Dibuje la gráfica de la función $y = |h(x)|$
- b) Dibuje la gráfica de la función $y = h(|x|)$

17. Para algunas funciones g se cumple que $g(a + b) = g(a) + g(b)$, para todo número real a y b . ¿Cuáles de las siguientes funciones tienen esta propiedad?

- a. $f(x) = \frac{3}{2}x$
- b. $h(x) = -3x + 1$
- c. $m(x) = x^2 - 2x$
- d. $n(x) = 2x^2 + 3$

18. En el trabajo como vendedor, Juan recibe \$1 500 000 mensuales más un 12% de comisión sobre las ventas realizadas al mes. Le ofrecen un nuevo trabajo en el que recibirá \$1 200 000 mensuales más un 15% de comisión sobre las ventas.

- a. Escriba la función S_1 en términos de x , ventas realizadas al mes, que represente el salario mensual que recibe.
- b. Escriba la función S_2 en términos de x , ventas realizadas al mes, que represente el salario mensual que recibiría en el nuevo trabajo.
- c. Con la ayuda de un sistema graficador, represente S_1 y S_2 en el mismo plano. Encuentre el punto de intersección. ¿Qué significa?
- d. Si las ventas mensuales de Juan han sido más o menos de \$10 000 000, ¿es recomendable que cambie de trabajo?

19. En una compañía el costo de producción de cada artículo es de \$3 600 y el costo fijo es de \$135 000. Cada artículo se vende a \$6 300. Sea x el número de unidades producidas y vendidas.

- a. Escriba el costo total C como una función del número de unidades producidas.
- b. Escriba los ingresos I como una función del número de unidades vendidas.
- c. Escriba la ganancia G como una función del número de unidades vendidas.
- d. ¿Cuál es el costo C , el ingreso I y la ganancia G si se producen 34, 50 y 110 artículos?

20. El cobro P (en miles de pesos) por el servicio de parqueadero en un aeropuerto, cuando el número de horas t no es superior a 24, puede modelarse con la función:

$$P(t) = \begin{cases} 4 & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ 2\lfloor t + 1 \rfloor - 1 & \text{si } 2 \leq t \leq 8 \\ 18 & \text{si } 8 \leq t \leq 24 \end{cases}$$

Haga la gráfica de P y determine el cobro si el tiempo de parqueo es:

- 2 horas
- 4 horas
- 5 horas y media
- 10 horas y 24 minutos

AJUSTES LINEALES

21. ¿Cómo determinan los antropólogos la estatura de un individuo a partir de restos óseos? Supongamos que se dispone de un fémur. Al graficar datos como los recogidos en la tabla 2,

Longitud del fémur (cm)	Estatura (cm)
50.1	178.5
48.3	173.6
45.2	164.8
44.7	163.7
44.5	168.3
42.7	165.0
39.5	155.4
38.0	155.8

Tabla 1



Figura 5

se puede observar que no se encuentran exactamente en una línea recta; sin embargo, parecen estar más o menos en una recta. Un graficador puede determinar la recta que mejor se ajusta a esos datos (*recta de regresión*).

La función lineal $-13\,925.92x + 7\,404.48y = 611\,978.34$ cuya gráfica es la recta anterior es un *modelo lineal* que relaciona la longitud del fémur con la estatura.

- Haga una predicción (aproximada), con el modelo anterior, de la estatura de una persona que tiene un fémur de 41 cm.
- Haga una predicción (aproximada), con el modelo anterior, de la longitud del fémur de una persona que tiene una estatura de 155 cm.

22. La tabla muestra el precio p (en miles de pesos) de un artículo, siendo t el número de años transcurridos desde 1980.

t	0	3	6	10	13	16	20	24	26	27	30
p	13	15	18	22	25	29	32	33	34	37	39

Tabla 2

- Construya un modelo lineal con esos datos para estimar el precio en los años 1991 y 2012.
- ¿En qué año (aproximado) el artículo cuesta \$35 500.

UNIDAD

2

2.1 FUNCIONES CUADRÁTICAS

ACTIVIDAD INICIAL

CANALES



De una lámina metálica se va a hacer una canal rectangular; el ancho de la lámina es el mismo que el de una hoja tamaño carta (figura 1):

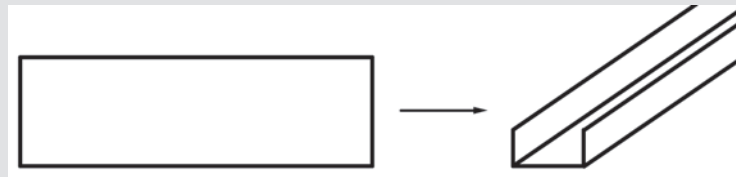


Figura 1

Tome una hoja tamaño carta como *modelo físico* de la canal. Forme tres posibles canales, dibújelas e indique las dimensiones correspondientes:



De las canales dibujadas indique cuál conduce la mayor cantidad de agua. Justifique su respuesta.

Muchas son las canales que se pueden construir a partir de la lámina dada. De lo anterior, una pregunta surge de manera natural:

¿cuáles son las dimensiones de la canal que puede conducir la mayor cantidad de agua?

En esta sección construiremos un *modelo matemático* que nos permitirá contestar esa pregunta.

Con láminas de 21 cm de ancho y 100 cm de largo se han construido dos canales A y B, como se muestra en la figura 2:

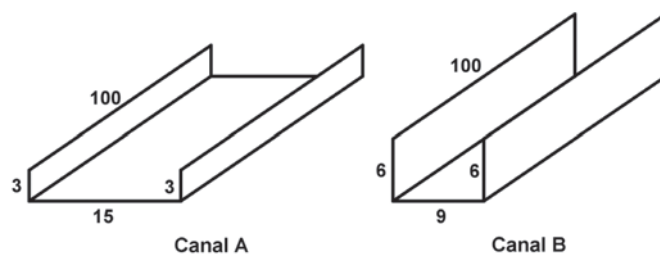


Figura 2

Con la fórmula para el volumen de una caja: $V = \text{largo} \times \text{ancho} \times \text{alto}$, calculamos la cantidad de agua que puede conducir la canal en un cierto tramo. Por ejemplo, para un tramo de 100 cm, la canal A puede conducir: $3 \times 15 \times 100 = 4500 \text{ cm}^3$ de agua mientras que la canal B puede conducir $6 \times 9 \times 100 = 5400 \text{ cm}^3$.

La sección transversal (figura 3) de la canal A tiene como área: $3 \times 15 = 45 \text{ cm}^2$, en tanto que el área de la sección transversal de la canal B es $6 \times 9 = 54 \text{ cm}^2$:

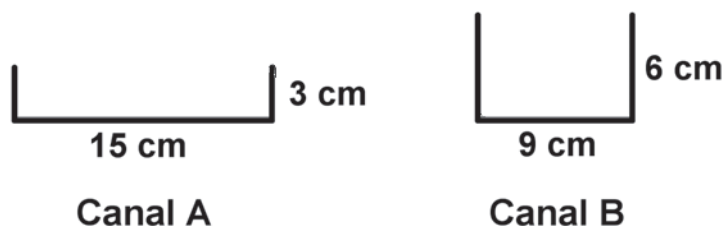


Figura 3

Observemos que entre mayor sea el área de la sección transversal de la canal, mayor será el volumen de agua que puede transportar esta. La pregunta de cuáles deben ser las dimensiones de la canal para que conduzca la mayor cantidad de agua nos lleva ahora a esta otra pregunta:

¿qué dimensiones de la sección transversal de la canal producen la mayor área?

Una vez examinados algunos casos particulares, pasamos a la construcción de un modelo matemático. El dibujo de la figura 4 representa una sección transversal cualquiera con las variables que vamos a considerar:

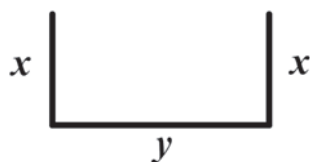


Figura 4

x : altura de la canal

y : ancho de la canal

El área A de la sección transversal es una variable que depende de las variables x y y , las cuales relacionamos con la ecuación:

$$A = xy \quad (1)$$

Podemos expresar A en términos de una sola variable si tenemos en cuenta que el ancho de la lámina es de 21 cm; esto es:

$$2x + y = 21 \quad (2)$$

Despejemos una de las variables en (2), y por ejemplo, y remplacémosla en la ecuación (1) para expresar A en *función* de una sola variable:

$$y = 21 - 2x$$

$$A = x(21 - 2x)$$

Examinemos para qué valores de x definimos la función A , es decir, digamos cuál va a ser el dominio de A . Como trabajamos con longitudes, asumimos que estas son positivas; luego $x \geq 0$, y $y \geq 0$. Ya que $y = 21 - 2x$, tenemos la inecuación $21 - 2x \geq 0$, la cual resolvemos:

$$\begin{aligned} 21 &\geq 2x \\ \frac{21}{2} &\geq x \\ x &\leq \frac{21}{2} = 10.5 \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} A(x) &= x(21 - 2x), 0 \leq x \leq 10.5 \\ A(x) &= 21x - 2x^2, 0 \leq x \leq 10.5 \end{aligned} \quad (3)$$

Usaremos la función (3) como un *modelo matemático* del problema. De las características de esa función, las cuales haremos explícitas una vez conozcamos ciertas propiedades de las *funciones cuadráticas*, esperamos resolver el problema de la canal.

Hacemos ahora un paréntesis para presentar algo de teoría y luego volveremos al problema.

Una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a , b y c son constantes, $a \neq 0$, es una *función cuadrática* expresada en la *forma general*; la gráfica es una *parábola*.

2.1.1 GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES CUADRÁTICAS

Comenzaremos precisando algunos aspectos importantes de la *función cuadrática básica*: $f(x) = x^2$, luego trazaremos gráficas de algunas funciones obtenidas con transformaciones de f .

La gráfica de la *función cuadrática básica*: $f(x) = x^2$ es:

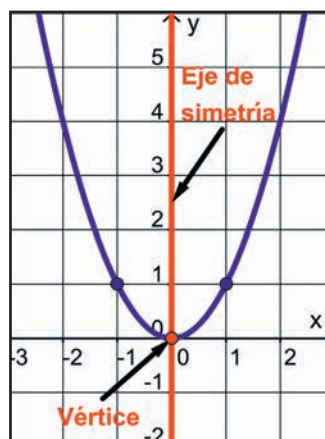


Figura 5

De esta función podemos afirmar:

- La gráfica es una curva en forma de $\cup$, una *parábola*, simétrica respecto a una recta llamada *eje de simetría* o *eje de la parábola*, en este caso el eje de simetría es el eje y .

- La parábola y el eje de simetría se interceptan en un punto llamado *vértice*; el vértice de esta parábola es $(0, 0)$.
- La función decrece en el intervalo $(-\infty, 0)$ y crece en el intervalo $(0, \infty)$.
- El *valor mínimo* que toma la función (el menor valor que toma la variable dependiente) es 0; *valor máximo* no tiene.
- El dominio es el conjunto de los números reales y el rango es el intervalo $[0, \infty)$.

Ejemplo 1

Trazar la gráfica de las siguientes funciones:

- 1) $y = (x - 4)^2$
- 2) $y = (x + 3)^2 - 1$
- 3) $y = -3x^2$
- 4) $y = -(x + 2)^2 + 6$
- 5) $y = 2(x + 3)^2 - 4$

Determine en cada caso: coordenadas del vértice, ecuación del eje, intervalos de crecimiento o decrecimiento, valor máximo o mínimo, dominio y rango.

Solución

Observemos que estas funciones se pueden obtener efectuando transformaciones a la función cuadrática básica $f(x) = x^2$. Identifiquemos primero qué transformaciones son y luego tracemos la gráfica. Observe los *puntos de referencia*: $(0, 0)$, $(1, 1)$ y $(-1, 1)$.

- 1) $y = (x - 4)^2$; la gráfica, figura 6, la obtenemos moviendo 4 unidades a la derecha la gráfica de $y = x^2$:

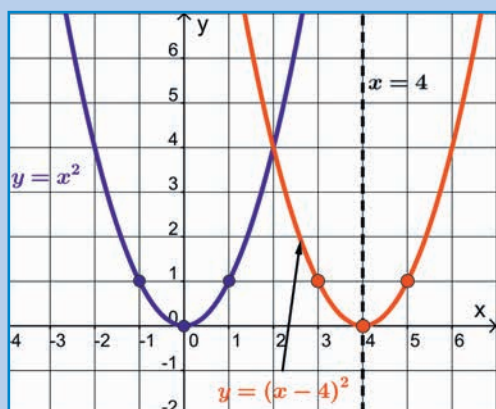


Figura 6

Vértice: $(4, 0)$
 Ecuación eje de simetría: $x = 4$
 Decrece en $(-\infty, 4)$
 Crece en $(4, \infty)$
 Mínimo valor que toma la función: 0
 Valor máximo: no tiene
 Dominio: los números reales
 Rango: $[0, \infty)$

- 2) $y = (x + 3)^2 - 1$; movemos 3 unidades a la izquierda la gráfica de $y = x^2$ (figura 7), luego 1 unidad hacia abajo.

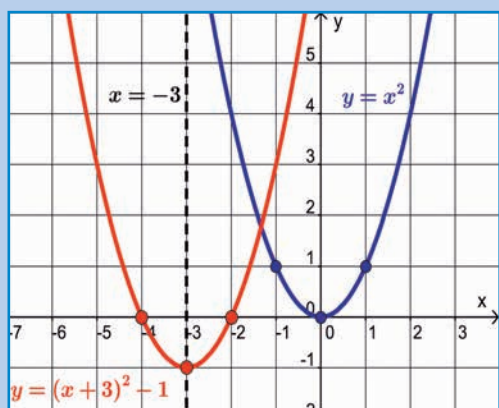
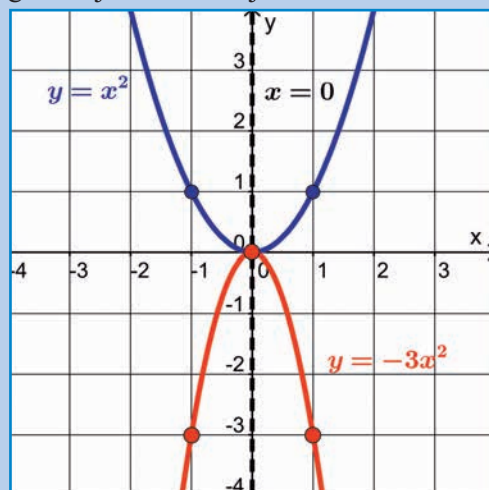


Figura 7

Vértice: $(-3, -1)$
 Ecuación eje de simetría: $x = -3$
 Decrece en $(-\infty, -3)$
 Crece en $(-3, \infty)$
 Mínimo: -1
 Máximo: no tiene
 Dominio: los números reales
 Rango: $[-1, \infty)$

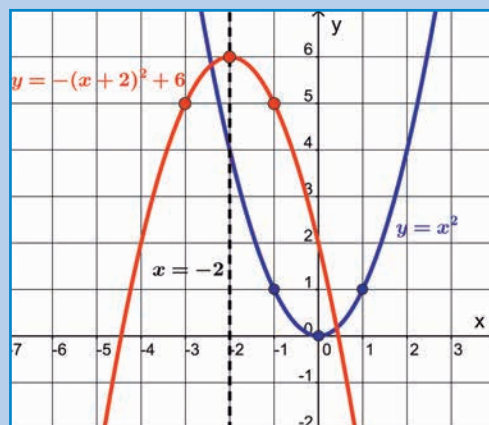
- 3) $y = -3x^2$; alargamos verticalmente por 3 la gráfica de $y = x^2$ (figura 8), luego reflejamos en el eje x .



Vértice: $(0, 0)$
 Ecuación eje de simetría: $x = 0$
 Crece en $(-\infty, 0)$
 Decrece en $(0, \infty)$
 Mínimo: no tiene
 Máximo: 0
 Dominio: los números reales
 Rango: $(-\infty, 0]$

Figura 8

- 4) $y = -(x + 2)^2 + 6$; movemos 2 unidades a la izquierda la gráfica de $y = x^2$ (figura 9), reflejamos en el eje x , y finalmente subimos 6 unidades.



Vértice: $(-2, 6)$
 Ecuación eje de simetría: $x = -2$
 Crece en $(-\infty, -2)$
 Decrece en $(-2, \infty)$
 Mínimo: no tiene
 Máximo: 6
 Dominio: los números reales
 Rango: $(-\infty, 6]$

Figura 9

- 5) $y = 2(x + 3)^2 - 4$; movemos 3 unidades a la izquierda la gráfica de $y = x^2$ (figura 10), alargamos verticalmente por 2, y bajamos 4 unidades.

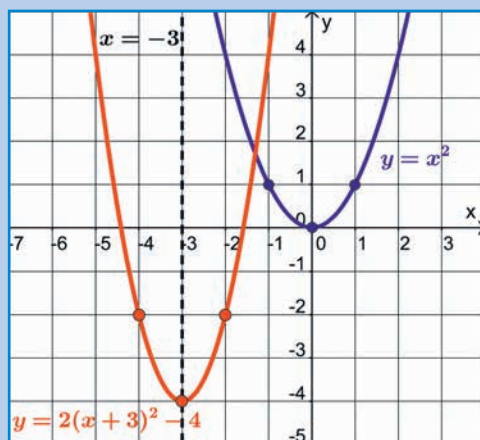


Figura 10

Vértice: $(-3, -4)$
Ecuación eje de simetría: $x = -3$
Decrece en $(-\infty, -3)$
Crece en $(-3, \infty)$
Mínimo: -4
Máximo: no tiene
Dominio: los números reales
Rango: $[-4, \infty)$



Trace la gráfica de las siguientes funciones y determine en cada caso: coordenadas del vértice, ecuación del eje de simetría, intervalos de crecimiento o decrecimiento, valor máximo o mínimo, dominio y rango.

1) $y = -(x - 3)^2 + 4$

2) $y = \frac{1}{2}(x + 2)^2 - 3$

3) $y = 3(x + 1)^2 + 2$

Si desarrollamos el cuadrado y simplificamos términos semejantes, podemos comprobar que las transformaciones que se efectúen a la función cuadrática básica producen de nuevo funciones cuadráticas. Hagamos esto, por ejemplo, con $y = 2(x + 3)^2 - 4$:

$$y = 2(x + 3)^2 - 4$$

$$y = 2(x^2 + 6x + 9) - 4$$

$$y = 2x^2 + 12x + 18 - 4$$

$$y = 2x^2 + 12x + 14$$

La anterior expresión está en la forma general $f(x) = ax^2 + bx + c$; para este caso $a = 2$, $b = 12$, $c = 14$.

Las funciones cuadráticas del ejemplo 1 comparten una presentación según la siguiente definición:

Una función cuadrática escrita en la forma
 $y = a(x - h)^2 + k$ está presentada en la *forma estándar*.

Observemos que las funciones del ejemplo 1 están en la forma estándar; por ejemplo:

para la función 1), $y = (x - 4)^2$, $a = 1$, $h = 4$, $k = 0$;

para la función 4), $y = -(x + 2)^2 + 6$, $a = -1$, $h = -2$, $k = 6$

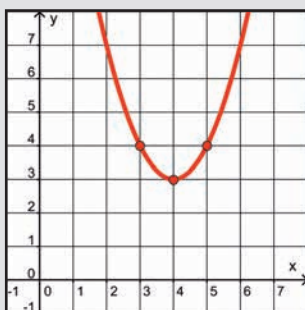


Determine a , h , k en las funciones 2), 3) y 5) del ejemplo 1:

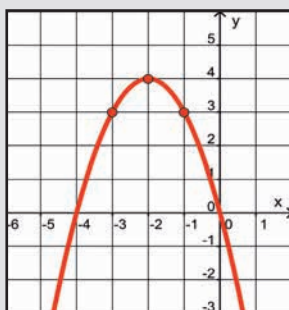


Las gráficas que se muestran son transformaciones de la función $y = x^2$. ¿Qué función define cada gráfica?

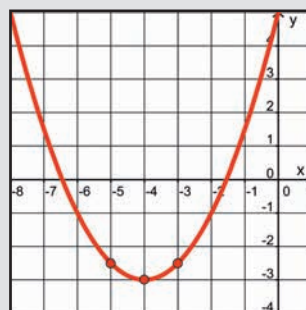
1)



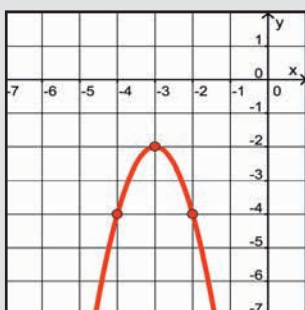
2)



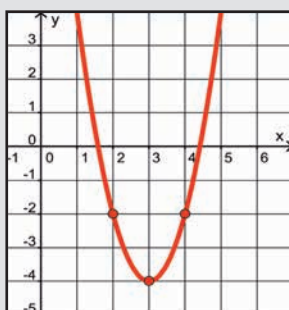
3)



4)



5)



6)

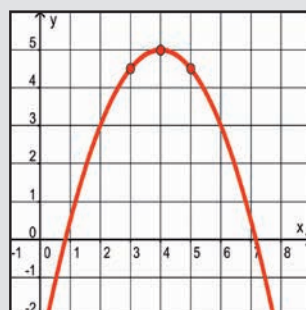


Figura 11

La forma estándar de una función cuadrática permite inferir de manera inmediata dos de las características importantes de su gráfica: si se abre hacia arriba, *cóncava hacia arriba* ($\cup$), o hacia abajo, *cóncava hacia abajo* ($\cap$) y las coordenadas del vértice; a partir de estas podemos determinar el rango y el valor máximo o mínimo que toma la función.



Revise el ejemplo 1 para completar la tabla 1:

Función	Forma de la gráfica	Vértice	Máximo o mínimo absolutos	Rango
1) $y = (x - 4)^2$	∪	(4, 0)	Mínimo: 0	$[0, \infty)$
2) $y = (x + 3)^2 - 1$				
3) $y = -3x^2$				
4) $y = -(x + 2)^2 + 6$				
5) $y = 2(x + 3)^2 - 4$				

Tabla 1

De una función cuadrática expresada en la forma estándar,

$$y = a(x - h)^2 + k, \text{ podemos afirmar que:}$$

- ✓ el vértice es (h, k) .
- ✓ la gráfica (parábola) abre hacia arriba si $a > 0$; abre hacia abajo si $a < 0$.

Ejemplo 2

Identifique el vértice de la gráfica y halle el rango de cada función:

1) $y = -4(x + 2)^2 + 4$

2) $f(x) = (x - 3)^2$

Solución

- 1) Reescribimos la función para que quede en la forma estándar:

$$y = -4(x + 2)^2 + 4 = -4(x - (-2))^2 + 4$$

$$h = -2, k = 4 \rightarrow \text{vértice: } (-2, 4)$$

Rango de la función: intervalo $(-\infty, 4]$

- 2) $h = 3, k = 0 \rightarrow \text{vértice: } (3, 0)$

Rango de la función: intervalo $[0, \infty)$



Identifique el vértice de la gráfica y halle el rango de cada función:

1) $f(x) = -(x - 1)^2 + 2$

2) $y = 3(x - 7)^2 - 1$

3) $y = -(x + 4)^2$

4) $g(x) = 4(x + 10)^2$

2.1.2 FORMA GENERAL Y FORMA ESTÁNDAR

Vimos antes que para pasar de la forma estándar de cualquier función cuadrática a la forma general, desarrollamos el cuadrado y simplificamos términos semejantes.

Revisemos el ejemplo donde pasábamos *de la forma estándar a la general* con la función $y = 2(x + 3)^2 - 4$:

- Desarrollamos el cuadrado: $y = 2(x^2 + 6x + 9) - 4$
- Multiplicamos por 2: $y = 2x^2 + 12x + 18 - 4$
- Simplificamos: $y = 2x^2 + 12x + 14$

El proceso para pasar *de la forma general a la estándar*, lo ilustramos reversando los pasos en el ejemplo anterior; paralelamente lo haremos también con la expresión general $f(x) = ax^2 + bx + c$

Agrupamos los términos en x $y = (2x^2 + 12x) + 14$	Agrupamos los términos en x $y = (ax^2 + bx) + c$
Factorizamos el coeficiente de x^2 $y = 2(x^2 + 6x) + 14$	Factorizamos el coeficiente de x^2 $y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$
Completamos para formar un trinomio cuadrado perfecto: sumamos 9 dentro y restamos $2(9)$, afuera: $y = 2(x^2 + 6x + 9) + 14 - 2(9)$	Completamos para formar un trinomio cuadrado perfecto sumando $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ dentro y restando $a\left(\frac{b}{2a}\right)^2$, afuera: $y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2$
Simplificamos: $y = 2(x + 3)^2 - 4$	Factorizamos y simplificamos: $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$

De lo anterior obtenemos una fórmula que nos permitirá encontrar el vértice cuando tenemos una función cuadrática en la forma general:

El *vértice* de la gráfica de una función cuadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ es } \left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right) \right)$$

Además, podemos concluir que *cualquier función cuadrática se puede escribir en la forma estándar*; esto quiere decir que realizando transformaciones (desplazamientos horizontales, verticales, alargamientos o acortamientos verticales, reflexión en el eje x) a la función cuadrática básica $y = x^2$, podemos obtener cualquier función cuadrática.



Escriba las funciones en forma estándar.

$$f(x) = x^2 - 6x + 7$$

$$g(x) = x^2 + 5x - 3$$

$$h(x) = -2x^2 - 4x + 3$$

Ejemplo 3

Halle el vértice de la gráfica y el rango de cada función:

$$y = x^2 - 2x - 3$$

$$y = -x^2 - 2x + 24$$

$$y = (x + 5)(x - 3)$$

Solución

$$1) \quad y = x^2 - 2x - 3$$

$$a = 1 \quad b = -2$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2(1)} = \frac{2}{2} = 1$$

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = f(1) = (1)^2 - 2(1) - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$$

Vértice: $(1, -4)$.

Como $a = 1 > 0$ la parábola abre hacia arriba; por tanto, el rango de la función es el intervalo $[-4, \infty)$.

$$2) \quad y = -x^2 - 2x + 24$$

$$a = -1 \quad b = -2$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2(-1)} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = f(-1) = -(-1)^2 - 2(-1) + 24 = -1 + 2 + 24 = 25$$

Vértice: $(-1, 25)$.

Como $a = -1 < 0$, la parábola abre hacia abajo; por tanto, el rango de la función es el intervalo $(-\infty, 25]$.

$$3) \quad y = (x + 5)(x - 3)$$

Desarrollamos primero el producto:

$$a = -1 \quad b = -2$$

$$(x + 5)(x - 3) = x^2 - 3x + 5x - 15 = x^2 + 2x - 15$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2(1)} = \frac{2}{2} = 1$$

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = f(1) = (1)^2 + 2(1) - 15 = 1 + 2 - 15 = -12$$

Vértice: $(1, -12)$.

Como $a = 1 > 0$, la parábola abre hacia arriba; por tanto, el rango de la función es el intervalo $[-12, \infty)$.



Halle el vértice de la gráfica y el rango de cada función:

1) $y = x^2 + 2x + 6$

2) $y = 2x^2 - x - 4$

3) $y = (x - 3)^2$

Veamos una función cuadrática con dominio restringido:

Ejemplo 4

De la función $g(x) = x^2 + 2x - 3$, si $-4 \leq x \leq 2$, halle:

- Dominio de la función.
- Vértice.
- Cortes con el eje y .
- Cortes con el eje x .
- Valor máximo o mínimo.
- Rango de la función.
- Gráfica.

Solución

- El dominio de la función es el intervalo $[-4, 2]$
- Vértice

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(2)}{2(1)} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$$

Vértice: $(-1, -4)$.

iii. Para hallar los cortes con el eje y hacemos $x = 0$ y remplazamos:

$$g(0) = 0^2 + 2(0) - 3 = -3$$

Luego el corte con el eje y es $(0, -3)$.

iv. Para hallar los cortes con el eje x hacemos $y = 0$, remplazamos y resolvemos la ecuación:

$$0 = x^2 + 2x - 3$$

$$(x + 3)(x - 1) = 0$$

$$x + 3 = 0, \text{ o, } x - 1 = 0$$

$$x = -3, \text{ o, } x = 1$$

Los cortes con el eje x son $(-3, 0)$ y $(1, 0)$.

Los anteriores cortes también se pueden hallar utilizando la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En este caso: $a = 1$, $b = 2$ y $c = -3$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$x = 1 \quad \text{o} \quad x = -3$$

- v. El mínimo es -4 .
- vi. Rango: $[-4, 5)$.
- vii. Gráfica: el signo del coeficiente de x^2 es positivo, la gráfica abre hacia arriba.

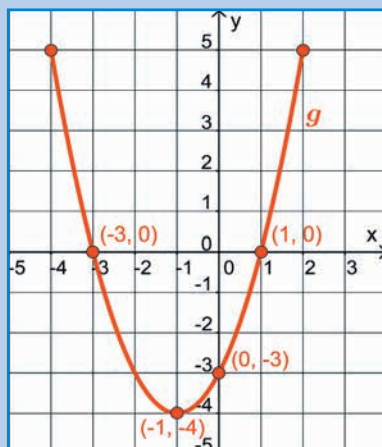


Figura 12



Trazar la gráfica de cada función indicando vértice, cortes con los ejes, valor máximo o mínimo y rango de la función:

- 1) $y = x^2 - 4$ si $-3 \leq x \leq 2$
- 2) $y = -(x + 3)^2 + 2$ si $-6 \leq x \leq -1$
- 3) $y = -x^2 + 8x - 12$ si $1 \leq x \leq 7$
- 4) $y = x^2 - 2x + 2$ si $-2 \leq x \leq 4$
- 5) $y = x^2 - 4x + 4$
- 6) $y = -x^2 - 2x + 3$
- 7) $y = 2x^2 + 3x - 5$
- 8) $y = -3x^2 + 2x + 8$

EJERCICIOS

I. ¿Qué función define cada una de las siguientes gráficas?

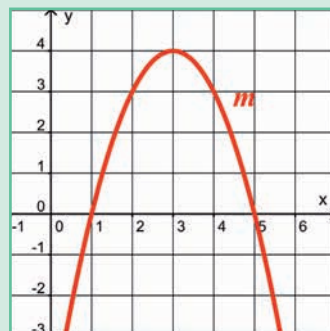
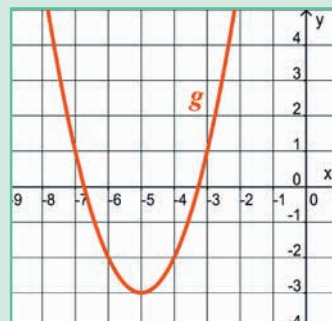
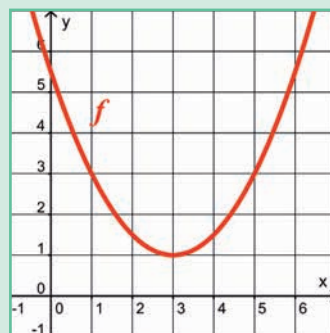
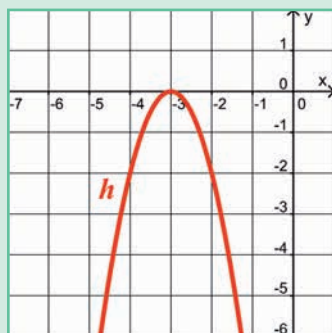


Figura 13

II. Halle el vértice de la gráfica y el rango de cada función.

1) $f(t) = -(t - 5)^2 + 11$

2) $g(r) = \left(r + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}$

3) $m(x) = -2x^2 - 9$

4) $g(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{6}{5}x$

5) $m(x) = -3x^2 + 6x - 4$

6) $h(r) = 4r^2 - 10r + 1$

7) $g(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{6}{5}x$

8) $f(t) = -15t^2 + 45t + 8$

III. Trace la gráfica de las siguientes funciones que se obtienen efectuando transformaciones a la función cuadrática básica $f(x) = x^2$; determine en cada caso: coordenadas del vértice de la parábola, ecuación del eje de simetría, intervalos de crecimiento o decrecimiento, valor máximo o mínimo, dominio y rango de la función.

1) $m(x) = -(x - 2)^2 + 1$	2) $t(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3$
3) $n(x) = 2(x + 1)^2 - 2$	4) $p(x) = -3x^2 - 2$

IV. Escriba las funciones en forma estándar.

1) $f(x) = x^2 - 8x + 3$	2) $h(x) = -(x + 6)(x + 4)$
3) $y = 3x^2 - 12x - 5$	4) $y = -2x^2 - 10x + 3$

V. Halle el vértice de la parábola, los cortes con los ejes, trace la gráfica, determine el valor máximo o mínimo y el rango de la función.

1) $f(x) = 2x^2 - 14x + 12$	2) $g(t) = t^2 + 10t + 25$
3) $h(r) = r^2 - 16$	4) $g(x) = -(x + 2)(x - 1)$
5) $h(t) = t(2t - 5)$	6) $f(r) = -r^2 - 4$
7) $g(x) = x^2 - 4x + 6$	8) $h(r) = -4r^2 - 12r - 9$
9) $f(t) = (3 - 2t)(t + 2)$	10) $h(x) = x^2 - x - 6$

VI. Un modelo cuadrático está completamente definido por:

- tres puntos no colineales.
- el vértice y otro punto de la gráfica.

Teniendo en cuenta lo anterior, resuelva los siguientes problemas:

- 1) Encuentre una función cuadrática, si la gráfica de la función tiene vértice en $(1, -4)$ y los puntos de corte con el eje x son: $(-1, 0)$ y $(3, 0)$.
 - 2) Encuentre una función cuadrática, si la gráfica de esta pasa por los puntos $(-1, 4)$, $(1, -4)$ y $(-5, -4)$.
 - 3) Encuentre una función cuadrática, si su gráfica pasa por los puntos $(4, -2)$, $(3, 4)$ y $(2, 14)$.
 - 4) Si la gráfica de la función cuadrática $f(x) = x^2 + dx + 3d$ tiene su vértice en el eje x , ¿qué valores puede tomar d ?
 - 5) Si la gráfica de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene su vértice en $(1, 4)$, y pasa por el punto $(-1, -8)$, encuentre a , b y c .
- VII. ¿Para qué valores de a , b y c , la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene dos soluciones distintas, una solución o ninguna solución?
- VIII. Encuentre dos funciones cuadráticas, una cuya gráfica abra hacia arriba y la otra hacia abajo, con x -interceptos en $(-4, 0)$ y $(2, 0)$.
- IX. Para cada una de las siguientes ecuaciones, encuentre el (los) valor (es) de la constante k tal que la ecuación tenga exactamente una solución. Determine la solución para cada valor de k .
- | | |
|-----------------------|---------------------------|
| 1) $x^2 + kx + 1 = 0$ | 2) $kx^2 + x + 1 = 0$ |
| 3) $x^2 + x + k = 0$ | 4) $x^2 + kx + k + 3 = 0$ |

2.1.3 PROBLEMAS DE APLICACIÓN

En el problema de la canal, propuesto al comienzo de esta sección, formulábamos la función $A(x) = -2x^2 + 21x$, $0 \leq x \leq 10.5$ como un modelo matemático. La gráfica de esta función es parte de una parábola en la cual se encuentra el vértice:

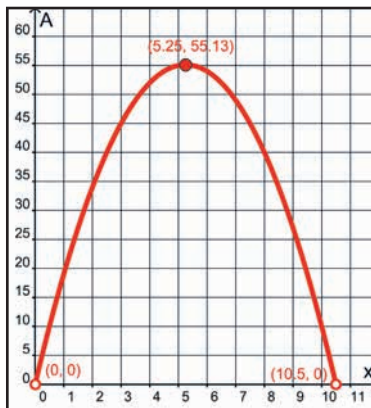


Figura 14

- Calculemos el vértice:

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-21}{2(-2)} = \frac{21}{4} = 5.25$$

$$A(5.25) = -2(5.25)^2 + 21(5.25) = 55.125$$

Como la parábola abre hacia abajo, el valor máximo que toma la función A es 55.125 cm^2 y ocurre cuando $x = 5.25 \text{ cm}$.

Calculamos y cuando $x = 5.25 \text{ cm}$.

$$y = 21 - 2(x) = 21 - 2(5.25) = 10.5$$

Por tanto, si la canal se construye con una altura de 5.25 cm y un ancho de 10.5 cm , el área de la sección transversal será la mayor posible y así la canal podrá conducir la mayor cantidad de agua.

Ejemplo 1

Halle dos números enteros positivos tales que tres veces el primer número sumado con el segundo dé 96 y el producto de los números sea máximo.

Solución

x : primer número

y : segundo número

Planteamos la ecuación:

$$3x + y = 96$$

Despejamos una de las variables en la ecuación, por ejemplo, x :

$$y = 96 - 3x \quad (1)$$

Escribimos el producto de los números $P = xy$, sustituimos el valor de y , en la ecuación (1), para obtener la función producto en términos de la variable x .

$$P(x) = x(96 - 3x)$$

$$P(x) = 96x - 3x^2$$

P es una función cuadrática con coeficiente principal negativo, por lo tanto tiene un máximo. Hallamos el vértice de la parábola:

$$x = \frac{-96}{2(-3)}$$

$$x = 16$$

Sustituimos en (1) el valor de x :

$$y = 96 - 3x = 96 - 3 \cdot 16$$

$$y = 48$$

Los números son 16 y 48.

Ejemplo 2

Un pedazo de alambre de 24 cm de largo se corta en dos partes, (figura 15). Con una parte se forma un círculo y con la otra un cuadrado. ¿Por dónde hay que cortar el alambre para que la suma de las áreas sea mínima?

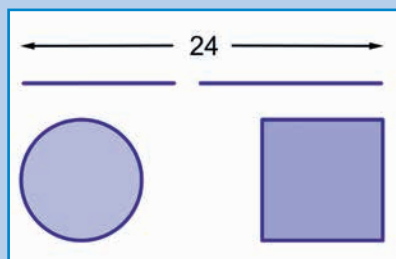


Figura 15

Solución

x : longitud del alambre para formar el círculo.

$24 - x$: longitud del alambre para formar el cuadrado.

Perímetro del círculo: $2\pi r$

La longitud del alambre destinada para formar el círculo equivale al perímetro del mismo, por lo tanto: $2\pi r = x$

Despejamos r , y tenemos:¹

$$r = \frac{x}{2\pi}$$

Perímetro del cuadrado: $4l$

De igual manera, la longitud del alambre destinada para formar el cuadrado equivale al perímetro del mismo: $4l = 24 - x$

Despejamos l , y tenemos:²

$$l = \frac{24 - x}{4}$$

$$\text{Área total: } A_t = \pi r^2 + l^2 \quad (1)$$

¹ Al despejar r la expresión queda en términos de x .

² Al despejar l la expresión queda en términos de x .

Remplazamos los valores de r y l en (1), y simplificamos:

$$A_t = \pi \left(\frac{x}{2\pi} \right)^2 + \left(\frac{24 - x}{4} \right)^2$$

$$A_t = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{576 - 48x + x^2}{16}$$

$$A_t = \frac{(4 + \pi)x^2 - 48\pi x + 576\pi}{16\pi}$$

A_t es una función cuadrática;

$$a = \frac{4 + \pi}{16\pi} \approx 0.1421, b = \frac{-48\pi}{16\pi} = -3, c = \frac{576\pi}{16\pi} = 36$$

Como $a > 0$, el vértice es el punto más bajo de la parábola. El área A es por tanto mínima cuando la longitud del alambre x utilizada para formar el círculo es:

$$x = \frac{-3}{2\left(\frac{4 + \pi}{16\pi}\right)}$$

$$x \approx 10.56 \text{ cm}$$

$$A_t = \frac{(4 + \pi)(10.56)^2 - 48\pi(10.56) + 576\pi}{16\pi}$$

$$A_t \approx 20.16 \text{ cm}^2$$

Se deben cortar 10.56 cm para formar el círculo y 13.44 cm para el cuadrado, de modo que la suma de las áreas sea mínima, 20.16 cm².

Gráfica:

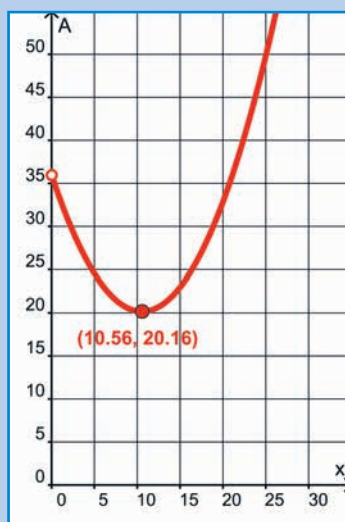


Figura 16

PROBLEMAS

En los problemas 1, 2 y 3, encuentre dos **números positivos** que satisfacen las condiciones indicadas:

- 1) La suma es 36; y el producto es máximo.
- 2) La suma es 80; y la suma de sus cuadrados es mínima.
- 3) La diferencia es 40; y el producto es mínimo.
- 4) Se calcula que asistirán 12 000 espectadores a un juego de fútbol si la entrada cuesta \$7 500. Sobre este precio, por cada \$500 más, la entrada bajará en 240 personas. ¿Qué precio de admisión producirá los ingresos máximos?

- 5) Se sabe que si se plantan 65 naranjos en una finca, el rendimiento promedio por árbol será de 1 500 naranjas por año. Por cada árbol adicional que se plante en ese lugar el rendimiento anual baja en 20 naranjas por árbol. ¿Cuántos árboles se deben plantar para producir la cosecha máxima anual?
- 6) Un vuelo charter con capacidad para 100 pasajeros cobra \$200 000 por persona, más \$4 000 adicionales por cada silla no vendida en el avión. ¿Cuál es el número de sillas no vendidas que produce el máximo ingreso?
- 7) El departamento de mercadeo de una empresa ha encontrado que cuando ciertos artículos se venden a un precio de p pesos por unidad, el número de artículos que se venden está dado por la *ecuación de demanda*:

$$x = 21000 - 150p$$

- a) Exprese el ingreso I como una función del precio p .
- a) ¿Qué precio unitario permite maximizar los ingresos?
- c) ¿Cuál es el máximo ingreso?
- 8) Un ganadero tiene 200 metros de una cerca para encerrar dos corrales rectangulares (figura 17): ¿qué dimensiones producen la mayor área encerrada?

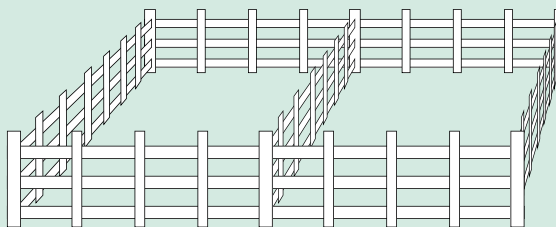


Figura 17

- 9) $f(x) = 3x^2 + bx + 12$ es una función cuadrática, cuya gráfica se muestra en la figura 18, halle $f(5)$.

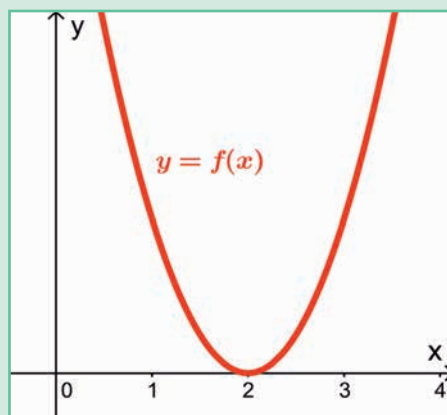


Figura 18

- 10) Un arco en forma de parábola, tiene 10 metros de alto y 2 metros de ancho, en la base (figura 19). ¿Qué tan ancho es el arco a los 5 metros de altura?

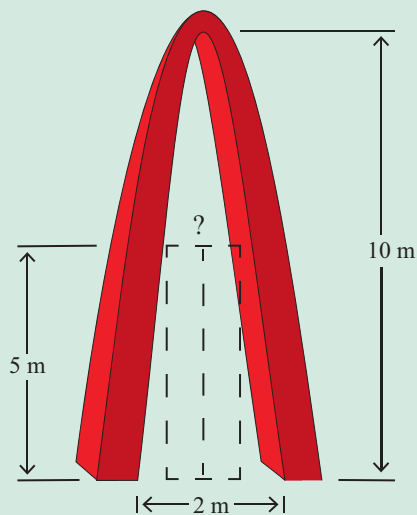


Figura 19

- 11) El precio por unidad p (en miles de pesos), de un artículo, cuando se producen x unidades, se modela mediante la función:

$$p(x) = 6000 - 0.8x$$

El ingreso I , es el producto del precio por unidad y x el número de unidades producidas.

- Halle la función I , determine el dominio.
- ¿Cuántas unidades se pueden producir si el ingreso es de \$8 362 000?
- ¿Cuántas unidades deben producirse para que el ingreso sea máximo?

2.2 FUNCIONES POLINOMIALES

ACTIVIDAD INICIAL

CAJAS SIN TAPA



De un pedazo de cartón de 24 cm de ancho por 15 cm de largo se va a hacer una caja sin tapa, recortando en cada esquina un cuadrado; observemos, por ejemplo, en la figura 1 el proceso cuando recortamos un cuadrado de 4 cm de lado:

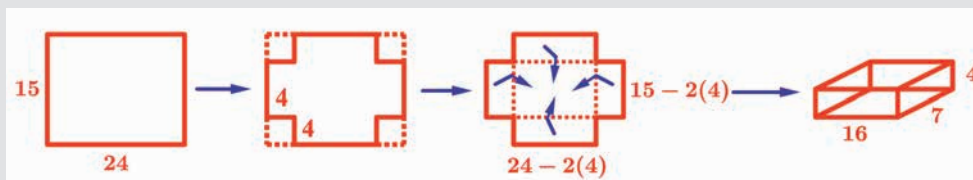


Figura 1



Complete las casillas de la tabla 1 para las cajas obtenidas cuando se recortan cuadrados del lado x indicado:

	x (altura) cm	y (ancho) cm	z (largo) cm	Volumen (xyz) en cm^3
Caja 1	1			
Caja 2	2			
Caja 3	3			
Caja 4	4	16	7	448
Caja 5	5			
Caja 6	6			

Tabla 1

Las cajas que aparecen en la tabla son algunas de las muchas que se podrían construir a partir del cartón inicial. *De todas las posibles cajas, ¿cuál es la que tiene mayor volumen?*

Construiremos a continuación un modelo matemático que nos ayudará a contestar la pregunta anterior.

En la figura 2 representamos la caja que se obtiene cuando al cartón se le recorta en cada esquina un cuadrado de lado x ; las dimensiones las llamaremos: x (altura), y (ancho), z (largo):

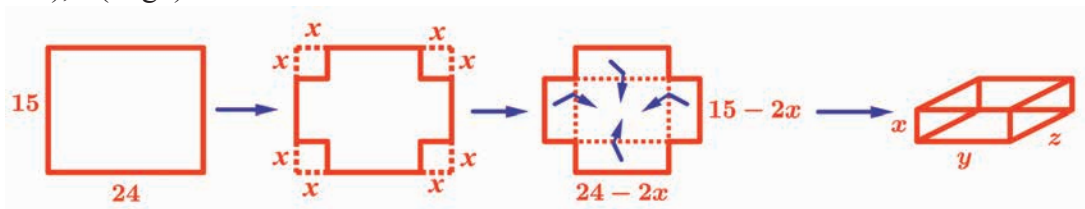


Figura 2

El volumen V de la caja es: $V = \text{alto} \times \text{ancho} \times \text{largo} = xyz$

Las variables y, z , están relacionadas con la variable x por medio de las ecuaciones:

$$y = 24 - 2x \quad z = 15 - 2x$$

Las ecuaciones anteriores nos permiten expresar el volumen de la caja en función de la variable x :

$$V = x(24 - 2x)(15 - 2x)$$

Veamos para qué valores de x definimos la función V , es decir, determinemos cuál es el dominio de V . Los valores de x, y, z no pueden ser negativos ya que representan longitudes, luego $x \geq 0$, $24 - 2x \geq 0$, $15 - 2x \geq 0$.

Resolvamos estas desigualdades:

$$\begin{array}{ll} 24 - 2x \geq 0 & 15 - 2x \geq 0 \\ 24 \geq 2x & 15 \geq 2x \\ x \leq 12 & x \leq 7.5 \end{array}$$

Las desigualdades se satisfacen simultáneamente si $0 \leq x \leq 7.5$

Tenemos entonces que:

$$V(x) = x(24 - 2x)(15 - 2x), 0 \leq x \leq 7.5$$

Efectuando las multiplicaciones llegamos a la función que utilizaremos como *modelo matemático* del problema:

$$V(x) = 4x^3 - 78x^2 + 360x, 0 \leq x \leq 7.5$$

Esta función es un ejemplo de una *función polinomial*.

En la unidad 1 estudiamos las funciones lineales y las funciones cuadráticas. Por ejemplo, $g(x) = \frac{2}{3}x + 1$ es una función lineal y $h(x) = -3x^2 + 2x - 7$ es una función cuadrática.

Si escribimos la forma general de una función lineal $f(x) = mx + b$ como:

$$f(x) = a_1x + a_0$$

y la forma general de la cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ como:

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

observamos que tienen un aspecto similar el cual hacemos explícito con la siguiente definición:

Una función de la forma:
 $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ es una **función polinomial** o **polinomio** de **grado** n donde n es un entero no negativo y $a_n \neq 0$.

$a_nx^n, a_{n-1}x^{n-1}, \dots, a_1x, a_0$ son los **términos** del polinomio.

a_0 es el **término constante**.

Los números $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ son los **coeficientes** de $x^n, x^{n-1}, \dots, x$, respectivamente. a_n , el coeficiente de la potencia más alta, es el **coeficiente principal**.

Por tanto, la función: $g(x) = \frac{2}{3}x + 1$, es una función polinomial de grado 1, con dos términos, el término constante es 1 y el coeficiente principal es $\frac{2}{3}$.



Identifique el grado, el número de términos, el término constante y el coeficiente principal en las funciones polinómicas:

1) $h(x) = -3x^2 + 2x - 7$

2) $V(x) = 4x^3 - 78x^2 + 360x$

Tipos particulares de funciones polinomiales como: $f(x) = x$; $f(x) = x^2$; $f(x) = x^3$; ...; $f(x) = x^n$ se conocen como **funciones potencia** o **funciones polinomiales básicas** de grados 1, 2, 3, ..., n , respectivamente. Uno de los propósitos de esta sección es identificar características de las gráficas de las funciones polinomiales comenzando con las más sencillas que son las funciones potencia.

2.2.1 GRÁFICAS DE FUNCIONES POTENCIA

El trazado de la gráfica de una función polinomial se hace de manera más completa cuando se dispone de ciertas herramientas propias de un curso de cálculo; a este nivel nos damos cuenta, por ejemplo, de aquellos puntos en donde la función pasa de ser creciente a decreciente o viceversa. Los aspectos que se discuten en esta sección tienen que ver más con el aspecto global de la gráfica.

En la figura 3 se muestran las gráficas de las funciones potencia $f(x) = x^n$, para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

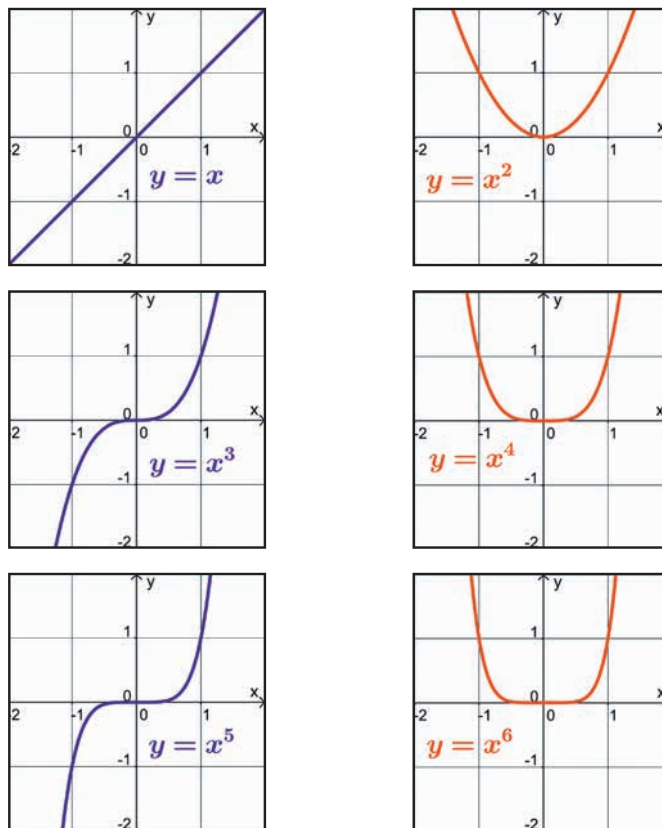


Figura 3

Observemos que las gráficas que se encuentran del lado izquierdo en la figura 3, las cuales corresponden a funciones con exponentes impares, tienen la forma: $\int$, parecidas a una S alargada, mientras que si el exponente es par las gráficas tienen la forma parecida a la de una parábola: $\cup$



Coloque al lado de cada gráfica de la figura 3, características de las funciones correspondientes como: dominio, rango, intervalos de crecimiento o decrecimiento.

La figura 4 muestra en el mismo plano cartesiano las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = x^4$. Compare las dos gráficas.

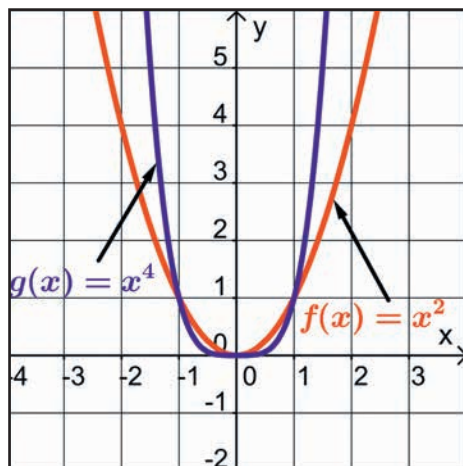


Figura 4

Las gráficas de las funciones en la figura 4 tienen en común lo siguiente: a valores grandes en x corresponden valores grandes en y , esto es, a medida que x se aleja de 0 hacia la derecha, los valores de y se van haciendo más grandes; algo similar se tiene para los valores de x que se alejan de 0 hacia la izquierda. Comportamientos de una función de esta clase los describimos con el siguiente lenguaje:

El **comportamiento final o extremo** de una función se refiere a los valores que toma la función (los valores de y) cuando los valores de x se alejan del cero, hacia la derecha ($x \rightarrow \infty$) o hacia la izquierda ($x \rightarrow -\infty$).

Por ejemplo, en la función $y = x^2$, tenemos: si $x \rightarrow \infty$, $y \rightarrow \infty$; si $x \rightarrow -\infty$, $y \rightarrow \infty$



Describe el comportamiento final de cada función en la figura 3 (al lado de cada gráfica).



En general, ¿cómo es el comportamiento final de las funciones polinomiales básicas?

2.2.2 GRÁFICAS DE FUNCIONES OBTENIDAS POR TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES POTENCIA

La gráfica de la función $y = (x + 1)^3 + 4$ puede obtenerse por transformaciones a la gráfica de $y = x^3$, la función polinomial básica de grado 3, corriéndola una unidad a la izquierda y luego subiéndola 4 unidades. Si desarrollamos el cubo del binomio y luego simplificamos, obtenemos:

$$y = (x + 1)^3 + 4 = (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + 4 = x^3 + 3x^2 + 3x + 5$$

resultado que corresponde a una función polinomial, también de grado 3.

En general se cumple que:

Si a una función polinomial básica $y = x^n$, le efectuamos transformaciones de la forma

$$y = a f(b(x + c)) + d = a(b(x + c))^n + d$$

el resultado es también una función polinomial del mismo grado.

Trazaremos, en los ejemplos que siguen, gráficas de funciones que se obtienen efectuando transformaciones a funciones potencia siguiendo las técnicas de la sección 1.5:

Ejemplo 1

Trace la gráfica de las siguientes funciones:

$$1) \quad y = (x + 1)^3 + 4$$

$$2) \quad y = -(x - 1)^3 - 2$$

$$3) \quad y = (x + 3)^4 - 2$$

$$4) \quad y = -(x - 4)^4 + 3$$

Determine en cada caso: interceptos con los ejes, intervalos de crecimiento o decrecimiento, dominio y rango.

Solución

Las gráficas de las funciones en 1) y 2) se pueden obtener realizando transformaciones a la gráfica de la función $f(x) = x^3$, utilizando como referencia los puntos $(-1, -1)$, $(0, 0)$ y $(1, 1)$; para las funciones en 3) y 4) se hacen transformaciones a la gráfica de $g(x) = x^4$, con $(-1, 1)$, $(0, 0)$ y $(1, 1)$ como puntos de referencia.

- 1) La gráfica de $y = (x + 1)^3 + 4$ la obtenemos desplazando la gráfica de $f(x) = x^3$, 1 unidad a la izquierda y luego 4 hacia arriba (figura 5).

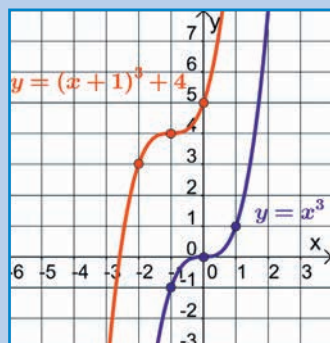


Figura 5

Es una función creciente.

Dominio: los números reales.

Rango: los números reales.

El intercepto con el eje y se obtiene sustituyendo $x = 0$ en la ecuación que define la función:

$$\begin{aligned}y &= (0 + 1)^3 + 4 \\y &= 5\end{aligned}$$

Por tanto, el intercepto con el eje y es $(0, 5)$.

Los interceptos con el eje x se obtienen sustituyendo $y = 0$ en la ecuación que define la función y resolviendo la ecuación que resulta:

$$\begin{aligned}0 &= (x + 1)^3 + 4 \\-4 &= (x + 1)^3 \\-4 &= x + 1 \\x &= \sqrt[3]{-4} - 1\end{aligned}$$

Luego solo hay un intercepto con el eje x , el cual es $(\sqrt[3]{-4} - 1, 0)$.

- 2) $y = -(x - 1)^3 - 2$; la gráfica de y , la obtenemos desplazando la de $f(x) = x^3$, 1 unidad a la derecha, reflejando en el eje x y moviendo 2 hacia abajo (figura 6).

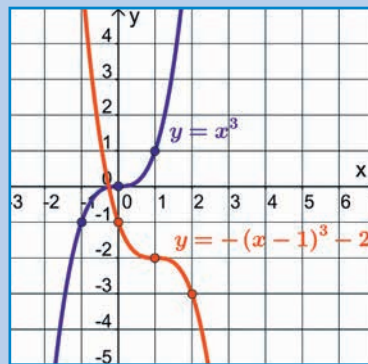


Figura 6

Es una función decreciente.

Intercepto eje x : $(\sqrt[3]{-2} + 1, 0)$

$$\begin{aligned}0 &= -(x - 1)^3 - 2 \\(x - 1)^3 &= -2 \\x &= \sqrt[3]{-2} + 1\end{aligned}$$

Intercepto eje y : $(0, -1)$

Dominio: los números reales.

Rango: los números reales.

- 3) La gráfica de $y = (x + 3)^4 - 2$ la obtenemos desplazando la de $g(x) = x^4$, 3 unidades a la izquierda y luego 2 hacia abajo (figura 7).

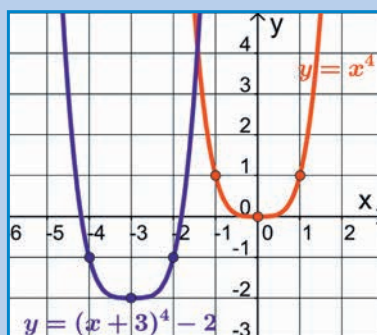


Figura 7

Decrece en $(-\infty, -3)$.

Crece en $(-3, \infty)$.

Interceptos eje x :

$$(\sqrt[4]{2} - 3, 0), (-\sqrt[4]{2} - 3, 0)$$

Intercepto eje y : $(0, 79)$

Dominio: los números reales.

Rango: $[-2, \infty)$.

- 4) $y = -(x - 4)^4 + 3$; la gráfica de y , la obtenemos desplazando la de $g(x) = x^4$, 4 unidades a la derecha, reflejando en el eje x y moviendo 3 unidades hacia arriba (figura 8).

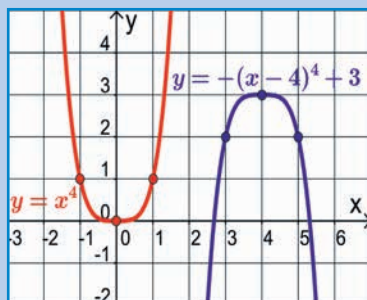


Figura 8

Crece en $(-\infty, 4)$.

Decrece en $(4, \infty)$.

Interceptos eje x :

$$(\sqrt[4]{3} + 4, 0), (-\sqrt[4]{3} + 4, 0)$$

Intercepto eje y : $(0, -253)$

Dominio: los números reales.

Rango: $(-\infty, 3]$.



Trace la gráfica de las siguientes funciones y determine intervalos de crecimiento y decrecimiento, interceptos con los ejes, dominio y rango.

1) $y = -2x^3 + 1$

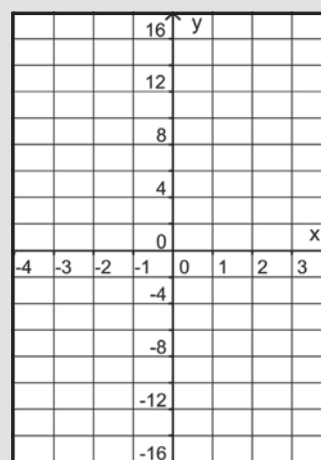


Figura 9

2) $y = \frac{1}{2}(x + 2)^4$

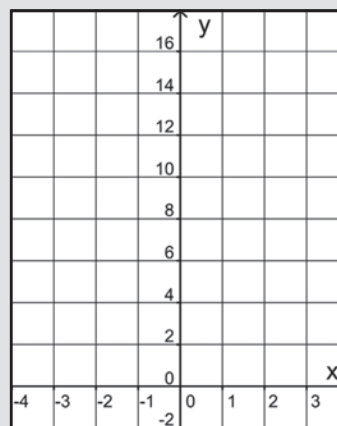


Figura 10

Como puede verificarse en los ejemplos anteriores, las gráficas de las funciones polinomiales obtenidas por transformaciones $y = a f(b(x + c)) + d = a(b(x + c))^n + d$, realizadas a las gráficas de las funciones polinomiales básicas $y = x^n$, tienen una de estas formas:

$$\begin{array}{ll} \nearrow & \text{si } n \text{ es impar y } a > 0 \\ \searrow & \text{si } n \text{ es impar y } a < 0 \\ \cup & \text{si } n \text{ es par y } a > 0 \\ \cap & \text{si } n \text{ es par y } a < 0 \end{array}$$

EJERCICIOS

I. Trace la gráfica de las siguientes funciones:

1) $y = 2(x + 2)^3$

2) $y = -2(x - 3)^4$

3) $y = -\frac{1}{2}(x - 1)^3 + 3$

4) $y = \frac{1}{2}(x - 2)^4 + 1$

II. Trace la gráfica de las siguientes funciones. Determine intervalos de crecimiento, intercepto con los ejes, valor máximo o mínimo, dominio y rango:

1) $y = (x + 3)^5 - 2$

2) $y = -(x + 5)^6 - 4$

2.2.3 BOSQUEJANDO LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN POLINOMIAL

Hemos visto el bosquejo de gráficas de funciones polinomiales de la forma $y = a(bx + c)^n + d$ con las técnicas de la sección 1.5. Si $n = 2$, vimos en la sección 2.1 que cualquier función cuadrática puede obtenerse por transformaciones de la función cuadrática básica $y = x^2$. Para $n = 3$, ¿se tiene una situación similar?, es decir, ¿cualquier función cúbica se puede obtener por medio de transformaciones de la función cúbica $y = x^3$?

Tomemos por ejemplo la función $g(x) = x^3 - x$. Si $c \neq 0$, en $y = a(bx + c)^3 + d$, entonces al desarrollar el binomio aparece un término en x^2 que la función g no tiene, y, si $c = n$, entonces el desarrollo del binomio no tiene término en x . Por tanto, $g(x) = x^3 - x$ es un ejemplo de una función cúbica que no se puede obtener por transformaciones de la función cúbica básica $y = x^3$.

No todas las funciones cúbicas se pueden obtener por transformaciones de la función cúbica básica $y = x^3$.

Grafiquemos $y = x^3 - x$ con la ayuda de una calculadora graficadora o un programa de computador:

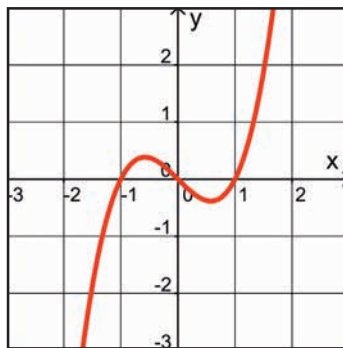


Figura 11

La gráfica muestra tres intercepciones con el eje x : -1 , 0 , 1 . Estas pueden determinarse manualmente teniendo en cuenta que en esos puntos la ordenada es 0 ; por tanto, sustituimos la y por 0 y resolvemos la ecuación resultante:

$$0 = x^3 - x$$

Se trata de una ecuación de tercer grado; factorizamos completamente y utilizamos la propiedad del producto nulo:

$$0 = x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$$

$$x = 0 \quad \text{o} \quad x - 1 = 0 \quad \text{o} \quad x + 1 = 0$$

De donde llegamos a que $x = 0$, o $x = 1$, o $x = -1$

En la gráfica se ve que la intercepción con el eje y es 0 ; manualmente se llega a esto sustituyendo la x por 0 y realizando las operaciones indicadas:

$$y = 0^3 - 0 = 0$$

Colocando las gráficas en el mismo plano y haciendo *zoom* hacia afuera (figura 12), una graficadora nos muestra que el comportamiento final de $y = x^3 - x$ es el mismo que el de $y = x^3$:

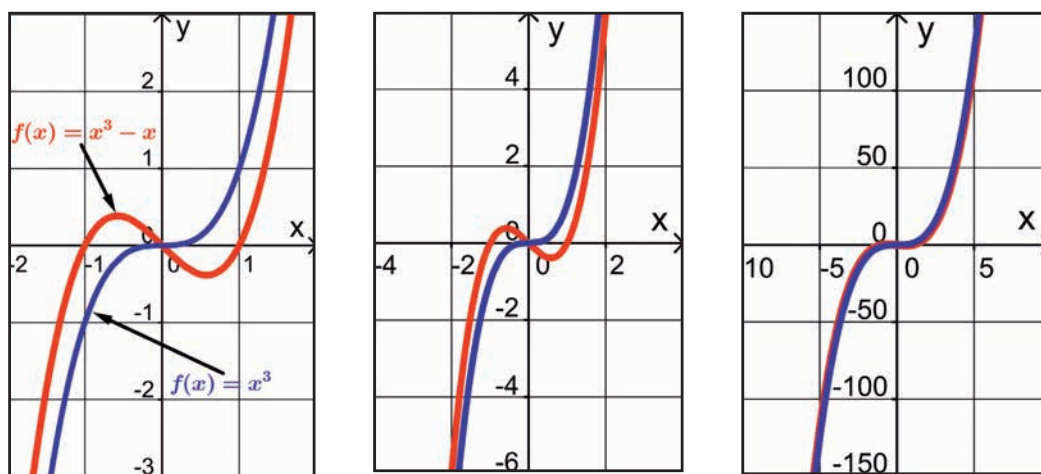


Figura 12

Las gráficas de las funciones polinomiales son como la de la función en la figura 13 en la que no hay puntas ni separaciones o agujeros (son continuas); no encontraremos gráficas de funciones polinomiales como la de la figura 14 en la cual se presentan separaciones, agujeros o puntas:

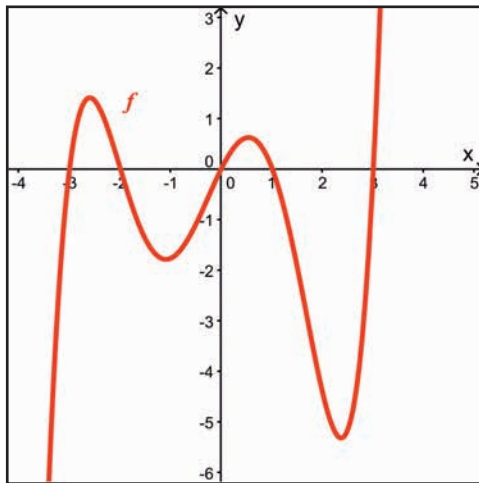


Figura 13

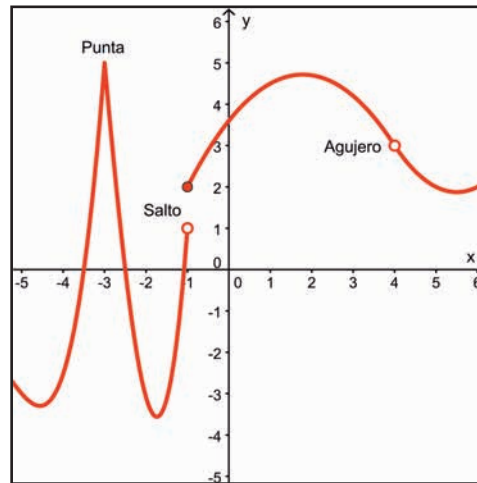


Figura 14

En general se tienen las siguientes características:

Las gráficas de las funciones polinomiales son continuas (no contienen separaciones o agujeros) y suaves (no contienen puntas).

El proceso para hacer el bosquejo de la gráfica de una función polinomial lo ilustramos con los siguientes ejemplos:

Ejemplo 2

Trazar las gráficas de:

$$1) f(x) = x^3 + 4x^2 + 3x$$

$$2) g(x) = x^4 - 10x^2 + 9$$

Solución

$$1) f(x) = x^3 + 4x^2 + 3x$$

- Hallamos el intercepto con el eje y : $f(0) = 0$

la gráfica intercepta al eje y en 0.

- Hallamos los interceptos de la gráfica de $f(x) = x^3 + 4x^2 + 3x$ con el eje x (las abscisas de esos puntos se llaman los **ceros** de la función).

$$0 = x^3 + 4x^2 + 3x$$

Para resolver esta ecuación factorizamos completamente:

$$0 = x(x^2 + 4x + 3) = x(x + 3)(x + 1)$$

aplicamos la propiedad del producto nulo y obtenemos:

$$x = 0, \quad x + 3 = 0, \quad x + 1 = 0$$

$$x = 0, \quad x = -3, \quad x = -1$$

luego la gráfica intercepta al eje x en 0, -3 y -1

- Con los valores anteriores determinamos los intervalos $(-\infty, -3)$, $(-3, -1)$, $(-1, 0)$ y $(0, \infty)$. Tomamos un número real en cada uno de estos intervalos, lo remplazamos en cada factor de la función y determinamos el signo correspondiente:

	$(-\infty, -3)$	$(-3, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, \infty)$
x	$-$	$-$	$-$	$+$
$(x + 3)$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(x + 1)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x(x + 3)(x + 1)$	$-$	$+$	$-$	$+$

La función es positiva en $(-3, -1) \cup (0, \infty)$.

La función es negativa en $(-\infty, -3) \cup (-1, 0)$.

- Comportamiento final de la función:

El grado de la función es *impar* y el coeficiente principal es *positivo*, la gráfica es *tipo S*: $\int$. Si $x \rightarrow \infty$, $y \rightarrow \infty$; si $x \rightarrow -\infty$, $y \rightarrow -\infty$ (figura 15).

- Se traza la gráfica ubicando algunos puntos:

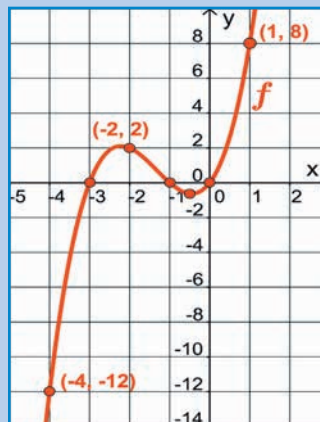


Figura 15

2) Para trazar la gráfica de la función $g(x) = x^4 - 10x^2 + 9$:

- Hallamos el intercepto con el eje y : $g(0) = 9$
la gráfica intercepta al eje y en 9.

- Hallamos los ceros de la función, resolviendo la ecuación $0 = x^4 - 10x^2 + 9$. Para ello factorizamos completamente:

$$0 = x^4 - 10x^2 + 9 = (x^2 - 9)(x^2 - 1) = (x - 3)(x + 3)(x - 1)(x + 1)$$

aplicamos la propiedad del producto nulo:

$$x - 3 = 0, \quad x + 3 = 0, \quad x - 1 = 0, \quad x + 1 = 0$$

y obtenemos los *ceros de la función*

$$x = 3, \quad x = -3, \quad x = 1, \quad x = -1$$

luego la gráfica intercepta al eje x en $-3, -1, 1$, y 3 .

- Se hallan algunos valores entre los ceros, para determinar los intervalos en los que $g \geq 0$, o, $g \leq 0$.

$$g(-4) = 105, \quad g(-2) = -15, \quad g(2) = -15, \quad g(4) = 105$$

La función es positiva en $(-\infty, -3) \cup (-1, 1) \cup (3, \infty)$.

La función es negativa en $(-3, -1) \cup (1, 3)$.

- Comportamiento final de la función:
Como el grado de la función es *par* y el coeficiente principal *es positivo*, la gráfica de g es tipo parábola $\cup$. Si $x \rightarrow \infty$, $y \rightarrow \infty$; si $x \rightarrow -\infty$, $y \rightarrow \infty$ (figura 16).
- Se traza la gráfica:

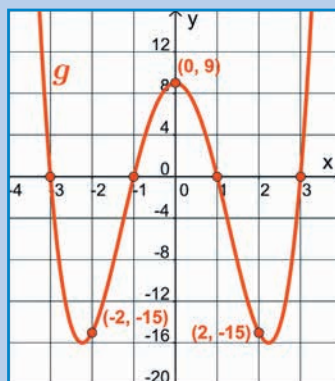


Figura 16



Trazar la gráfica de las funciones

$$1) \quad f(x) = -(x^2 - x)(x^2 - x - 6)$$

$$2) \quad g(x) = -x(x^2 - 3x + 2)(x^2 + 4x + 3)$$

De una función polinomial f , en la cual se verifica que $f(c) = 0$, para algún $c \in \mathbb{R}$, son equivalentes las siguientes afirmaciones:

- c es un *cero de la función*.
- c es una solución de la ecuación $f(c) = 0$.
- c es un x -intercepto de la gráfica de f .
- $x - c$ es un factor de f .

Retomemos la función que obtuvimos en la *actividad inicial*, cajas sin tapa, en la cual se quería construir la caja con mayor volumen. La función polinomial resultante fue:

$$V(x) = 4x^3 - 78x^2 + 360x, \quad 0 \leq x \leq 7.5$$

Su equivalente, factorizada:

$$V(x) = x(24 - 2x)(15 - 2x), \quad 0 \leq x \leq 7.5$$

Para trazar la gráfica hallamos los ceros, corte con el eje y , y examinamos su comportamiento en el dominio de V :

- Los ceros son: $x = 0, \quad 24 - 2x = 0 \quad \text{o} \quad 15 - 2x = 0$
esto es: $x = 0, \quad x = 12 \quad x = 7.5$

únicamente sirven 0 y 7.5, ya que 12 no está en el dominio de V .

- El intercepto con el eje y es 0.
- Como es una función de grado impar y el coeficiente principal es positivo, la gráfica es tipo S . Debemos considerar dicha gráfica para valores de x en el intervalo $[0, 7.5]$.
- Las gráficas, con dominio todos los reales y con dominio restringido:

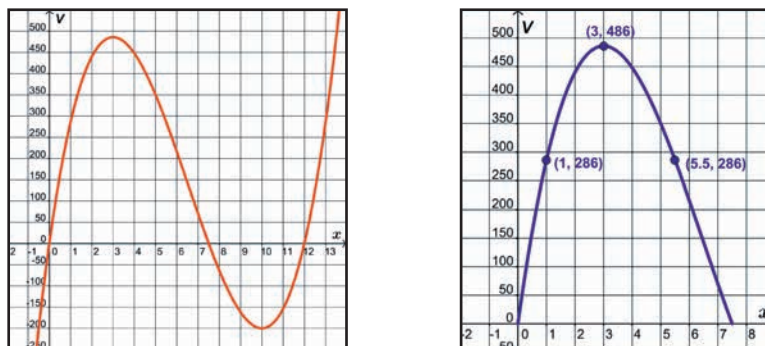


Figura 17

De acuerdo con la gráfica podemos establecer que el mayor volumen se tiene cuando se construye una caja en la que se recorte en cada esquina un cuadrado de 3 cm de lado, obteniéndose un volumen de 486 cm^3 .

Hemos visto funciones polinomiales en las cuales los ceros de la función aparecen una sola vez. Veamos, con el siguiente ejemplo, la gráfica de funciones polinomiales en las cuales un cero aparece más de una vez.

Ejemplo 3

Trazar la gráfica de:

1) $f(x) = -(x - 1)^3(x + 2)^4$

2) $g(x) = -x(x - 2)^2(x + 2)^3$

Solución

1) Para trazar la gráfica de la función $f(x) = -(x - 1)^3(x + 2)^4$:

- Hallamos el intercepto con el eje y :

$$f(0) = -(0 - 1)^3(0 + 2)^4 = -(-1)(16) = 16$$

la gráfica intercepta al eje y en 16.

- Hallamos los interceptos con el eje x o ceros de la función, resolviendo la ecuación $0 = -(x - 1)^3(x + 2)^4$

$$\begin{array}{ll} (x - 1)^3 = 0 & \text{o} \quad (x + 2)^4 = 0 \\ \sqrt[3]{(x - 1)^3} = \sqrt[3]{0} & \text{o} \quad \sqrt[4]{(x + 2)^4} = \sqrt[4]{0} \\ x - 1 = 0 & \text{o} \quad x + 2 = 0 \\ x = 1 & \text{o} \quad x = -2 \end{array}$$

El cero de la función $x = 1$, se repite 3 veces. En este caso se dice que 1 es un cero de **multiplicidad tres**. Tomamos valores menores y mayores que 1:

$$f(0) = 16$$

$$f(2) = -256$$

Vemos que el signo de la función cambia; antes de 1 la función es positiva y después de 1 es negativa, por tanto la gráfica **cruza** el eje x en 1.

El cero $x = -2$, se repite 4 veces; -2 es un cero de **multiplicidad cuatro**. Tomamos valores menores y mayores que -2 :

$$f(-3) = 64$$

$$f(-1) = 8$$

Vemos que el signo de la función no cambia; antes y después de -2 la función es positiva, por tanto la gráfica **no cruza** el eje x en -2 , solo lo **toca**.

- Comportamiento final de la función:

f es una función de grado siete, es decir es *impar*, y el coeficiente principal es *negativo*, su gráfica es tipo $S \searrow$. Si $x \rightarrow \infty$, $y \rightarrow -\infty$; si $x \rightarrow -\infty$, $y \rightarrow \infty$ (figura 18).

- Trazamos la gráfica de f :

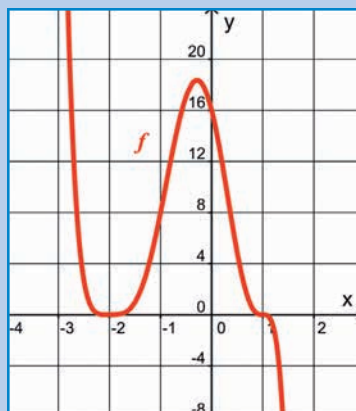


Figura 18

- 2) Tracemos ahora la gráfica de $g(x) = -x(x-2)^2(x+2)^3$ siguiendo el esquema anterior:

- Hallamos el intercepto con el eje y : $g(0) = 0$
la gráfica intercepta al eje y en 0.
- Hallamos los interceptos con el eje x o ceros de la función, resolviendo la ecuación $0 = -x(x-2)^2(x+2)^3$

$$\begin{array}{lll}
 -x = 0 & (x-2)^2 = 0 & (x+2)^3 = 0 \\
 x = 0 & x-2 = 0 & x+2 = 0 \\
 x = 0 & \text{o} & x = 2 \quad \text{o} \quad x = -2
 \end{array}$$

El cero de la función $x = 2$, se repite 2 veces; por lo tanto 2 es un cero de *multiplicidad dos*. Al tomar valores antes y después de 2:

$$g(1) = -27 \quad g(3) = -375$$

el signo de la función no cambia, antes y después de 2 la función es negativa, la gráfica *no cruza* el eje x en 2.

El cero $x = -2$, se repite 3 veces; -2 es un cero de *multiplicidad tres*. Al tomar valores antes y después de -2 :

$$g(-3) = -75 \quad g(-1) = 9$$

el signo de la función cambia, antes de -2 g es negativa y después es positiva, por tanto la gráfica *cruza* el eje x en -2 .

- Comportamiento final de la función:
 g es una función de grado seis, es decir el grado es *par*, y el coeficiente principal es *negativo*, su gráfica es tipo *parábola* $\cap$. Si $x \rightarrow \infty$, $y \rightarrow -\infty$; si $x \rightarrow -\infty$, $y \rightarrow -\infty$ (figura 19).
- Trazamos la gráfica de g :

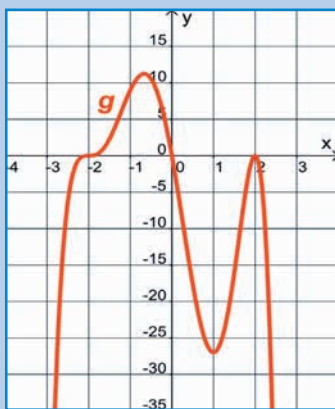


Figura 19

Si $(x - c)^m$ es un factor de la función polinomial f y m es un número entero positivo, decimos que c es un cero de *multiplicidad* m .

- Si m es par, la función *toca* el eje x en c . La función tiene el mismo signo, para valores cercanos, mayores y menores que c .
- Si m es impar, la función *cruza* el eje x en c . La función cambia de signo, para valores cercanos, menores y mayores que c .

Ejemplo 4

Encuentre una función polinomial de grado dado cuya gráfica se muestra.

1) Grado 3

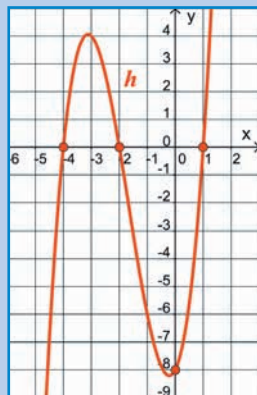


Figura 20

2) Grado 4

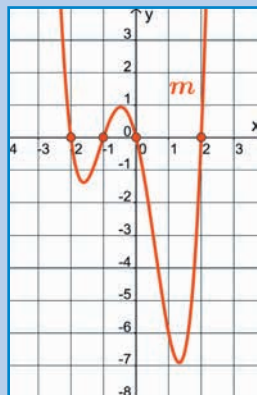


Figura 21

- 1) Como la gráfica que aparece en la figura 20 es tipo $\nearrow$ creciente en sus extremos, la función debe ser de grado impar, con coeficiente principal positivo.

De igual manera dicha gráfica tiene 3 interceptos con el eje x . Ellos son: -4 , -2 y 1 . Cada intercepto es un cero de la función, por lo tanto se tienen los factores:

$$(x + 4), (x + 2) \text{ y } (x - 1).$$

La función: $h(x) = (x + 4)(x + 2)(x - 1) = x^3 + 5x^2 + 2x - 8$, corresponde a una función polinomial de grado tres, que se ajusta a la gráfica de la función h que se muestra en la figura 20. Igualmente el intercepto con el eje y en la gráfica es $(0, -8)$, y en la función tenemos: $h(0) = -8$.

- 2) La gráfica de la función representada en la figura 21, es tipo $\searrow$, el grado de la función debe ser par, con coeficiente principal positivo.

Tiene 4 interceptos con el eje x , ellos son: 0, -2 , -1 y 2 . Por lo tanto se tienen los factores: x , $(x + 2)$, $(x + 1)$, y $(x - 2)$.

La función: $m(x) = x(x + 2)(x + 1)(x - 2) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x$, representa una función polinomial de grado 4 que se ajusta a la gráfica de la función m que aparece en la figura 21. Igualmente el intercepto con el eje y en la gráfica es $(0, 0)$, y en la función tenemos: $m(0) = 0$.

EJERCICIOS

I Encuentre una función polinomial h , con las condiciones especificadas en cada caso:

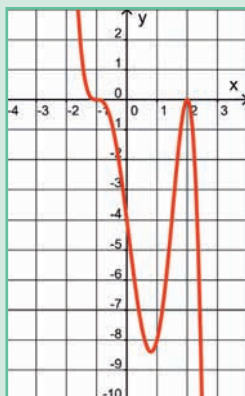
- 1) Grado 3; ceros en -2 , 1 y 1 .
- 2) Grado 4; ceros en -4 , -2 , 1 , 4 ; y -intercepto en 6 .
- 3) Grado 4; ceros en -3 , 1 y 3 .
- 4) Grado 5; ceros en -2 de multiplicidad 3 y en 1 de multiplicidad 2.
- 5) Grado 6; ceros en -1 , 0 y 3 de multiplicidad 2.
- 6) Grado 3; $h(1) = 4$, $h(-3) = h(-1) = h(4) = 0$
- 7) Cruce al eje x en los puntos -1 y 4 , toque el eje x en 0 y 2 , y sea menor que cero en el intervalo $0 < x < 2$.
- 8) Grado 4; $h(2) = -3$, $h(-2) = h(1) = h(-4) = h(3) = 0$

II. Dadas las funciones polinomiales:

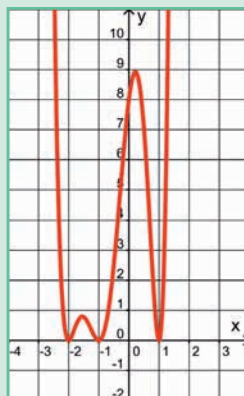
- | | |
|-------------------------------------|---|
| a) $y = -3x(x + 2) \cdot (x - 1)$ | b) $y = -(x + 1) \cdot (x - 2)^3$ |
| c) $y = 2x(x + 2) \cdot (x - 1)$ | d) $y = x(x + 2) \cdot (x + 1) \cdot (x - 2)$ |
| e) $y = -(x + 1)^3 \cdot (x - 2)^2$ | f) $y = 2(x + 2)^2 \cdot (x + 1)^2 \cdot (x - 1)^2$ |
| g) $y = (x + 1)^2 \cdot (x - 2)^3$ | h) $y = -(x + 3)^2 \cdot (x + 1)^2 \cdot (x - 1)^2$ |

forme la pareja con la gráfica correspondiente entre las que aparecen a continuación:

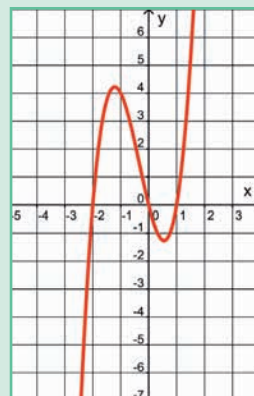
1) ()



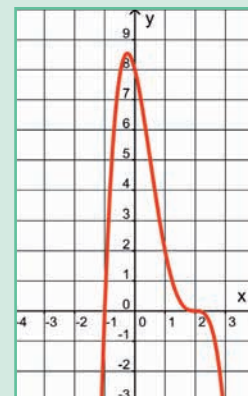
2) ()



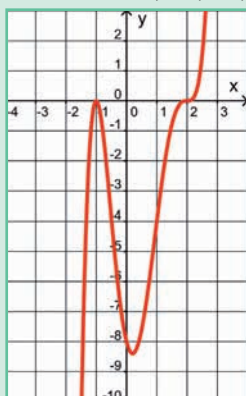
3) ()



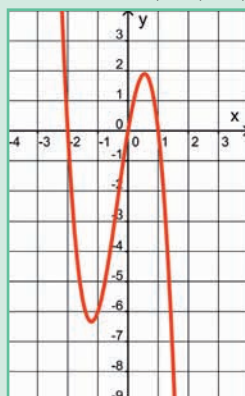
4) ()



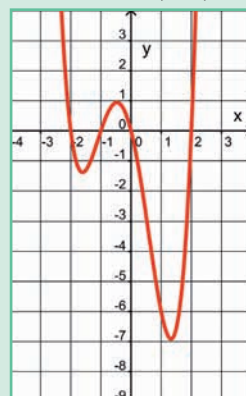
5) ()



6) ()



7) ()



8) ()

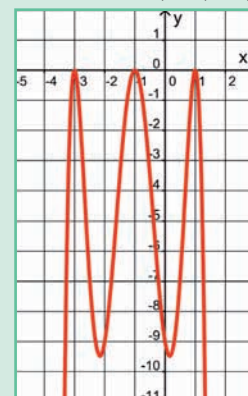


Figura 22

III. Trazar la gráfica de las siguientes funciones.

1) $f(x) = (x - 3)(x - 1)(x + 2)$

2) $g(x) = -x^3 - x^2 + 12x$

3) $h(m) = -m(m^2 - 1)(m^2 - 4)$

4) $f(r) = r^4 - 5r^2 + 4$

5) $g(x) = -(x - 1)^2(x + 2)^2$

6) $h(x) = x - 2x^2 - 3x$

7) $f(x) = x^2(x + 1)(x - 2)^2$

8) $f(t) = (t^2 - 1)(t^2 - 16)$

9) $h(t) = (t^2 - 2t - 3)(t^2 + t - 2)$

10) $g(x) = -(x^2 + 1)(x^2 - 1)$

IV. ¿Cuáles de las siguientes funciones puede tener la gráfica de la figura 23? (Más de una respuesta puede ser posible).

1) $y = -4x(x - 1)(x - 2)$

2) $y = x(x + 1)(x + 2)$

3) $y = 3x(x - 1)(x - 2)$

4) $y = x(x - 1)^2(x - 2)^2$

5) $y = x^3(x - 1)^5(x - 2)^7$

6) $y = -x(1 - x)(x - 2)$

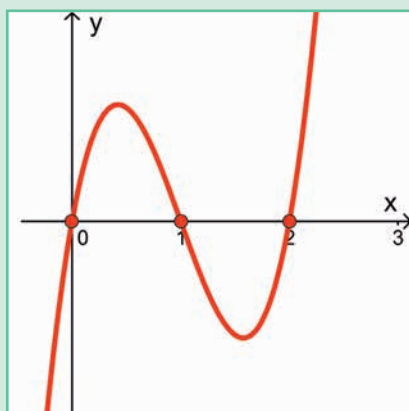


Figura 23

V. De la gráfica de la función polinomial: $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$, ¿cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos? Explique su respuesta.

- 1) Intercepta al eje y en un solo punto.
- 2) Intercepta al eje x en más de tres puntos.
- 3) Los comportamientos finales de la gráfica de f son como los de la gráfica de $y = x^3$.
- 4) Pasa por el origen.

VI. Resuelva los siguientes problemas:

- 1) La intensidad de luz emitida por una luciérnaga puede ser determinada por la función $L(T) = 10 + 0.3T + 0.42T^2 - 0.01T^3$, donde T es la temperatura medida en grados Celsius y L es la intensidad de la luz en *lumens*.
 - a) Si la temperatura es de 15°C , encuentre la intensidad de la luz.
 - b) Si la intensidad de la luz es de 96, encuentre la temperatura correspondiente. (Utilice un Sistema Algebraico Computarizado, SAC, para resolver la ecuación).
 - c) Para qué valores de T tiene sentido el modelo matemático utilizado en el problema.
- 2) Se quiere construir una caja abierta con volumen de 1820 cm^3 , a partir de una lámina de cartón de 24 cm por 36 cm , cortando en cada esquina cuadrados de longitud $x\text{ cm}$ y doblando hacia arriba. ¿Qué longitud debe tener x ?

2.3 FUNCIONES RACIONALES

ACTIVIDAD INICIAL

MATERIAL PARA CONSTRUIR UNA CAJA

Se necesita elaborar cajas de base cuadrada con capacidad de 750 ml de forma que puedan contener un nuevo producto lácteo que entrará a competir en el mercado (figura 1).

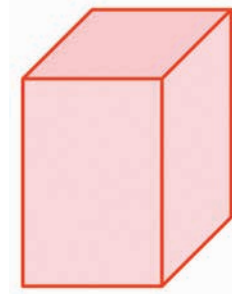


Figura 1



Dé ejemplos de 3 posibles cajas cuyas capacidades sean de 750 ml cada una; calcule la cantidad de material que requiere cada caja.

En esta sección construiremos un modelo que nos permita contestar la pregunta:

¿Cuáles son las dimensiones de la caja cuya capacidad sea de 750 ml y que requiera la menor cantidad de material, en vista de los costos que representa un envase tetrapack?

Volviendo a la actividad inicial de esta sección, supongamos que las dimensiones de una caja con volumen de 750 cm^3 , son las que se muestran en la figura 2:¹

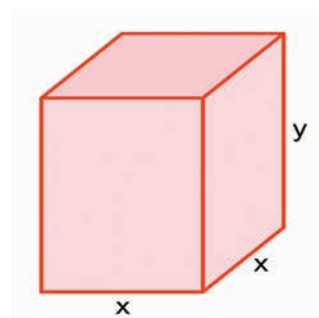


Figura 2

El área superficial de la caja es: $A = 2x^2 + 4xy$

Expresamos ahora el área en términos de una sola variable independiente, utilizando la condición de que su volumen es de 750 cm^3 :

$$x^2y = 750$$

despejamos y y la sustituimos en A :

$$y = \frac{750}{x^2} \quad (1)$$

$$A = 2x^2 + 4x \frac{750}{x^2}$$

$$A = 2x^2 + \frac{3000}{x} = \frac{2x^3 + 3000}{x}$$

¹ 1 ml equivale a 1 cm^3 cuando la densidad del líquido es aproximadamente 1. En el caso de la leche es igualmente equivalente.

Consideremos el área como una función de x :

$$A(x) = \frac{2x^3 + 3000}{x}, \quad x \geq 0 \quad (2)$$

Una función como la anterior es un ejemplo de una función racional.

Una función de la forma: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$
 es una **función racional**, donde P y Q son funciones
 polinomiales, $Q(x) \neq 0$.
 $P(x)$ es el **numerador**, $Q(x)$ es el **denominador**.

Ejemplo 1

¿De las siguientes funciones cuáles son racionales?

$$\begin{array}{lll} 1) \ g(x) = \frac{1}{x} & 2) \ h(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{2x-5} & 3) \ m(t) = \frac{3^t}{t^2+3t} \\ 4) \ n(r) = \frac{-5}{r+3} & 5) \ p(\theta) = \frac{2}{\sin\theta} & 6) \ q(x) = \frac{x-5}{x^2-2x-8} \end{array}$$

Las funciones 1), 4) y 6) son ejemplos de funciones racionales; tanto el numerador como el denominador son polinomios.

Las funciones 2), 3) y 5) no son ejemplos de funciones racionales. El numerador o el denominador no son polinomios.

En las funciones polinomiales el dominio es el conjunto de los números reales; en las racionales, como se involucra división, la función no queda definida para aquellos valores de x en los que el denominador se hace cero. Por tanto:

El **dominio** de una función racional es el conjunto de los números reales para los cuales el denominador es diferente de cero.

Ejemplo 2

Hallar el dominio de las funciones racionales:

$$1) \ h(x) = \frac{1}{x} \qquad 2) \ g(x) = \frac{1}{x+3} \qquad 3) \ m(x) = \frac{x-5}{x^2-2x-8}$$

Solución

- 1) El denominador de $h(x) = \frac{1}{x}$ es igual a 0 si $x = 0$. Luego el dominio de h es el conjunto de los números reales excepto 0:

$$\text{dom } h = \mathbb{R} - \{0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\}$$

- 2) El denominador es 0 si $x + 3 = 0$; esto es, si $x = -3$
por tanto, $\text{dom } g = \mathbb{R} - \{-3\}$.

- 3) Hallamos los valores de x para los cuales $x^2 - 2x - 8 = 0$; resolvemos esta ecuación por medio de factorización:

$$(x+2)(x-4) = 0$$

$$\begin{array}{ccc} x+2=0 & \text{o} & x-4=0 \\ x=-2 & \text{o} & x=4 \end{array}$$

por tanto, $\text{dom } m = \mathbb{R} - \{-2, 4\}$.

2.3.1 GRÁFICAS DE FUNCIONES RACIONALES

Un rasgo distintivo de las gráficas de las funciones racionales es que en algunos casos se presentan **asíntotas**. Una asíntota es una línea recta a la cual la gráfica se aproxima más y más a medida que esta se extiende en el plano cartesiano. La asíntota puede tener una de estas tres posiciones particulares: si es paralela o coincide con el eje y , es una *asíntota vertical*; si es paralela o coincide con el eje x , es una *asíntota horizontal*; pero si no es paralela a ninguno de los ejes coordenados, entonces será una *asíntota oblicua*.

Ejemplo 3

Trazar la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$

- Vimos en el ejemplo 2 que la función no está definida para $x = 0$; esto es, $\text{dom } h = \mathbb{R} - \{0\}$.
- Algunos valores funcionales aparecen en la tabla 1:

x	1	2	4	-1	-2	-4
$f(x)$	1	$\frac{1}{2} = 0.5$	$\frac{1}{4} = 0.25$	-1	$-\frac{1}{2} = -0.5$	$-\frac{1}{4} = -0.25$

Tabla 1

Graficamos estos puntos en la figura 3:

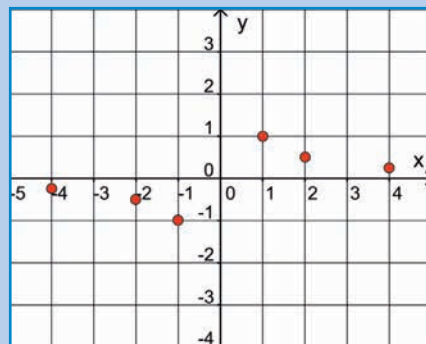


Figura 3

- Veamos el comportamiento de la función para valores de x cercanos a cero, tanto por la izquierda como por la derecha.

x	-1	-0.5	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001
$f(x)$	-1	-2	-10	-100	-1000	-10 000

Tabla 2

En la tabla 2 observamos que a medida que x se acerca a 0 por la izquierda, los valores que toma la función se hacen cada vez menores, alejándose tanto de 0 si x se acerca lo suficiente a 0. Con símbolos lo expresamos así:

$$\text{si } x \rightarrow 0^-, \text{ entonces } y \rightarrow -\infty$$

Análogamente, cuando x se acerca a 0 por la derecha (tabla 3), los valores que toma la función se hacen cada vez más grandes si x se acerca suficientemente a 0:

x	0.0001	0.001	0.01	0.1	0.5	1
$f(x)$	10 000	1000	100	10	2	1

Tabla 3

$$\text{si } x \rightarrow 0^+, \text{ entonces } y \rightarrow +\infty$$

La recta $x = 0$ (el eje y) es una **asíntota vertical** de la gráfica de f (figura 4).

- Veamos ahora el comportamiento de $f(x) = \frac{1}{x}$ cuando x se hace tan grande como se quiera (tabla 4):

x	1	2	10	100	1000	10 000
$f(x)$	1	0.5	0.1	0.01	0.001	0.0001

Tabla 4

Simbólicamente lo expresamos: si $x \rightarrow \infty$, entonces $y \rightarrow 0$.

Observamos que a medida que los valores de x se hacen mas grandes, los valores de y se acercan a 0; algo similar ocurre (tabla 5) cuando los valores de x se alejan de 0 hacia la izquierda:

x	-1	-2	-10	-100	-1000	-10 000
$f(x)$	-1	-0.5	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001

Tabla 5

Igualmente lo expresamos: si $x \rightarrow -\infty$, entonces $y \rightarrow 0$.

La recta $y = 0$ es una **asíntota horizontal** de la gráfica de f (figura 4).

- Gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$

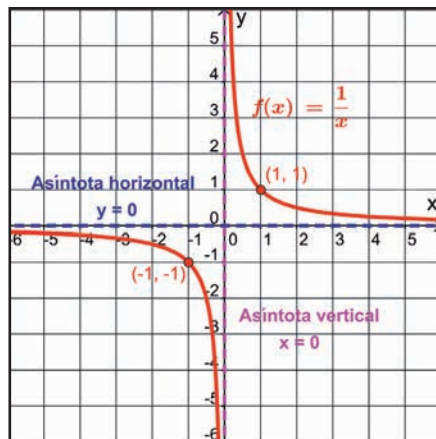


Figura 4

Con un lenguaje más formal, caracterizamos las asíntotas horizontales y verticales como sigue:

En una *función racional* $y = f(x)$, la recta $x = c$ es una **asíntota vertical** de la gráfica de f si y tiende a infinito o a menos infinito, cuando x tiende a c por la derecha ($x \rightarrow c^+$) o x tiende a c por la izquierda ($x \rightarrow c^-$), esto es, si se verifica cualquiera de estos enunciados:

$y \rightarrow \infty$, cuando $x \rightarrow c^+$	$y \rightarrow -\infty$, cuando $x \rightarrow c^+$
$y \rightarrow \infty$, cuando $x \rightarrow c^-$	$y \rightarrow -\infty$, cuando $x \rightarrow c^-$
$y \rightarrow \infty$, cuando $x \rightarrow c$	$y \rightarrow -\infty$, cuando $x \rightarrow c$

En la figura 5, la recta $x = c$ es asíntota vertical en cada gráfica:

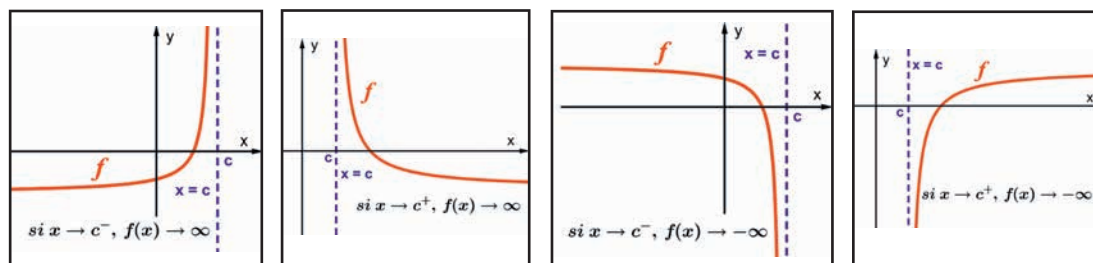


Figura 5

En una *función racional* $y = f(x)$, la recta $y = b$ es una **asíntota horizontal** de la gráfica de f si cuando x tiende a infinito (o a menos infinito), y se aproxima a b :

si $x \rightarrow \infty$, entonces $y \rightarrow b$

si $x \rightarrow -\infty$, entonces $y \rightarrow b$

En la figura 6, la recta $y = b$ es asíntota horizontal en cada gráfica:

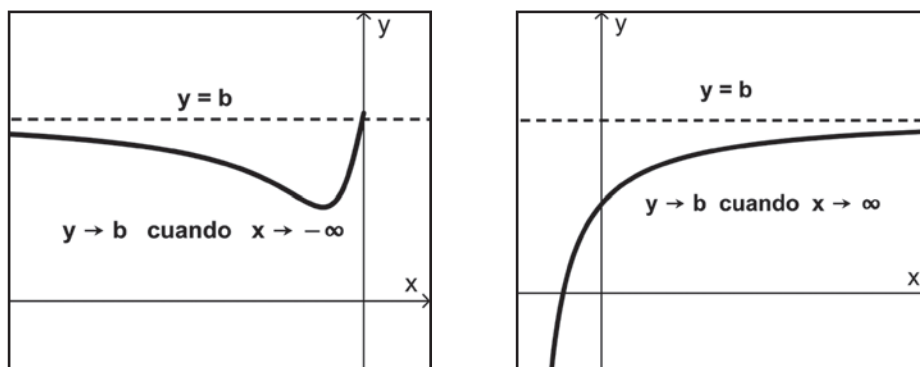


Figura 6

2.3.2 TRANSFORMACIONES DE LA FUNCIÓN $h(x) = \frac{1}{x}$

Graficaremos ahora funciones racionales que se obtienen haciendo las transformaciones vistas en la sección 1.5 a la gráfica de la función $h(x) = \frac{1}{x}$ (desplazamientos hacia arriba, abajo, derecha o izquierda, reflejos en los ejes, alargamientos o encogimientos verticales u horizontales).

Ejemplo 4

Trazar la gráfica de cada función racional a partir de la gráfica de $y = \frac{1}{x}$.

$$1) \ g(x) = \frac{1}{x+3} \quad 2) \ m(x) = \frac{3}{x-2} \quad 3) \ n(x) = \frac{2x-7}{x-4}$$

1) Sea $h(x) = \frac{1}{x}$. La función $g(x) = \frac{1}{x+3}$ la expresamos en términos de h , así:

$$g(x) = h(x+3)$$

Por lo tanto, la gráfica de g , figura 7, se puede obtener desplazando 3 unidades a la izquierda la gráfica de h . Así, la gráfica de g tiene una *asíntota vertical* en $x = -3$ y una *asíntota horizontal* en $y = 0$.

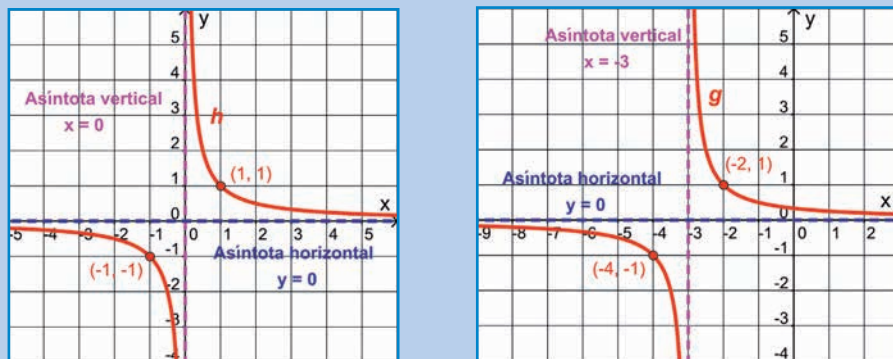


Figura 7

2) $m(x) = \frac{3}{x-2}$, expresamos m en términos de h , y tenemos:

$$m(x) = 3 h(x-2)$$

De modo que la gráfica de m , figura 8, se puede obtener desplazando 2 unidades a la derecha y alargando verticalmente un factor de 3 a la gráfica de $y = \frac{1}{x}$. Así, la gráfica de m tiene una *asíntota vertical* en $x = 2$ y una *asíntota horizontal* en $y = 0$.

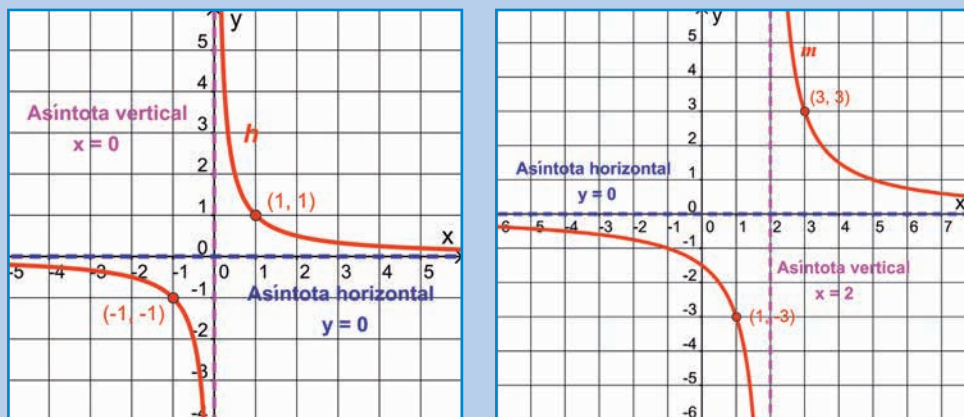


Figura 8

3) $n(x) = \frac{2x-7}{x-4}$, realizamos la división y obtenemos:

$$\begin{array}{r} 2x-7 \overline{) x-4} \\ -2x+8 \quad 2 \\ \hline 1 \end{array} \longrightarrow n(x) = 2 + \frac{1}{x-4}$$

Expresamos n en términos de h , como sigue:

$$n(x) = 2 + h(x-4)$$

De modo que la gráfica de n , figura 9, se puede obtener desplazando 4 unidades a la derecha y subiendo 2 unidades la gráfica de $y = \frac{1}{x}$. Así, la gráfica de n tiene una *asíntota vertical* en $x = 4$ y una *asíntota horizontal* en $y = 2$.

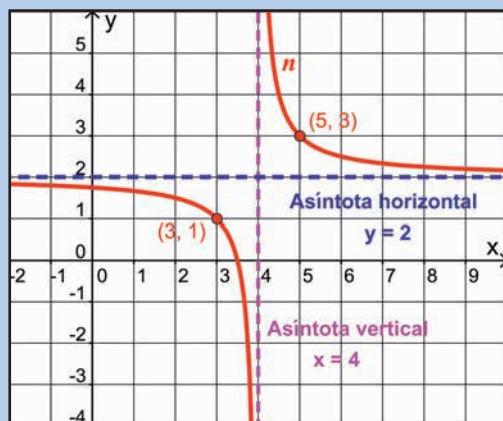


Figura 9



Trazar la gráfica de las siguientes funciones racionales utilizando transformaciones:

$$1) \quad t(x) = -\frac{2}{x+4}$$

$$2) \quad p(x) = \frac{2x+1}{x}$$

$$3) \quad m(x) = \frac{-3x+8}{x-3}$$

El proceso utilizado en los ejemplos anteriores se aplica si se trata de funciones racionales simples, es decir, de la forma $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, en las cuales utilizamos la división presentada en el ejercicio 3 del ejemplo anterior y expresamos f en términos de h : $h(x) = \frac{1}{x}$.

Para trazar la gráfica de otras funciones racionales se estudia el comportamiento de estas cerca de sus asíntotas verticales y horizontales.

Ejemplo 5

Trazar la gráfica de la función $h(x) = \frac{x-6}{(x+2)(x-3)}$

- *Dominio de h*: el denominador es cero si $x = -2$ o $x = 3$.

$$\text{dom } h = \mathbb{R} - \{-2, 3\}$$

El dominio es el conjunto de los reales excepto -2 y 3 .

- *Intercepto con el eje y*, $h(0) = \frac{-6}{-6} = 1 \rightarrow (0, 1)$.
- *Intercepto con el eje x*, igualamos a cero la función:

$$\begin{aligned} \frac{x-6}{(x+2)(x-3)} &= 0 \\ x-6 &= 0 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

x-intercepto: $(6, 0)$

- *Asíntotas verticales*: las rectas $x = -2$ y $x = 3$ son las asíntotas verticales de la gráfica de m . La función no está definida en -2 y 3 .

x	-3	-2.1	-2.001	$\rightarrow$	-2
y	-1.5	-15.88	-1599.88	$\rightarrow$	$-\infty$

Tabla 6

En la tabla 6 podemos observar que, $y \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow -2^-$, por tanto la recta $x = -2$ es una asíntota vertical. Se puede comprobar usando una tabla de valores y acercándose a -2 por la derecha, que $y \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow -2^+$; se concluye que la recta $x = -2$ es una asíntota vertical.

x	3	$\leftarrow$	3.001	3.1	4
y	$-\infty$	$\leftarrow$	-599.68	-5.68	-0.333

Tabla 7

De la tabla 7 concluimos igualmente que, como $y \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow 3^+$, la recta $x = 3$ es la otra asíntota vertical.

- *Asíntota horizontal:* podemos utilizar el siguiente método para encontrar el valor correspondiente: dividir cada término por la potencia mayor de x que tenga la función. En este caso dividiremos por x^2 :

$$h(x) = y = \frac{x - 6}{(x + 2)(x - 3)}$$

$$y = \frac{x - 6}{x^2 - x - 6} = \frac{\frac{x}{x^2} - \frac{6}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2} - \frac{6}{x^2}}$$

Simplificamos,

$$y = \frac{\frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}$$

Las expresiones $\frac{1}{x}$ y $\frac{6}{x^2}$ tienden a cero cuando $x \rightarrow \pm\infty$.² Por lo tanto se tiene:

$$y \rightarrow \frac{0 - 0}{1 - 0 - 0} = \frac{0}{1} = 0$$

Cuando x tiende a infinito o menos infinito, y tiende a cero, así la asíntota horizontal es $y = 0$.

² $\frac{1}{x}$ tiende a cero cuando $x \rightarrow \infty$

x	1	1000	100 000	$\rightarrow \infty$
$\frac{1}{x}$	1	0.001	0.000001	$\rightarrow 0$

$\frac{6}{x^2}$ tiende a cero cuando $x \rightarrow \infty$

x	1	1000	100 000	$\rightarrow \infty$
$\frac{6}{x^2}$	6	0.000006	0.0000000006	$\rightarrow 0$

- Con una tabla de signos podemos indagar sobre el comportamiento de la gráfica de la función $h(x) = \frac{x-6}{(x+2)(x-3)}$:

- Consideramos los intervalos tomando los puntos de corte con el eje x y las asíntotas verticales.

Puntos de corte con el eje x : $x = 6$.

Asíntotas verticales: $x = -2, x = 3$.

Intervalos a considerar: $(-\infty, -2), (-2, 3), (3, 6)$ y $(6, \infty)$.

- Remplazamos en cada factor de la función un número real que esté en dicho intervalo y escribimos únicamente el signo del resultado (nótese que independientemente del número que se elija en el intervalo, el signo es el mismo):

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 3)$	$(3, 6)$	$(6, \infty)$
$x - 6$	—	—	—	+
$x + 2$	—	+	+	+
$x - 3$	—	—	+	+
$h(x)$	—	+	—	+
Ubicación de la gráfica respecto al eje x	Abajo	Arriba	Abajo	Arriba

- El último renglón de la tabla se interpreta así: la función h es negativa (su gráfica está por debajo del eje x) en los intervalos $(-\infty, -2)$ y $(3, 6)$; la función h es positiva (su gráfica está por encima del eje x) en los intervalos $(-2, 3)$ y $(6, \infty)$.

- Gráfica de $h(x) = \frac{x-6}{(x+2)(x-3)}$

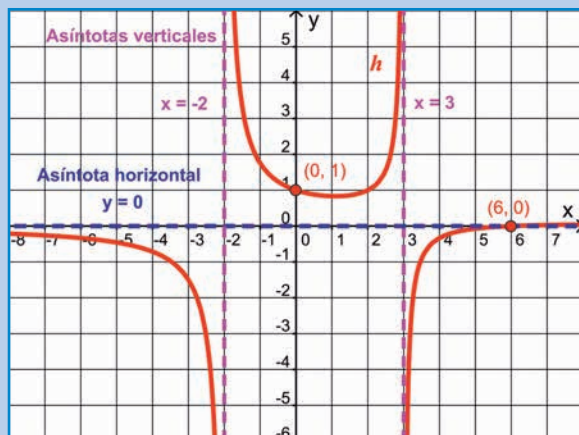


Figura 10

Ejemplo 6

Trazar la gráfica de la función $m(x) = \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 4}$

- Factorizamos el numerador y el denominador:

$$m(x) = \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 4} = \frac{(x - 4)(x + 3)}{(x - 2)(x + 2)}$$

- Dominio de m :* el denominador es cero si $x = 2$ o $x = -2$.

$$\text{dom } m = \mathbb{R} - \{2, -2\}$$

- Intercepto con el eje y ,* $m(0) = \frac{-12}{-4} = 3 \rightarrow (0, 3)$.

- Intercepto con el eje x ,* igualamos a cero la función:

$$\frac{(x - 4)(x + 3)}{(x - 2)(x + 2)} = 0$$

$$(x - 4)(x + 3) = 0$$

$$x = 4 \text{ o } x = -3$$

x -interceptos: $(4, 0)$ y $(-3, 0)$.

- *Asíntotas verticales*: las rectas $x = 2$ y $x = -2$ son las asíntotas verticales de la gráfica de m . La función no está definida en 2 y -2 .

x	1	1.9	1.999	$\rightarrow$	2
y	4	26.39	2501.38	$\rightarrow$	∞

Tabla 8

En la tabla 8 podemos observar que, $y \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow 2^-$, por tanto la recta $x = 2$ es una asíntota vertical.

x	-2	$\leftarrow$	-1.999	-1.9	-1
y	∞	$\leftarrow$	1501.63	16.64	3.333

Tabla 9

De la tabla 9 concluimos que, como $y \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow -2^+$, la recta $x = -2$ es una asíntota vertical.

- *Asíntota horizontal*: dividimos cada término por x^2 :

$$m(x) = y = \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 4} = \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2} - \frac{12}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}}$$

Simplificamos,

$$y = \frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{12}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}}$$

Las expresiones $\frac{1}{x}$, $\frac{12}{x^2}$ y $\frac{4}{x^2}$ tienden a cero cuando $x \rightarrow \pm\infty$. Por lo tanto se tiene:

$$y \rightarrow \frac{1 - 0 - 0}{1 - 0} = \frac{1}{1} = 1$$

La asíntota horizontal es $y = 1$ (corresponde a la división de los coeficientes principales de los polinomios del numerador y denominador).

- Intersección de la gráfica con la asíntota horizontal.
Hallamos estos puntos igualando las ecuaciones de la función y de la asíntota horizontal:

$$y = \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 4} \quad y = 1$$

$$\frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 4} = 1$$

$$x^2 - x - 12 = x^2 - 4$$

$$-x - 8 = 0$$

$$x = -8$$

La gráfica de la función y de la asíntota se intercepta en el punto $(-8, 1)$.

- Gráfica de $m(x) = \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 4}$

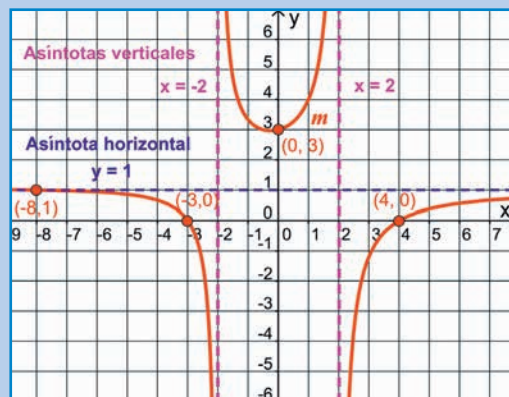


Figura 11

Ejemplo 7

Trazar la gráfica de la función $p(x) = \frac{3x^2 - 2x - 8}{2x^2 + 1}$

- *Factorizamos el numerador y el denominador, si es posible:*

$$p(x) = \frac{3x^2 - 2x - 8}{2x^2 + 1} = \frac{(x - 2)(3x + 4)}{2x^2 + 1}$$

- *Dominio de p:* conjunto de los números reales (el denominador nunca es cero):

$$2x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -\frac{1}{2}$$

$$x = \sqrt{-\frac{1}{2}} \text{ no es un número real}$$

La ecuación no tiene solución en los reales, por lo tanto no hay números reales que hagan cero el denominador.

- *Intercepto con el eje y,* $p(0) = \frac{-8}{1} = -8 \rightarrow (0, -8)$.
- *Interceptos con el eje x:* $(2, 0)$ y $(-\frac{4}{3}, 0)$.
- *Asíntotas verticales:* la gráfica de la función no tiene asíntotas verticales, ya que la función está definida para todos los números reales.
- *Asíntota horizontal:* dividimos cada término por la mayor potencia de x , es decir, por x^2 :

$$\frac{3x^2 - 2x - 8}{2x^2 + 1} = \frac{\frac{3x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} - \frac{8}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}}$$

Simplificamos,

$$= \frac{3 - \frac{2}{x} - \frac{8}{x^2}}{2 - \frac{1}{x^2}}$$

Las expresiones $\frac{2}{x}$, $\frac{8}{x^2}$ y $\frac{1}{x^2}$ tienden a cero cuando $x \rightarrow \pm\infty$. Por lo tanto se tiene:

$$y \rightarrow \frac{3 - 0 - 0}{2 - 0} = \frac{3}{2}$$

La *asíntota horizontal* es $y = \frac{3}{2}$

- Podemos hallar punto de intersección entre la función y la asíntota horizontal. Igualamos la función al valor de la asíntota y resolvemos la ecuación:

$$p(x) = \frac{3x^2 - 2x - 8}{2x^2 + 1} \quad y \quad y = \frac{3}{2}$$

$$\frac{3x^2 - 2x - 8}{2x^2 + 1} = \frac{3}{2}$$

$$6x^2 - 4x - 16 = 6x^2 + 3$$

$$-4x = 19$$

$$x = -\frac{19}{4}$$

El punto de intersección es $\left(-\frac{19}{4}, \frac{3}{2}\right)$

- Gráfica de $p(x) = \frac{3x^2 - 2x - 8}{2x^2 + 1}$

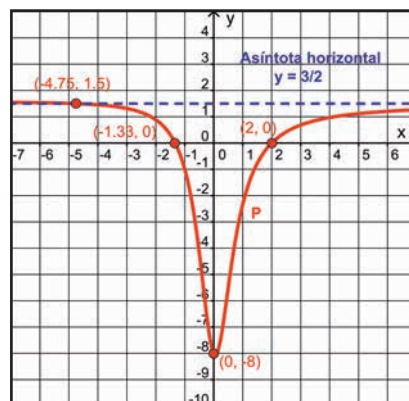


Figura 12



Trace la gráfica de las siguientes funciones racionales:

$$1) g(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$2) m(x) = \frac{4x^2 - x - 3}{2x^2 - 3}$$

$$3) t(x) = \frac{-2x}{x^2 + 1}$$

$$4) n(x) = \frac{-x^2 + 5x - 6}{x^2 - 3x + 2}$$

2.3.3 ASÍNTOTAS OBLICUAS

Las funciones racionales $g(x) = \frac{1}{x+3}$ y $m(x) = -\frac{3}{x-2}$ del ejemplo 3 y $h(x) = \frac{x-6}{(x+2)(x-3)}$ del ejemplo 4, son funciones en las cuales el numerador es un grado menor que el denominador; como se puede apreciar en las gráficas correspondientes, la recta $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal de esas gráficas.

En las funciones $n(x) = \frac{2x-7}{x-4}$ del ejemplo 3, $m(x) = \frac{x^2-x-12}{x^2-4}$ del ejemplo 5 y $p(x) = \frac{3x^2-2x-8}{2x^2+1}$ del ejemplo 6, el grado del numerador y el del denominador es el mismo.

Podemos verificar que las gráficas de dichas funciones tienen como asíntota horizontal la recta $y = \frac{a}{b}$, donde a y b son los coeficientes principales del numerador y del denominador.

Para las funciones racionales en la cuales el grado del numerador es mayor que el del denominador, se tienen otro tipo de asíntotas; vamos a considerar primero aquellas en las cuales es mayor en una unidad.

Ejemplo 8

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x - 2}; \text{ dom } f = \mathbb{R} - \{2\}$$

El grado del numerador es 2; el del denominador es 1.

- Gráfica:

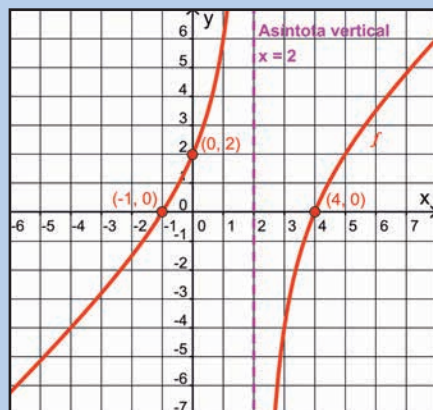


Figura 13

- En la figura 13 observamos que la gráfica de f tiene asíntota vertical en $x = 2$; sin embargo, cuando x toma valores muy grandes o muy pequeños, la gráfica no tiende a una recta horizontal. Observemos el comportamiento de la función si $x \rightarrow \infty$ o $x \rightarrow -\infty$, en las gráficas de la figura 14:

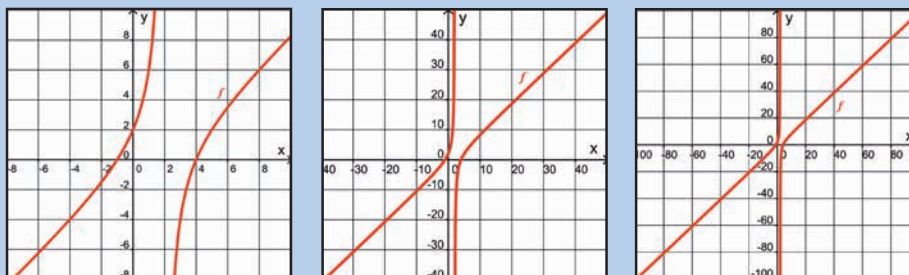


Figura 14

Vemos que si $x \rightarrow \infty$ o $x \rightarrow -\infty$, la gráfica se aproxima a una recta inclinada. Esa recta es una **asíntota oblicua** de la gráfica de la función. La ecuación de la asíntota oblicua la determinamos usando el cociente de la división del numerador entre el denominador:

$$\begin{array}{r} x^2 - 3x - 4 \overline{) x - 2} \\ -x^2 - 2x \\ \hline -x - 4 \\ x - 2 \\ - 6 \end{array} \quad \begin{array}{l} x - 1 \longrightarrow y = x - 1 \\ \downarrow \\ \text{Asíntota oblicua} \end{array}$$

- *Intercepto con el eje y*, $f(0) = \frac{-4}{-2} = 2 \rightarrow (0, 2)$.
- *Interceptos con el eje x*: $(-1, 0)$ y $(4, 0)$.
- Gráfica de f , con las asíntotas vertical y oblicua:

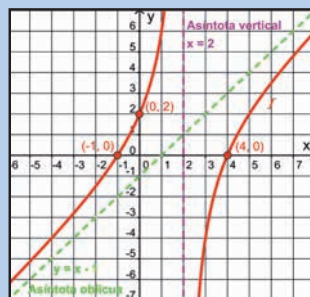


Figura 15



Trace la gráfica de las siguientes funciones racionales:

$$1) g(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

$$2) m(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 2}$$

$$3) t(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$$

Por último, las funciones racionales en las cuales el grado del numerador es mayor en dos unidades o más que el del denominador, no presentan asíntotas horizontales ni oblicuas. Con la función $A(x) = \frac{2x^3 + 3000}{x}$ que se obtuvo de la actividad inicial de esta sección ilustraremos esta situación; observemos su gráfica:

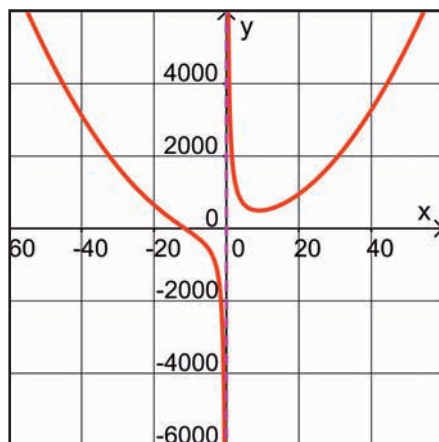


Figura 16

Retomemos la pregunta del problema de la actividad inicial de esta sección: *¿cuáles son las dimensiones de la caja cuya capacidad sea de 750 ml y que requiera la menor cantidad de material?*

El contexto del problema impone la condición de tomar el lado de la base mayor que cero; esta restricción la expresamos así:

$$A(x) = \frac{2x^3 + 3000}{x}, x \geq 0 \quad (2)$$

La altura y de la caja, está expresada en términos de la ecuación: $y = \frac{750}{x^2}$ (1)

La gráfica ahora es:

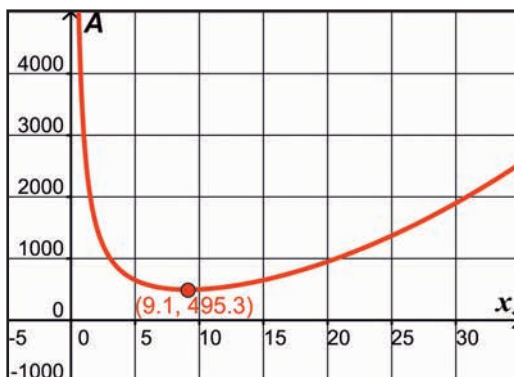


Figura 17

Esta gráfica nos dice, de manera aproximada, que el menor valor del área es 495.3, cuando el lado de la caja es 9.1.³ Hallemos el valor de y (ecuación (1)) y el valor correspondiente del área A en la ecuación (2).

- ✓ Si reemplazamos $x \approx 9.1$ en la ecuación (1) $y = \frac{750}{x^2}$, obtenemos la altura de la caja $y \approx 9.1$ cm.
- ✓ Las dimensiones de la caja, con las condiciones requeridas, deben ser iguales, $x = y \approx 9.1$ cm.
- ✓ El área superficial mínima es $A(9.1) \approx \frac{2(9.1)^3 + 3000}{9.1} \approx 495.3$ cm², como lo muestra la gráfica.

Resumimos en el cuadro siguiente el procedimiento para establecer si una función racional tiene asíntota vertical y asíntota horizontal, oblicua o ninguna de las dos; de igual manera, si tiene, cómo hallarla.

3 En los cursos de cálculo se puede resolver el problema con herramientas analíticas.

Sea R una función racional definida así:

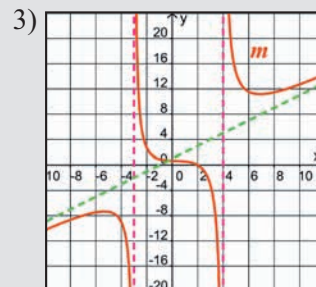
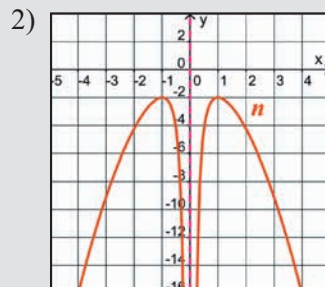
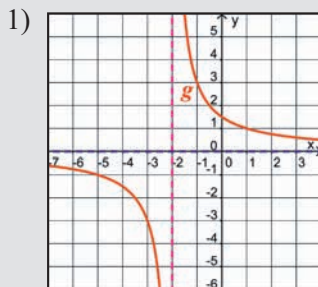
$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

n grado del numerador y m grado del denominador.

- 1) Las **asíntotas verticales** se encuentran una vez se haya factorizado y simplificado la función, calculando dónde el denominador se hace cero.
- 2) Si el grado del numerador es menor al grado del denominador, $n < m$, la recta $y = 0$ es **asíntota horizontal** de la gráfica de R .
- 3) Si el grado del numerador es igual al grado del denominador, $n = m$, la recta $y = \frac{a_n}{b_m}$ es **asíntota horizontal** de la gráfica de R .
- 4) Si el grado del numerador es uno más que el grado del denominador, $n = m + 1$, la gráfica de R tiene una **asíntota oblicua** de la forma $y = mx + b$.
- 5) Si el grado del numerador es dos o más que el grado del denominador, la gráfica de R no tiene ni asíntota horizontal ni oblicua.



A partir de la gráfica de cada función, indique las ecuaciones de las asíntotas (vertical, horizontal u oblicua).



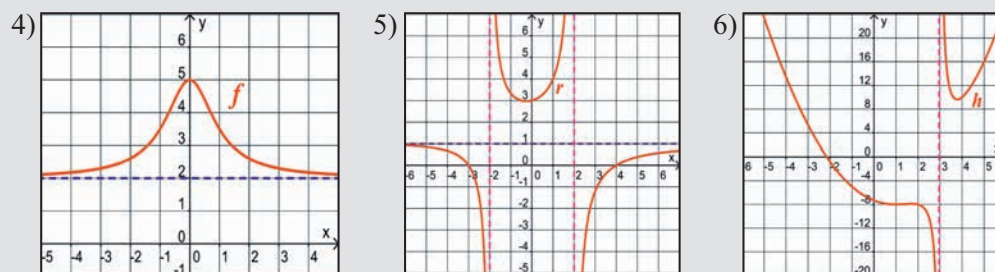


Figura 18

En el siguiente cuadro mostramos el proceso a seguir para trazar la gráfica de una función racional:

Sea $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones polinomiales, $Q(x) \neq 0$:

- 1) Factorizamos el numerador y el denominador, y luego simplificamos.
- 2) Encontramos los ceros del denominador; con estos determinamos las ecuaciones de las asíntotas verticales y trazamos las rectas.
- 3) Hallamos el y -intercepto, calculando $R(0)$. Ubicamos el punto.
- 4) Hallamos los x -interceptos, esto lo hacemos igualando a cero el numerador y resolviendo la ecuación. Ubicamos los puntos.
- 5) Encontramos la asíntota horizontal u oblicua, si la hay, utilizando el resumen del recuadro anterior. Trazamos dicha recta.
- 6) Encontramos otros valores de la función para determinar la forma general de la gráfica; luego la trazamos.

EJERCICIOS

I. Halle el dominio de las siguientes funciones racionales:

$$1) \quad h(r) = \frac{-3r^2 + 4r - 7}{3 - 4r}$$

$$2) \quad m(t) = \frac{t^2 - 8t + 15}{t^2 - 4t + 4}$$

$$3) \quad g(y) = \frac{y - 2}{y^2 - 25}$$

$$4) \quad p(x) = \frac{-5x + 10}{x^2 + 2x + 1}$$

$$5) \quad n(x) = \frac{x}{x^3 - 8}$$

$$6) \quad f(x) = 3 \frac{x}{x - 2}$$

II. Trace la gráfica de las siguientes funciones, usando transformaciones a la función $y = \frac{1}{x}$; determine interceptos con los ejes y asíntotas.

$$1) \quad y = -\frac{1}{x + 5}$$

$$2) \quad y = \frac{2}{x - 3}$$

$$3) \quad y = \frac{x + 1}{x - 1}$$

$$4) \quad y = -\frac{3x + 13}{x + 4}$$

III. A partir de la gráfica de la función $g(x) = \frac{1}{x^2}$, trace la gráficas de las siguientes funciones utilizando transformaciones.

$$1) \quad y = \frac{1}{(x - 2)^3} + 3$$

$$2) \quad y = \frac{-1}{(x + 3)^2}$$

$$3) \quad y = 2 \frac{1}{x^2} - 4$$

$$4) \quad y = -\frac{1}{(x - 1)^2} - 2$$

IV. Dadas las funciones racionales:

a) $y = \frac{3x - 12}{x^2 - x - 6}$

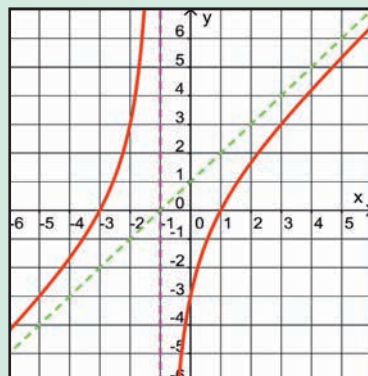
b) $y = \frac{2x + 4}{x - 2}$

c) $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 1}$

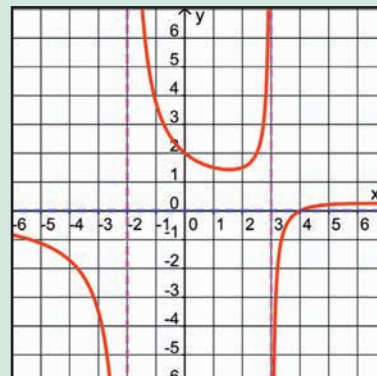
d) $y = \frac{3x^2 + 4x - 8}{x^2 - 4}$

forme la pareja con la gráfica correspondiente entre las que aparecen a continuación:

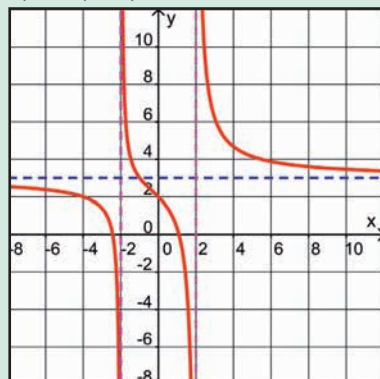
1) ()



2) ()



3) ()



4) ()

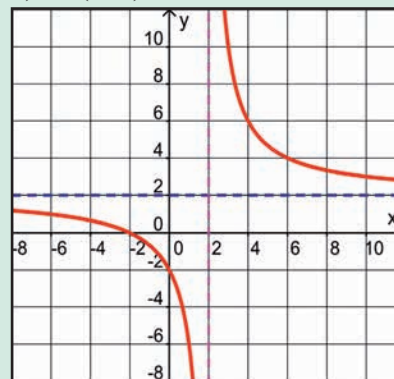


Figura 19

V. Trace la gráfica de las siguientes funciones:

$$1) \quad f(x) = \frac{x-4}{x+2}$$

$$2) \quad g(x) = \frac{4x^2-5}{2x^2-3x+1}$$

$$3) \quad m(x) = \frac{2x+3}{3x^2+7x-6}$$

$$4) \quad h(x) = \frac{3x-12}{x^2+x-6}$$

$$5) \quad p(x) = \frac{x^2-2x-3}{1-x}$$

$$6) \quad n(x) = \frac{x^3+7x^2-18x}{x^2-9}$$

$$7) \quad t(x) = \frac{-x^2+5x-6}{x^2-3x+2}$$

$$8) \quad n(x) = \frac{x^2+7x+10}{x+2}$$

VI. Escriba una ecuación de una función racional cuya gráfica cumpla las condiciones dadas en cada uno de los siguientes ítems:

- 1) *x-interceptos:* $x = -2$ y $x = 3$
Asíntota vertical: $x = -4$
Asíntota horizontal: $y = -3$

- 2) *y-intercepto:* $(0, 0)$
Asíntota vertical: $x = 3$
Asíntota oblicua: $y = x - 1$

VII. Problema:

- 1) Se necesita elaborar latas cilíndricas rectas, con capacidad para 500 ml. El material para elaborar la tapa y la base es un aluminio fuerte cuyo costo es de \$200 el cm^2 y para elaborar el resto de la lata, el costo es de \$100 el cm^2 . ¿Cuál debe ser la longitud del radio de la lata de modo que el costo sea el mínimo?

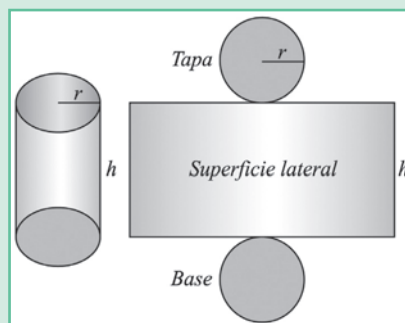


Figura 20

- 2) El costo total C , para elaborar un artículo es igual a la suma del costo fijo k y del costo variable, cx que depende del número de unidades a producir. Para x artículos el costo total es $C(x) = k + cx$. El costo promedio $\overline{C}$ de producción es $\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$.

Una compañía que fabrica hornos microondas, encuentra que los costos fijos de producción son de \$20 000 por mes, mientras que el costo de cada horno es de \$100. La fábrica puede producir un máximo de 3 000 hornos al mes.

- Use la función $\overline{C}$ para encontrar el costo promedio si son producidos 800 hornos.
 - Si el costo promedio en un mes fue de \$150, ¿cuántos hornos se elaboraron?
 - ¿Qué significa la asíntota horizontal en la función costo promedio $\overline{C}$?
- 3) La ley de Coulomb establece que la fuerza F de atracción o repulsión entre dos cargas, q_1 y q_2 , está dada por $F = \frac{kq_1q_2}{r^2}$, donde k es una constante y r es la distancia entre las dos cargas. Suponga que se grafica F como una función de r para dos cargas positivas:
- ¿Qué asíntotas tiene la gráfica?
 - Interprete el significado de las asíntotas en términos del problema.

EJERCICIOS FINALES DE LA UNIDAD 2

1. De las siguientes funciones seleccione las que sean cuadráticas y escríbalas en la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$:

a. $f(x) = (x^2 + 4)(3x - 1)$
b. $f(r) = -2(r - 4)^2 + 6$
c. $f(t) = (t + 3)(2 - t) - 2t(t - 4)(5 - t)$
d. $f(n) = \frac{\sqrt{2}n^2 + \sqrt{3}}{2} - \frac{n - \sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{2}n^2}{3}$

2. Indique el grado de cada función:

a. $f(x) = x^2(x + 2)(x - 3)$
b. $g(x) = (x^2 + 1)(x^3 - 6)(x - 7)^2$
c. $h(x) = (x + 2)(x^2 - 3x)(x^2 - 5)^2$
d. $m(x) = x^3(x + x^4)(x^3 - 1)$
e. $n(x^3)$, donde $n(x) = x^3 - 5x^2 - 7x + 1$

3. Dé el coeficiente principal y el término constante de cada función:

a. $f(x) = -3x^4 + 5x^2 - 11x + 7$
b. $g(x) = (3x - 2)^2 - (2x + 3)^2$
c. $h(x) = (2x - 2)^5 - (x + 3)^5$
d. $m(x) = (3 + 2x)(x + 2)(x + 4)(3x - 2)(1 - 2x)$
e. $n(x) = (x - b)^4 \left(x + \frac{1}{b}\right)^4, b \neq 0$

4. Escriba la función cuadrática que corresponde a cada gráfica.

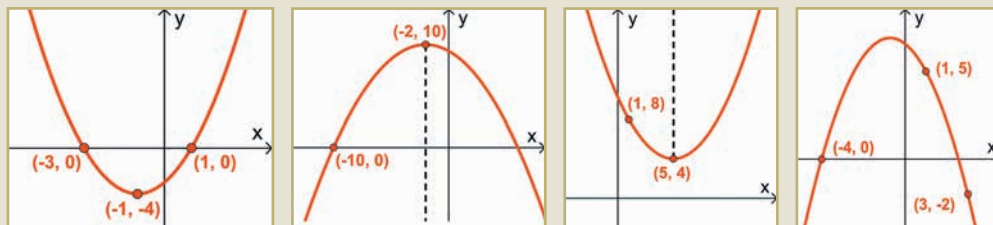


Figura 1

5. Encuentre gráfica y algebraicamente, los valores de x para los cuales $f(x) = g(x)$:

$$f(x) = x^2 - 5$$

$$g(x) = -2x^2 + 7$$

$$f(x) = 2x^2 + 3x - 5$$

$$g(x) = 1 + 2x^2$$

$$f(x) = 3x^2 - 8x + 5$$

$$g(x) = -2x^2 + 9$$

6. Sea $p(x)$ un polinomio en x con coeficiente principal a y de grado n , no cero. Para cada polinomio dado, encuentre el grado y el coeficiente principal:

a. $3p(x)$

b. $p(2x)$

c. $x^2 p(x)$

d. $p(x) + 4$

7. Sea $p(x)$ un polinomio de grado m y coeficiente principal a y $q(x)$ uno de grado n y coeficiente principal b ; suponga que $m > n$.

a. ¿Cuál es el grado y el coeficiente principal de $p(x)q(x)$?

b. ¿Cuál es el grado y el coeficiente principal de $p(x) + q(x)$?

8. Encuentre una función cúbica que cumpla las siguientes propiedades:

a. Los ceros son: -5 , -1 y 4 .

b. De izquierda a derecha la gráfica decrece, crece y luego decrece.

c. La gráfica cruza el eje y en 2 .

9. Encuentre posibles polinomios que correspondan a cada una de las gráficas que se muestran:

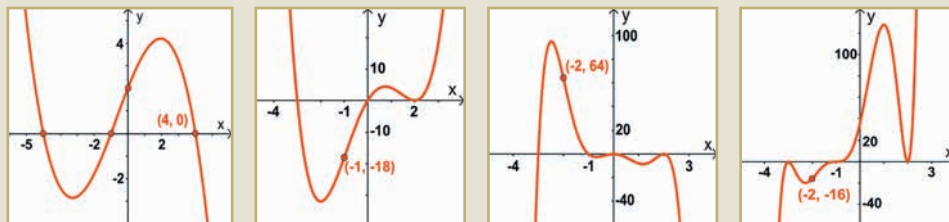


Figura 2

10. Sin usar una calculadora o computador, bosqueje cada una de las siguientes funciones polinomiales:

- $f(x) = x^3(x + 3)^2(x - 4)$
- $g(x) = -(x + 2)^3(x - 1)^2(x - 3)^2$
- $h(x) = -x^2(x + 2)(x - 1)(x - 2)^2$
- $m(x) = (x + 3)(2x + 3)^2(2x - 1)^2$

11. Si alguien dice que la función $g(x) = -x^6 + x^2 + 1$ tiene al menos dos ceros, ¿cómo se puede saber que lo que esa persona dice es cierto, sin utilizar graficadoras?

Si también afirma que la función $g(x) = x^6 + x^2 + 1$ no tiene ceros, ¿cómo se puede saber que lo que dice es cierto, de nuevo, sin utilizar graficadoras?

12. Si la función cúbica $g(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene ceros en $x = -2$, $x = 1$ y $x = 3$ ¿cuáles son los valores para a , b y c ?
13. Si a es una constante, reescriba la ecuación $x^3 + ax^2 - a^2x - a^3 = 0$ de tal forma que se muestren claramente las soluciones; ¿cuáles son?

14. Establezca los intervalos en los cuales la gráfica de la función $f(x) = (x + 5)(x + 2)^2(x - 4)$ esté por encima del eje x , es decir la función sea positiva.
15. Establezca los intervalos en los cuales la gráfica de la función $f(x) = -3(x + 4)^2(x + 1)(x - 6)$ esté por debajo del eje x , es decir la función sea negativa.
16. Dé un ejemplo de una función racional que tenga las características que se indican en cada ítem:
- Cruce el eje x en 1, toque el eje x en -2 , asíntotas verticales en $x = -4$ y en $x = 5$, y una asíntota horizontal en $y = 2$.
 - Cruce el eje x en -3 , toque el eje x en 4, una asíntota vertical en $x = 1$, y una asíntota horizontal en $y = -2$.
 - Dos ceros reales, uno de multiplicidad 2, asíntotas verticales en $x = -2$ y en $x = 1$, y una asíntota oblicua en $y = 2x - 6$.
17. ¿Las funciones $f(x) = x - 1$ y $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ son la misma? Explique su respuesta.
18. Encuentre el dominio de las funciones racionales:
- $f(x) = \frac{2x - 3}{3x^2 + 10x - 8}$
 - $g(x) = \frac{x^2 - 9}{2x^2 + 3x - 10}$
 - $h(x) = \frac{1 - x^2}{x^4 - 5x^2 - 6}$
 - $h(x) = \frac{x - 7}{81 - x^4}$
19. Encuentre los ceros de las funciones racionales:
- $f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 - 12x}{3x - 2}$
 - $g(x) = \frac{x^3 + 7x^2 - 18x}{x^2 - 1}$

c. $h(x) = \frac{x^4 - 10x^2 + 9}{x^2 - 16}$

d. $m(x) = \frac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x - 5}$

20. a. Muestre que la función racional

$$p(x) = \frac{3x - 7}{2x - 6}$$

se puede escribir de la forma

$$p(x) = \frac{3}{2} + \frac{1}{x - 3}$$

b. Explique cómo hallar la asíntota horizontal de la segunda forma y encuéntrela.

21. En la figura se muestra la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{k(x - m)(x - n)}{(x - p)(x - q)}$$

Teniendo en cuenta la gráfica, encuentre los valores para k , m , n , p y q , tal que $m < n$ y $p < q$.

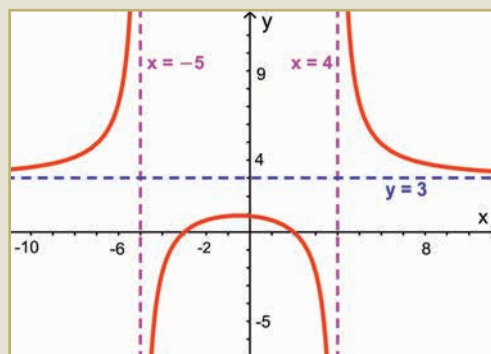


Figura 3

22. Dadas las gráficas de las funciones racionales,

a. $f(x) = \frac{-1}{x-3} + 2$

b. $g(x) = \frac{1}{(x+3)^2} - 2$

c. $h(x) = \frac{x-3}{(x-2)(x+1)}$

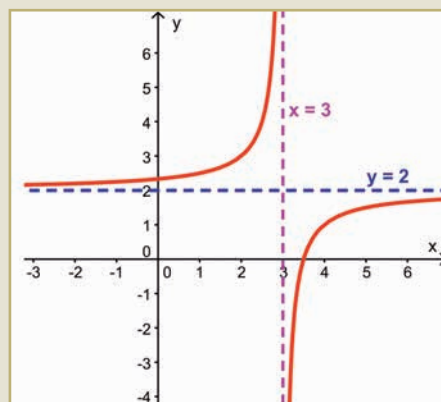
d. $m(x) = \frac{4-x^2}{1-x}$

e. $n(x) = \frac{x}{x+2} - \frac{3x}{x-1}$

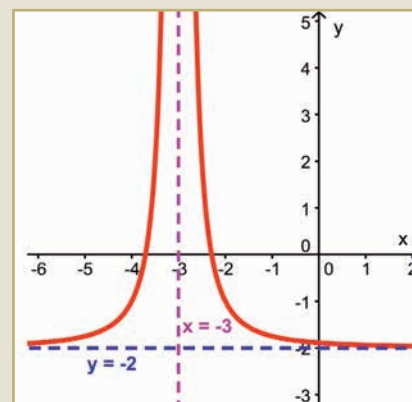
f. $p(x) = \frac{2-3x}{x+1}$

forme la pareja con la gráfica correspondiente entre las que aparecen a continuación:

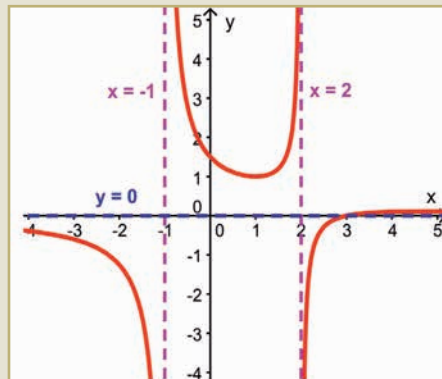
1) ()



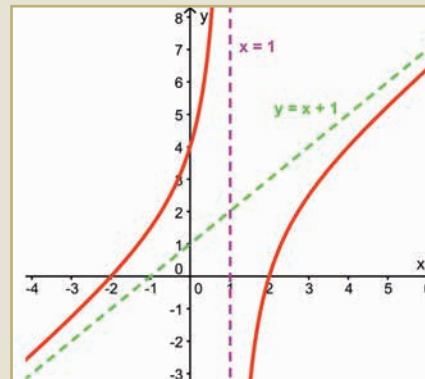
2) ()



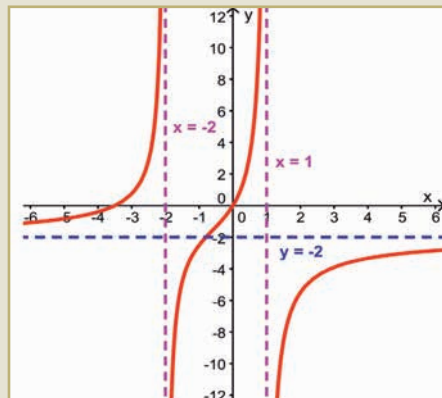
3) ()



4) ()



5) ()



6) ()

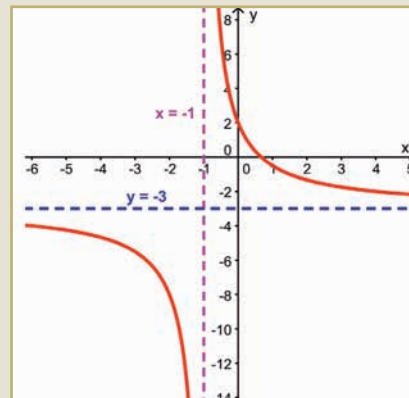


Figura 4

UNIDAD

3

3.1 FUNCIONES UNO A UNO Y SUS INVERSAS

ACTIVIDAD INICIAL

Consideremos un juego entre dos personas en el que se pide “adivinar” un número:

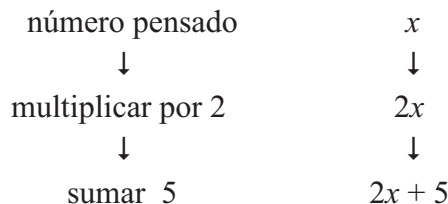
- Piensa un número.*
- Ya.*
- Multiplícalo por dos.*
- Listo.*
- Al resultado súmale cinco.*
- De acuerdo. Ya está.*
- ¿Qué resultado obtuviste?*
- 23.*
- El número que pensaste fue el...*



¿Cuál fue el número pensado en el juego anterior?

Realizando las operaciones inversas, en el orden contrario al indicado en las instrucciones, podemos encontrar el número: a 23 primero le restamos 5 y obtenemos 18; luego dividimos 18 por 2 y el resultado es 9. El número pensado fue 9.

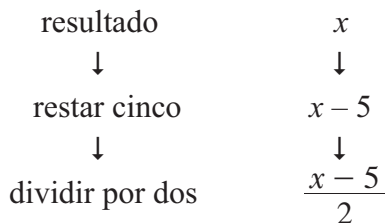
El proceso a seguir en las instrucciones se muestra en el siguiente esquema:



El proceso anterior lo representamos con una función:

$$f(x) = 2x + 5$$

Para recuperar el número pensado nos regresamos realizando las operaciones inversas:



Este nuevo proceso lo representaremos con otra función, la cual llamaremos la *función inversa* de f , denotada f^{-1} :

$$f^{-1}(x) = \frac{x - 5}{2} = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$$

Pasemos ahora a un segundo juego:

–Piensa un número.

–Ya.

–Elévalo al cuadrado.

–Hecho.

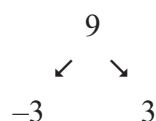
—¿Cuál es el resultado?

—9.

—El número pensado fue el 3.

—¡No! Era -3.

En este caso, tanto 3 como -3, al elevarlos al cuadrado, dan 9. Cuando nos devolvemos tenemos:



lo cual nos indica que, en este caso, el proceso inverso **no** corresponde a una función entre números reales.

Representemos la instrucción de elevar al cuadrado con la función $g(x) = x^2$. El hecho de que a valores distintos como -3 y 3, les corresponda el mismo valor, el 9, hace que la función g no tenga inversa. En la gráfica de la figura 1 apreciamos que si por el número 9, en el eje y , trazamos una recta horizontal, esta corta a la gráfica en dos puntos:

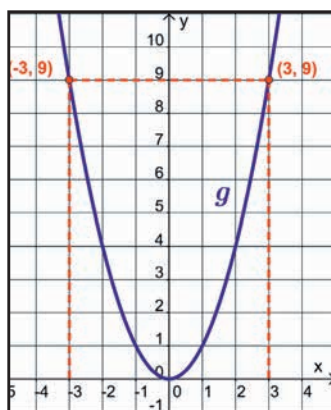


Figura 1

En general, para que una función tenga inversa no puede suceder que a valores diferentes del dominio les corresponda la misma imagen, o en otras palabras, a valores diferentes del dominio tiene que corresponderles diferentes imágenes. A funciones con esa propiedad les daremos un nombre especial:

*Una función es **uno a uno** si a cualquier par de valores diferentes en el dominio les corresponde diferentes valores en el rango.*

Consecuencia de la definición anterior es la siguiente afirmación:

Si una función f es uno a uno, tal que el codominio de f es igual al rango de f , entonces f tiene inversa.

Hemos visto que la función $g(x) = x^2$ no tiene inversa ya que hay valores diferentes de x , en los cuales la función coincide (por ejemplo en -3 y 3 , toma el mismo valor: 9). Una recta horizontal trazada por 9 intercepta a la curva en dos puntos. Para la función $f(x) = 2x + 5$, que sí tiene inversa, cualquier recta horizontal no la corta en más de un punto:

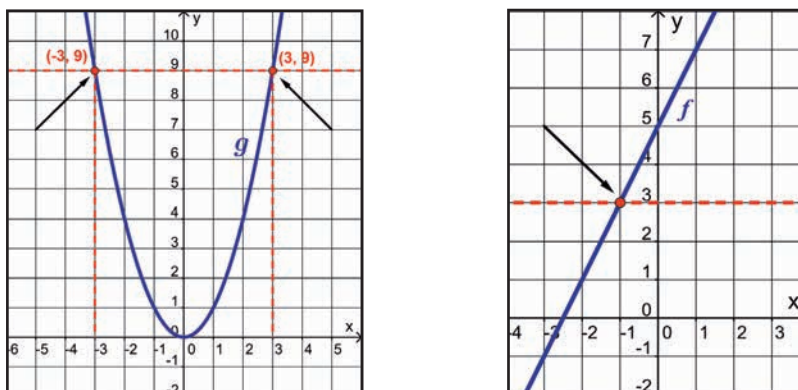


Figura 2

Las rectas horizontales consideradas en las gráficas anteriores ilustran un método gráfico que nos permite comprobar si una función es uno a uno:

PRUEBA DE LA RECTA HORIZONTAL

Si ninguna recta horizontal cruza a la gráfica de una función más de una vez, entonces la función es uno a uno.

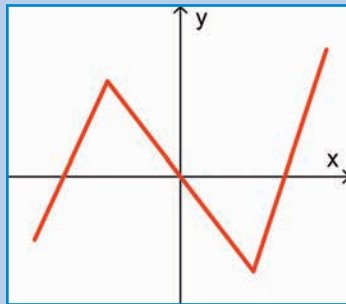


Describe la diferencia en intenciones entre los criterios “Prueba de la recta vertical” y “Prueba de la recta horizontal”.

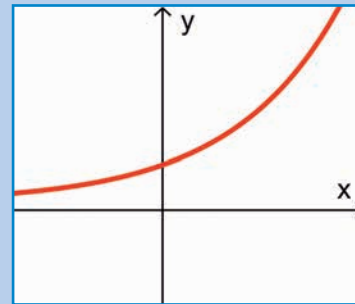
Ejemplo 1

Identifique cuáles de las gráficas de la figura 3 corresponden a funciones uno a uno:

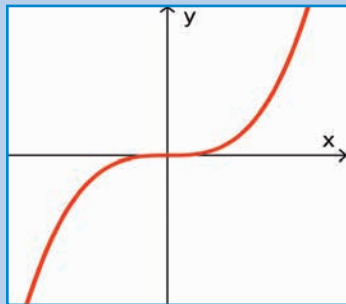
1)



2)



3)



4)

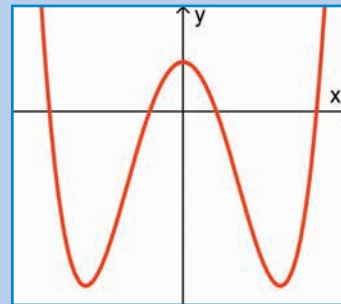
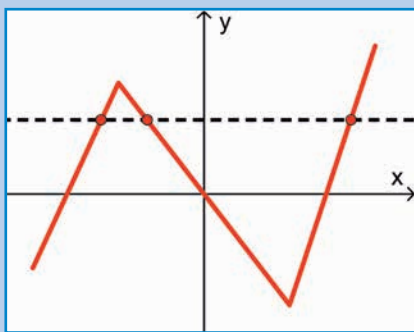


Figura 3

Solución

Utilizamos la prueba de la recta horizontal; las gráficas 1) y 4) de la figura 3, no corresponden a funciones uno a uno ya que existen rectas horizontales que interceptan a la curva en más de un punto:

1)



4)

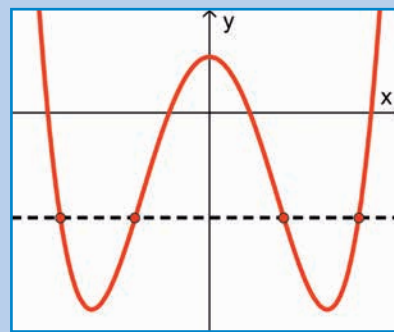
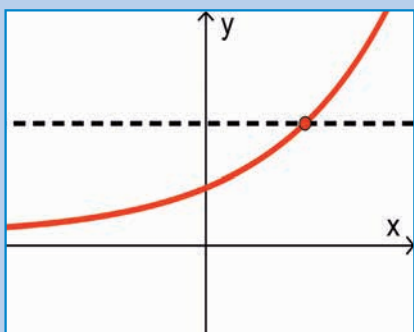


Figura 4

Las gráficas 2) y 3) de la figura 3, sí corresponden a funciones uno a uno: cualquier recta horizontal intercepta a la curva máximo en un punto:

2)



3)

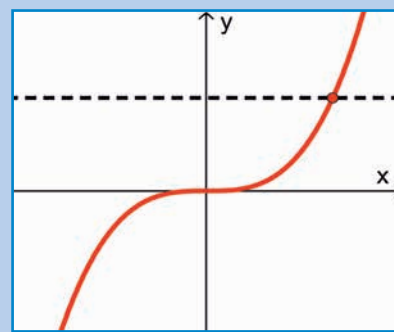


Figura 5



¿Cuáles de las gráficas de la figura 6 corresponden a funciones uno a uno?

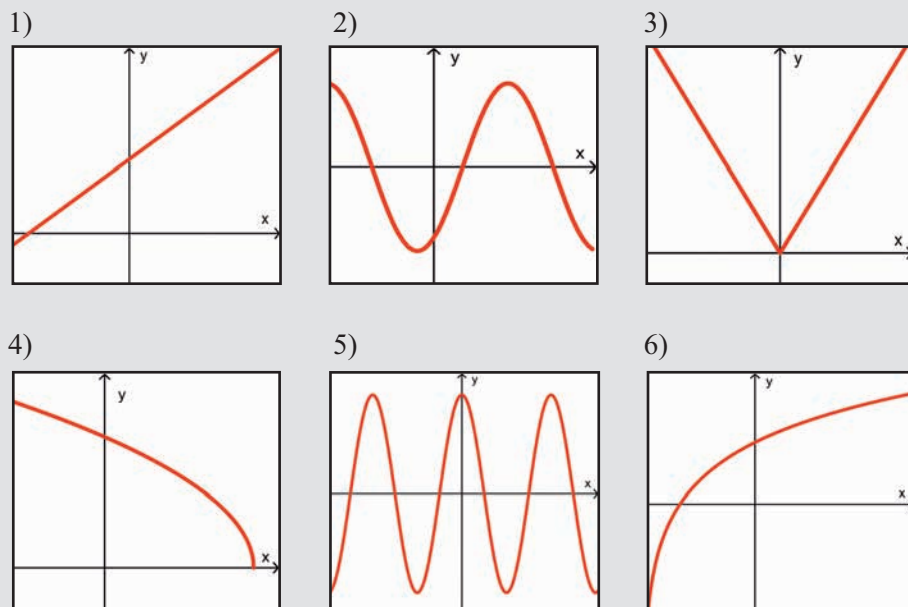


Figura 6

Pasemos ahora a examinar relaciones algebraicas entre una función y su inversa. Volvamos a la función $f(x) = 2x + 5$; hagamos la composición de esta con su inversa, $f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$, en ambos sentidos:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x))$$

$$= f^{-1}(2x + 5) = \frac{2x + 5 - 5}{2} = \frac{2x}{2} = x, x \in \text{Dom } f^{-1}$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x))$$

$$= f\left(\frac{x-5}{2}\right) = 2 \frac{x-5}{2} + 5 = x - 5 + 5 = x, x \in \text{Dom } f^{-1}$$

Observamos que la inversa *deshace* lo que hace la función y viceversa, es decir, se *cancelan* mutuamente.

Con el siguiente criterio decidiremos si una función es la inversa de otra:

Una función g es la inversa de una función f , si:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x, \text{ para cualquier } x \text{ en el dominio de } g$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x, \text{ para cualquier } x \text{ en el dominio de } f$$

Ejemplo 3

Compruebe que la inversa de la función $f(x) = \frac{3}{2}x - 5$ es $g(x) = \frac{2x + 10}{3}$.

Solución

Efectuamos la composición en los dos sentidos:

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f\left(\frac{2x + 10}{3}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{2x + 10}{3}\right) - 5 \\ &= \frac{2x + 10}{2} - 5 = \frac{2x + 10 - 10}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{2x}{2} = x$$

$$g(f(x)) = g\left(\frac{3}{2}x - 5\right) = \frac{2\left(\frac{3}{2}x - 5\right) + 10}{3}$$

$$= \frac{3x - 10 + 10}{3} = \frac{3x}{3} = x$$

Como se cancelan mutuamente, g es la inversa de f .



Verifique que la función $f(x) = -\frac{4}{3}x + 6$ es la inversa de $g(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{2}$

Examinemos ahora las gráficas de la función $f(x) = 2x + 5$ y la de su inversa $f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$:

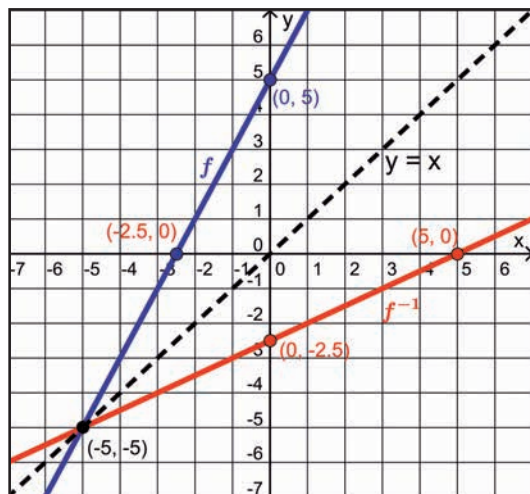


Figura 7

Para cada punto de la gráfica de f , figura 7, hay un punto en la gráfica de f^{-1} con las coordenadas invertidas. En las tablas 1 y 2 están los puntos que se muestran en la figura 7.

x	0	-1	$-5/2$	-5
f	5	3	0	-5

Tabla 1

x	5	3	0	-5
f^{-1}	0	-1	$-5/2$	-5

Tabla 2

Observemos que *las gráficas de f y f^{-1} son simétricas con respecto a la recta $y = x$.*

El siguiente procedimiento nos permite obtener la gráfica de la inversa de una función:

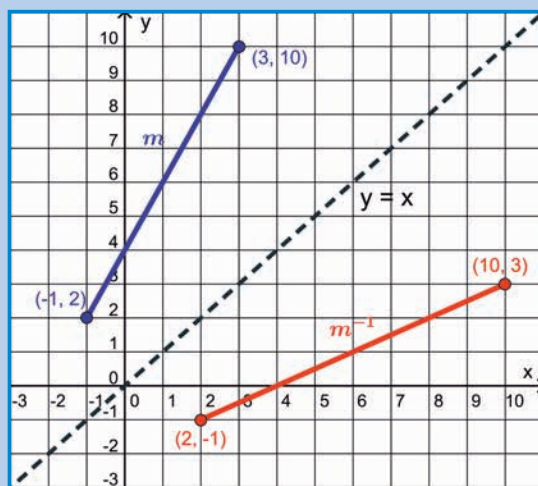
Reflejando la gráfica de una función (uno a uno) en la recta $y = x$, conseguimos la gráfica de su inversa.

Ejemplo 4

Haga la gráfica de la función $m(x) = 2x + 4$, $-1 \leq x \leq 3$; trace la gráfica de m , de m^{-1} , y determine sus dominios y rangos respectivos.

Solución

Gráficas de m y de m^{-1} :



El dominio de m es el intervalo $[-1, 3]$; el rango es $[2, 10]$.

El dominio de m^{-1} es el intervalo $[2, 10]$; el rango es $[-1, 3]$.

Los dominios y rangos de m y m^{-1} están intercambiados.

Figura 8

*Si f es una función cuya inversa es f^{-1} , entonces:
el dominio de f^{-1} es el rango de f
el rango de f^{-1} es el dominio de f*



Trace las gráficas de la función $n(x) = -2x + 3$ y de su inversa.

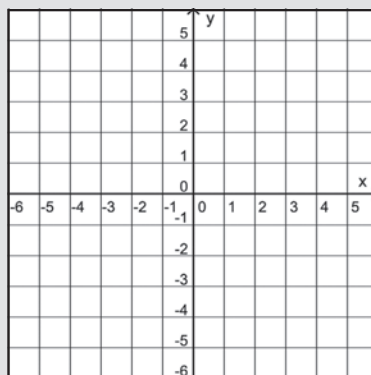


Figura 9

Ejemplo 5

Suponga que f es una función uno a uno. Si $f(-3) = -5$, halle $f^{-1}(-5)$.

Solución

Como $f(-3) = -5$, significa que $x = -3$, y $y = -5$. Por lo tanto, en la gráfica de f^{-1} se invierten las coordenadas de los puntos, y se tiene que $x = -5$ y $y = -3$, luego $f^{-1}(-5) = -3$.



Si $f^{-1}(8) = -12$, halle $f(-12)$.



Si $f(-1) = 0$, halle $f^{-1}(0)$.

Ejemplo 6

Si $h(x) = 2x - 5$, encuentre $h^{-1}(7)$.

Solución

Como 7 en la función h es el valor de y , igualamos $2x - 5$ a 7 y resolvemos la ecuación:

$$\begin{aligned} 2x - 5 &= 7 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $h^{-1}(7) = 6$.

 Si $f(x) = -\frac{3}{2}x + 4$, halle $f^{-1}(-11)$.

Regresemos al segundo juego del inicio de esta sección. Si se pidiera “adivinar” un número, no negativo, que elevado al cuadrado diera nueve, no habría ninguna ambigüedad y podríamos decir sin lugar a dudas que el número pensado fue el 3. Representemos el proceso resultante con la función: $h(x) = x^2$, $x \geq 0$. La gráfica de la función h es:

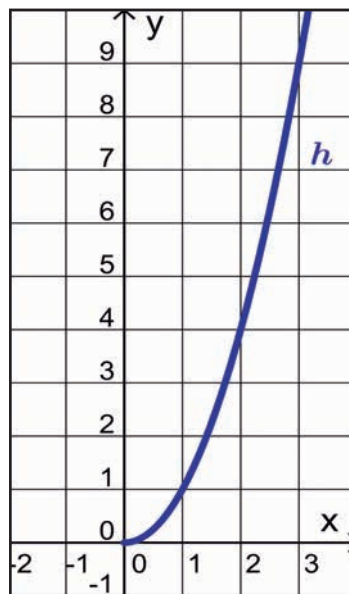


Figura10

Esta función, obtenida restringiendo el dominio de la función cuadrática, sí es uno a uno y por tanto tiene inversa. Como la operación que permite devolvemos es la raíz cuadrada, tenemos que:

$$h^{-1}(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$$

Gráficas de las funciones h y h^{-1} :

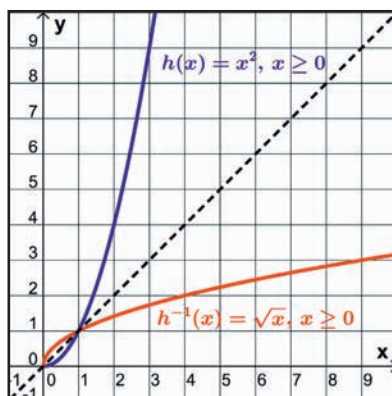


Figura 11

Consideremos ahora la función $g(t) = \sqrt{t-1}, t \geq 1$ cuya gráfica es:

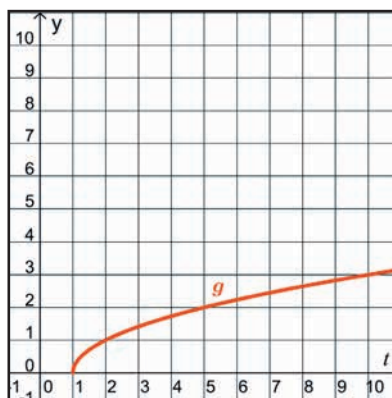


Figura 12

La función g es uno a uno. ¿Cuál es su inversa? En este caso, devolver las operaciones no es tan inmediato. El siguiente procedimiento algebraico, basado en intercambiar coordenadas, nos facilitará encontrar la inversa de una función. Lo ilustraremos con el siguiente ejemplo:

Ejemplo 7

Halle la inversa de la función $f(x) = 2x + 5$.

Solución

Paso 1: reemplazamos $f(x)$ por y : $y = 2x + 5$

Paso 2: intercambiamos la x y la y : $x = 2y + 5$

Paso 3: despejamos la y : $x - 5 = 2y$

$$\frac{x - 5}{2} = y$$

Paso 4: reemplazamos y con f^{-1} : $f^{-1}(x) = \frac{x - 5}{2}$

Ejemplo 8

La función $f(x) = x^3 + 1$ es uno a uno. Halle su inversa.

Solución

Reemplazamos $f(x)$ por y : $y = x^3 + 1$

Intercambiamos x y y : $x = y^3 + 1$

Despejamos y : $x - 1 = y^3$

$$\sqrt[3]{x - 1} = y$$

Remplazamos y por f^{-1} : $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1}$



Halle la inversa de la función $g(t) = \sqrt{t - 1}$, $t \geq 1$ cuya gráfica se encuentra en la figura 12. Trace la gráfica de $g^{-1}(t)$.

Ejemplo 9

Si $m(x) = x^2 + 6x$ con $x \geq -3$, encuentre $m^{-1}(-8)$.

Solución

Como -8 en la función m es el valor de y , igualamos $x^2 + 6x$ a -8 y resolvemos la ecuación:

$$x^2 + 6x = -8$$

$$x^2 + 6x + 8 = 0$$

cuyas soluciones son $x = -4$ y $x = -2$

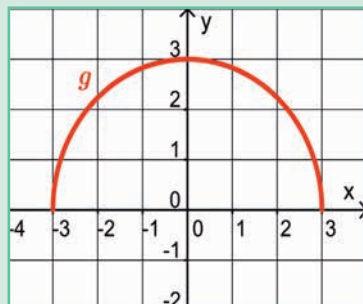
De estas dos soluciones, dada la restricción del dominio, $x \geq -3$, se toma $x = -2$

Por lo tanto, $m^{-1}(-8) = -2$

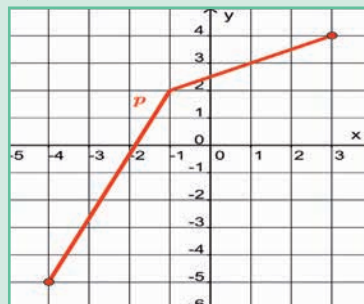
EJERCICIOS

I. ¿Cuáles de las siguientes gráficas representan funciones que tienen inversa? Justifique su respuesta.

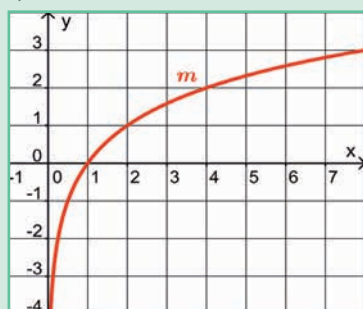
1)



2)



3)



4)

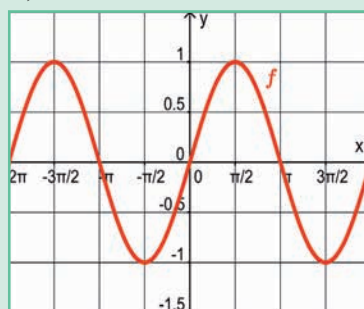


Figura 13

II. Suponga que g es una función uno a uno; halle el valor funcional correspondiente:

1) Si $g(-2) = -11$, $g^{-1}(-11) =$

2) Si $g^{-1}(-7) = 4$, $g(4) =$

3) Si $g\left(\frac{2}{3}\right) = 0$, $g^{-1}(0) =$

4) Si $g^{-1}(9) = -3$, $g(-3) =$

III. Las siguientes funciones son uno a uno; halle el valor funcional indicado:

1) Si $g(t) = -2t + 5$, $g^{-1}(-11) =$

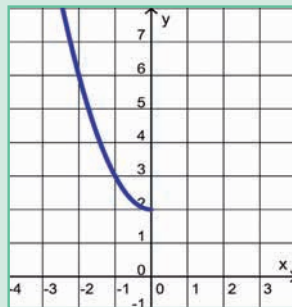
2) Si $h^{-1}(r) = \frac{10}{r-1}$, $h(5) =$

3) Si $f(x) = (x-3)^2$, $x \geq 3$, $f^{-1}(1) =$

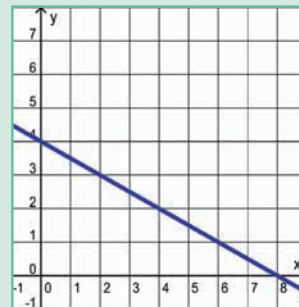
4) Si $m^{-1}(z) = \sqrt{z} + 2$, $z \geq 0$, $m(3) =$

IV. Seleccione entre las gráficas de la figura 15, la gráfica de la función inversa, que corresponda a cada una de las gráficas de las funciones, de la figura 14 (coloque la letra en el paréntesis).

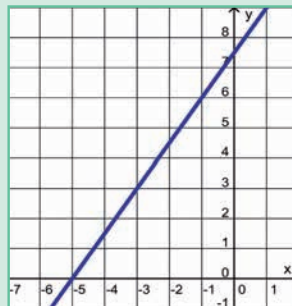
1) ()



2) ()



3) ()



4) ()

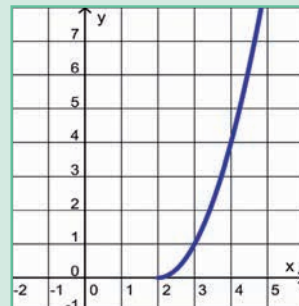


Figura 14

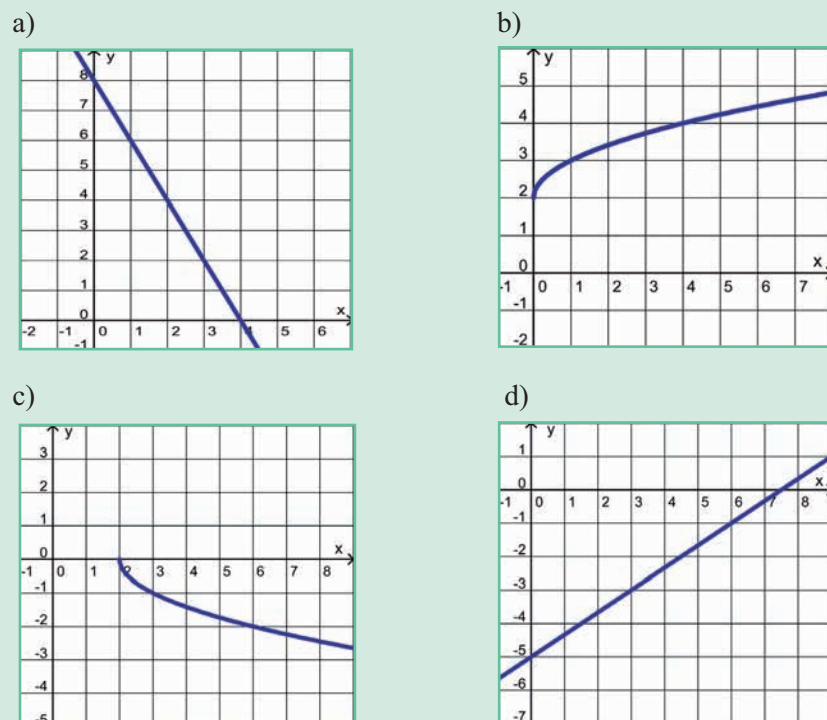
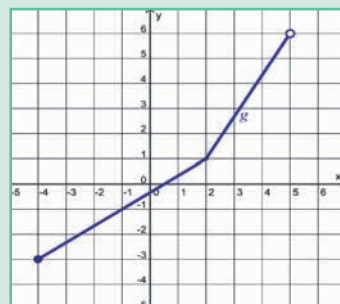


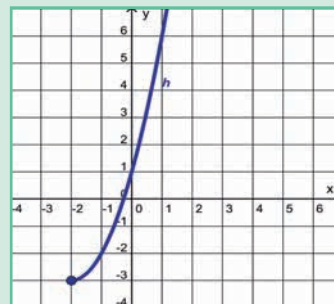
Figura 15

V. Trace la gráfica de la inversa de cada función:

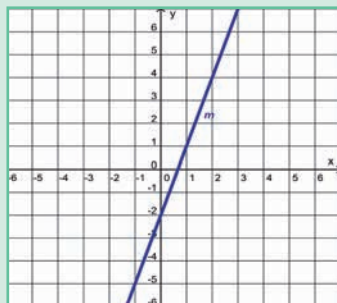
1)



2)



3)



4)

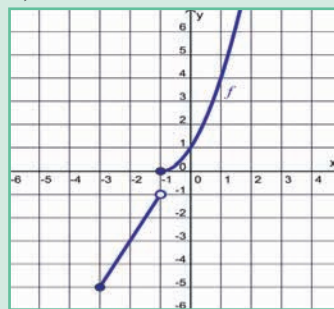


Figura 16

VI. Halle la inversa de cada una de las siguientes funciones y escriba tanto el dominio como el rango de la función y de su inversa.

1) $f(x) = \frac{x}{4}$

2) $g(x) = \frac{2}{3}x - 5$

3) $h(x) = x^3 - 4$

4) $f(x) = \frac{2}{1-x}$

5) $g(x) = \sqrt{x+4}$

6) $h(x) = (x+2)^2, x \geq -2$

VII. En cada ejercicio **verifique** si la función g es la inversa de f .

1) $f(x) = 6x$

$g(x) = \frac{x}{6}$

2) $f(x) = 5x - 3$

$g(x) = \frac{3-x}{5}$

3) $f(x) = \sqrt{x+3}, x \geq -3$

$g(x) = x^2 - 3$

4) $f(x) = \frac{2}{x-3}, x \neq 3$

$g(x) = \frac{3x+2}{x}, x \neq 0$

5) $f(x) = \sqrt{x-2}, x \geq 0$

$g(x) = (x-2)^2, x \geq -2$

6) $f(x) = \frac{7}{(8-2x)}, x \neq 4$

$g(x) = 4 - \frac{7}{2x}, x \neq 0$

VIII. Resuelva los siguientes problemas:

- 1) En el año 2010 el valor de un dólar era aproximadamente de \$2 000; D representa cantidad de dólares y P el dinero en pesos.
 - a) Escriba P en términos de D .
 - b) Escriba D en términos de P .
 - c) ¿A cuántos dólares equivalen \$20 000?
- 2) El precio de una hamburguesa sencilla se fijó en \$5 000 más \$800 por cada ingrediente. Luego, si se ordena una hamburguesa sencilla con x ingredientes, el precio lo dará la función $H(x) = 5000 + 800x$.
 - a) Halle $H(4)$, ¿qué significa?
 - b) Encuentre H^{-1} . ¿Qué representa la función H^{-1} ?
 - c) Halle $H^{-1}(8\ 200)$.
- 3) La relación entre las escalas Fahrenheit (F) y Celsius (C) está dada por la función $F(C) = \frac{9}{5}C + 32$.
 - a) Encuentre $F^{-1}(C)$. ¿Qué representa?
 - b) Halle $F^{-1}(68)$. Interprete la respuesta.

3.2 FUNCIONES EXPONENCIALES

ACTIVIDAD INICIAL

FRACTALES

Observe el procedimiento ilustrado en la figura 1: a partir de un triángulo equilátero (etapa 0) unimos los puntos medios de los lados para obtener 4 triángulos equiláteros y los sombreamos, exceptuando el del centro (etapa 1); con los 3 triángulos equiláteros sombreados, unimos de nuevo los puntos medios de cada uno y sombreamos los triángulos, exceptuando los que quedan en el centro (etapa 2) y repetimos este procedimiento una vez más (etapa 3):

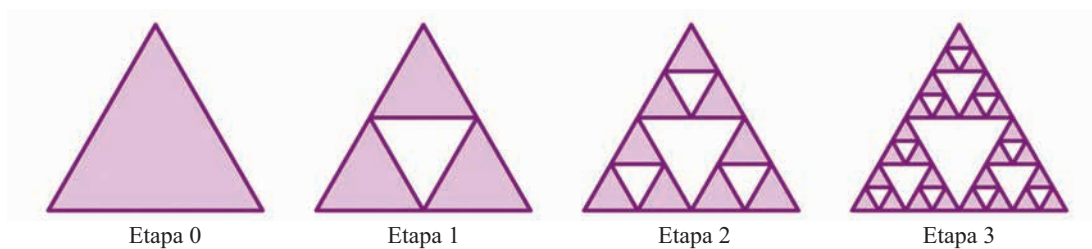


Figura 1

En cada una de las etapas del procedimiento centraremos la atención en dos aspectos: la cantidad de triángulos equiláteros sombreados y el área total de los mismos.



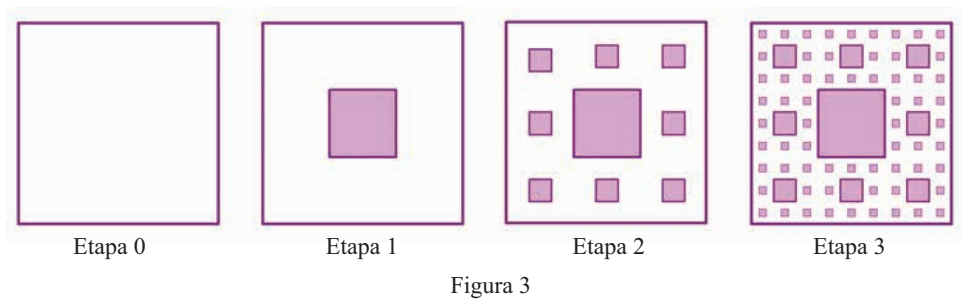
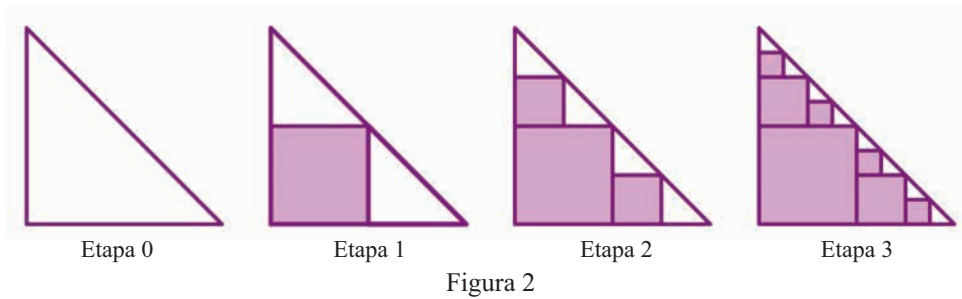
Suponga que en la etapa 0 el área del triángulo es 1. Complete los valores particulares que faltan en las casillas de la tabla 1:

Etapas #	Cantidad de triángulos equiláteros sombreados (S)	Área de la región sombreada (todos los triángulos sombreados) (A)
0	1	1
1	3	$\frac{3}{4}$
2		
3		
4		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n		

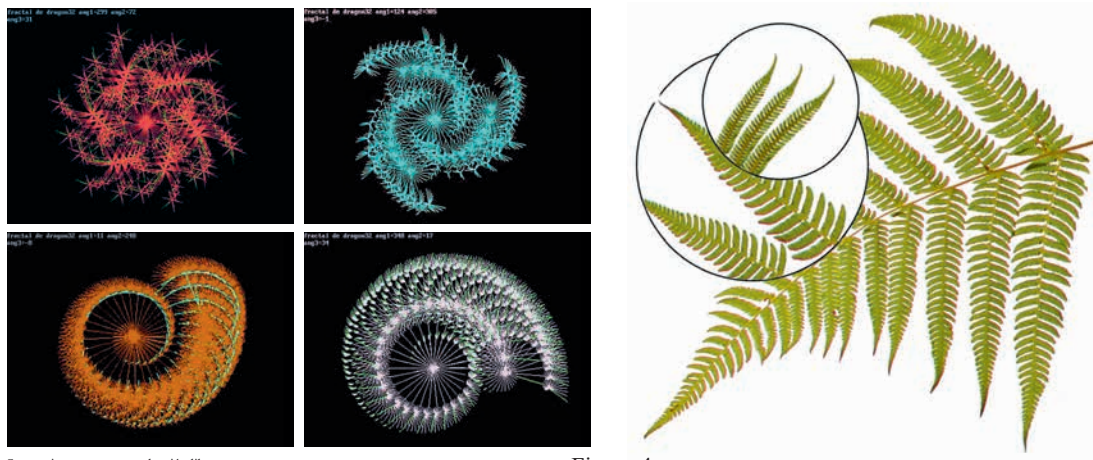
Tabla 1

Procedimientos como el anterior en el que cada etapa se construye sobre la anterior, se denominan *recursivos*. Al repetir el proceso de la figura 1, “infinitas veces”, se obtiene un *fractal*.

Las figuras 2, 3 y 4 ilustran procedimientos para construir otros fractales:



Observe en la figura 4 más fractales:



Consideremos las variables S (números de triángulos) y A (área de la región sombreada) de la actividad inicial como funciones de la variable n , definidas algebraicamente mediante las ecuaciones: $S(n) = 3^n$, $A(n) = \left(\frac{3}{4}\right)^n$. Observemos que en estas funciones *la variable independiente se encuentra en el exponente*; las funciones S y A tienen como dominio el conjunto de los enteros no negativos: $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$. Trataremos funciones como S y A con dominio más amplio: los números reales.

Comencemos considerando la función $f(x) = 2^x$. Con la tabla 2 (ver repaso sobre exponentes), trazamos la gráfica correspondiente en la figura 5:

x	2^x
1	2
2	4
3	8
0	1
0.5	≈ 1.41
-1	$2^{-1} = \frac{1}{2} = 0.5$
-2	$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = 0.25$
-3	$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = 0.125$

Tabla 2

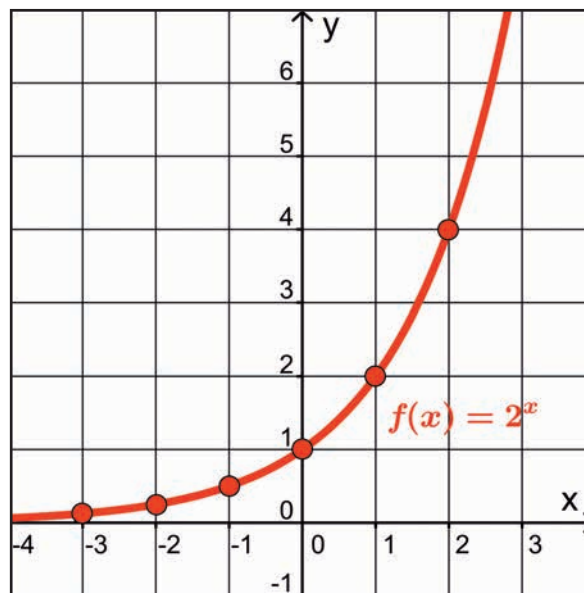


Figura 5



De la función $f(x) = 2^x$, indique: dominio, rango, cortes de la gráfica con los ejes, intervalos de crecimiento o decrecimiento.

Observemos en la figura 5 el comportamiento final de la función $f(x) = 2^x$:

$$\text{si } x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$$

$$\text{si } x \rightarrow -\infty, y \rightarrow 0$$

Por tanto, el eje x (la recta $y = 0$) es una *asíntota horizontal* de la gráfica de f .



Tome una hoja de papel. Dóblela por la mitad. Desdóblela. Observe que resultan 2 regiones rectangulares. Dóblela de nuevo y vuelva a doblar por la mitad. Resultan ahora cuatro regiones rectangulares. Continúe doblando por la mitad y contando regiones. Complete la tabla 3.

Coloque 3 hojas de papel, una encima de otra, y repita los pasos anteriores. Llene la tabla 4. Haga lo mismo con 5 hojas y llene la tabla 5.

1 hoja de papel	
# dobleces	# regiones
x	y
0	1
1	2
2	4
3	
4	

Tabla 3

3 hojas de papel	
# dobleces	# regiones
x	y
0	3
1	6
2	
3	
4	

Tabla 4

5 hojas de papel	
# dobleces	# regiones
x	y
0	5
1	
2	20
3	
4	

Tabla 5

Haga, en la figura 6, las gráficas correspondientes a las tres tablas (asuma como modelos, funciones con dominio, los números reales). Una suavemente los puntos:

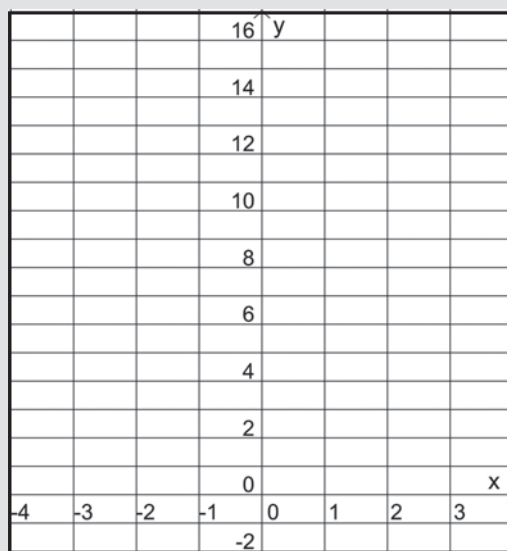


Figura 6



Escriba la definición algebraica de cada función al lado de la gráfica correspondiente en la figura 6.

¿Cuál es el intercepto con el eje y de cada función?



Observe que las funciones de la figura 6 son de la forma $y = a \cdot 2^x$. Describa en términos de transformaciones, relaciones entre las gráficas.



Complete la tabla 6. Trace, en la figura 7, la gráfica de la función $g(x) = 3^x$. Compárela con la gráfica de la función $f(x) = 2^x$.

x	3^x
1	
2	
3	
0	
0.5	
-1	
-2	
-3	

Tabla 6

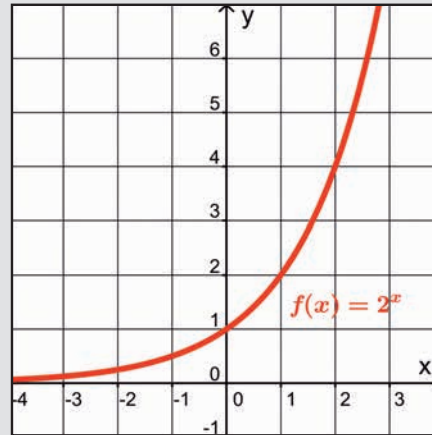


Figura 7

Observe ahora la gráfica de la función $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = (0.5)^x$:

x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$
0	1
-1	2
-2	4
-3	8

Tabla 7

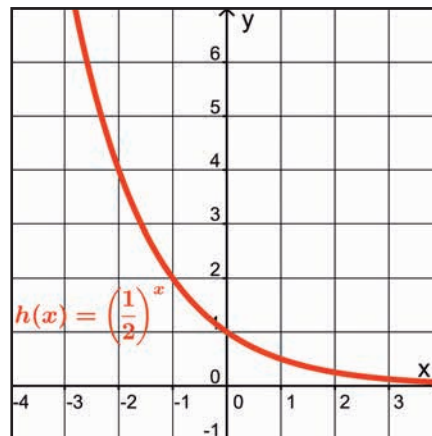


Figura 8



Describe características de la función $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.



Compare las gráficas de las funciones de la figura 9.

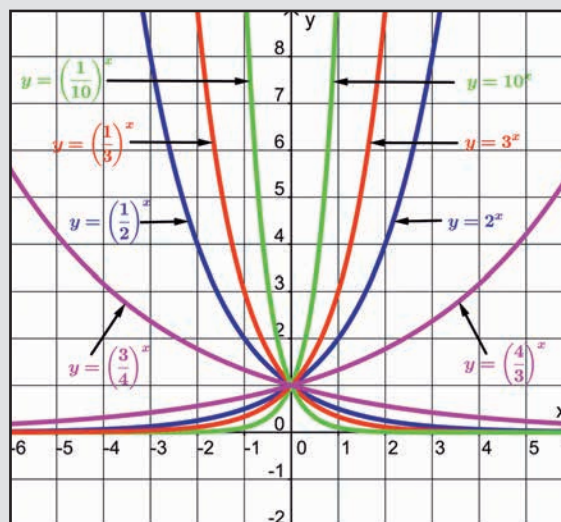


Figura 9



Haga la gráfica de la función $t(x) = 1^x$ en la figura 10. Compárela con las gráficas de la figura 9.

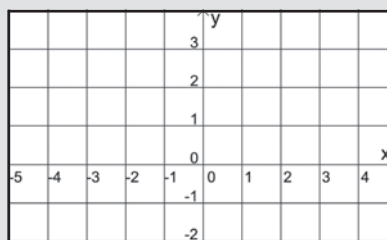


Figura 10

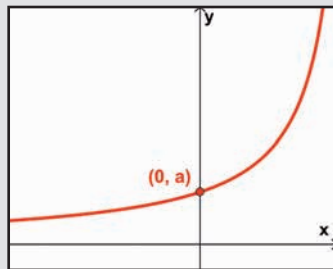


¿Qué sucede con funciones como $t(x) = (-4)^x$ y $p(x) = 0^x$?

Los ejemplos de funciones que se han considerado hasta el momento motivan la siguiente definición:

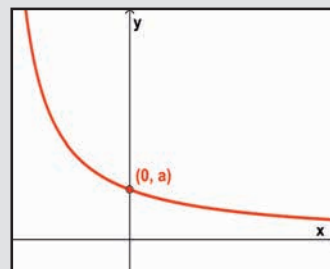
Una función de la forma $f(x) = a b^x$ es una **función exponencial** de base b , $b > 0$ y $b \neq 1$

Si $a \geq 0$ y $b \geq 1$:



La gráfica muestra un crecimiento exponencial.

Si $a \geq 0$ y $0 < b < 1$:



La gráfica muestra un decrecimiento o decaimiento exponencial.

Figura 11

Dominio: conjunto de los números reales.

Rango: números reales positivos.

y -intercepto: $(0, a)$.

El eje x es una asíntota horizontal.

Un ejemplo de crecimiento exponencial es el ilustrado en la figura 7 y uno de decrecimiento exponencial se muestra en la figura 8.



En el mismo plano cartesiano haga las gráficas de las funciones $g(x) = 3 \cdot 2^x$ y $h(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$ y describa características de cada una.

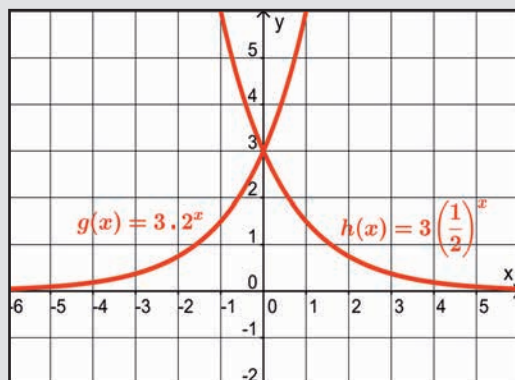


Figura 12

- Tanto g como h tienen como dominio los reales y rango el intervalo $[0, \infty)$.
- Ambas tienen como y -intercepto al punto $(0, 3)$.
- La función g es creciente, en tanto que la función h es decreciente.
- La asíntota horizontal de g es el eje x positivo, y la de h es el eje x negativo.

EJERCICIOS

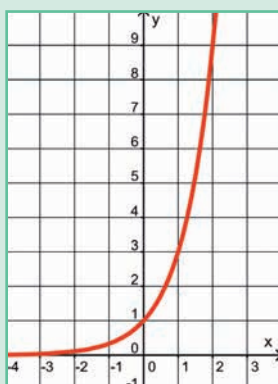
- Verifique que la cantidad de triángulos no sombreados en el proceso de la figura 2 sigue un crecimiento exponencial. ¿Qué función modela este crecimiento?; en forma análoga proceda con la cantidad de cuadrados sombreados de la figura 3.
- Describa semejanzas y diferencias entre las gráficas de las funciones $f(x) = 2^x$, y $g(x) = x^2$.

III. Forme la pareja de cada función con su gráfica:

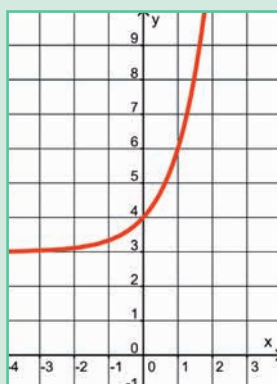
1) $y = 3^x$ () 2) $y = 2 \cdot 3^x$ () 3) $y = 3^{x-2} - 4$ ()

4) $y = 3^{-x}$ () 5) $y = 3^x + 3$ () 6) $y = -3^{-x} + 5$ ()

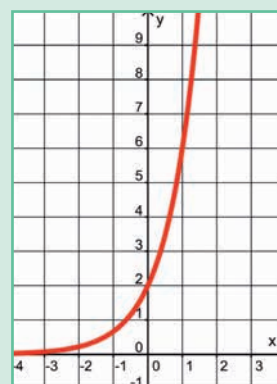
a)



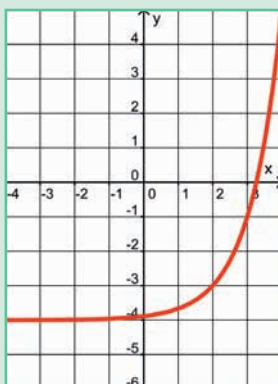
b)



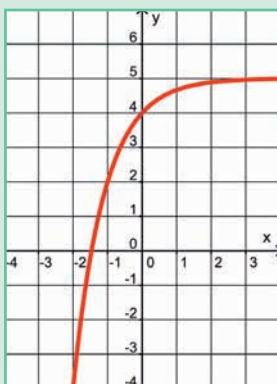
c)



d)



e)



f)

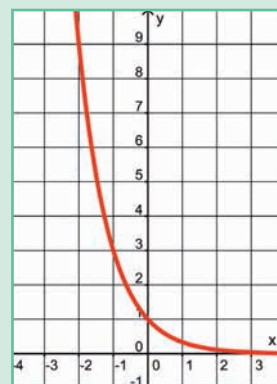


Figura 13

IV. Utilice la calculadora para evaluar los valores funcionales de la tabla 8 (aproxíme a 3 cifras decimales):

	2	-2	$-\frac{1}{2}$	0.8	$\sqrt{2}$
$f(x) = 4^x$					
$g(x) = -3^{2x}$					
$h(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$					
$h(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{x-2}$					

Tabla 8

V. Halle la ecuación de la asíntota horizontal de cada función de la figura 13.

VI. Halle el rango de las siguientes funciones:

1) $y = -10^{x-1}$

2) $y = 10^{-x} + 3$

3) $y = -10^{x+2}$

4) $y = \frac{1}{2}10^x - 4$

5) $y = -2 \cdot 10^{x-4}$

6) $y = -10^{2x} + 2$

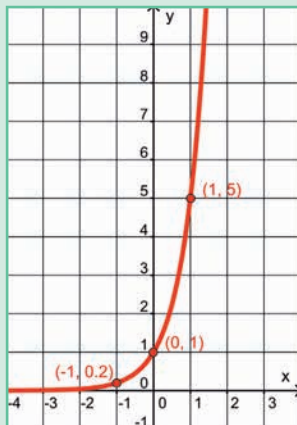
VII. Halle el intercepto con el eje y de la gráfica de cada función en el ejercicio anterior.

VIII. Utilice las propiedades de los exponentes en los siguientes ejercicios para contestar cada pregunta.

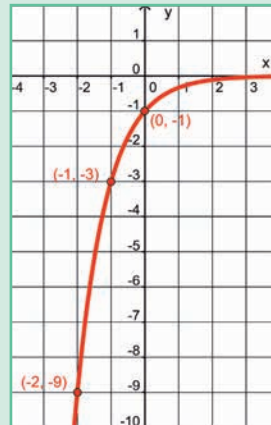
- 1) Si $3^x = 5$, ¿a qué es igual 3^{2x} ?
- 2) Si $7^{-x} = 4$, ¿a qué es igual 7^{-3x} ?
- 3) Si $2^{-x} = 3$, ¿a qué es igual 2^{3x} ?
- 4) Si $8^x = 2$, ¿a qué es igual 8^{-4x} ?
- 5) Si $5^x = 10$, ¿a qué es igual 5^{-6x} ?
- 6) Si $6^x = 4$, ¿a qué es igual 6^{3x} ?

IX. Determine la función exponencial cuya gráfica se da. Halle el rango de cada función:

1)



2)



3)

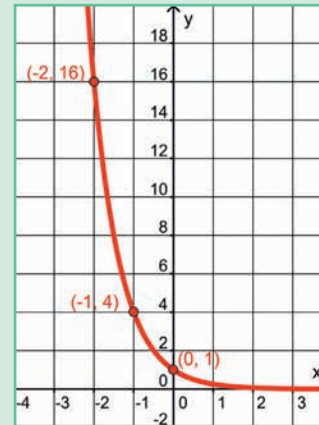


Figura 14

- X. El valor P , en millones, de un carro usado se devalúa según la cantidad t de años transcurridos; suponga que P puede aproximarse con el modelo $P(t) = 30 \cdot 0.92^t$. Haga la gráfica, con ayuda de un graficador, y úsela para estimar cuándo el precio del carro será de 5 millones.

3.3 INTERÉS COMPUESTO

ACTIVIDAD INICIAL



Se tienen dos planes, A y B, para invertir una suma de \$10 000. El plan A ofrece una tasa de *interés simple* del 15% anual; el plan B ofrece una tasa de *interés compuesto* anual del 15%. Complete la tabla 1:

	PLAN A	PLAN B
Años (<i>n</i>)	Capital a los <i>n</i> años (con interés simple)	Capital a los <i>n</i> años (con interés compuesto)
0	10 000	10 000
1	$10\,000 + 0.15(10\,000)$ $= 10\,000 + 1\,500 = \$11\,500$	$10\,000 + 0.15(10\,000)$ $= 10\,000 + 1\,500 = \$11\,500$
2	$11\,500 + 0.15(10\,000)$ $= 11\,500 + 1\,500 = \$13\,000$	$11\,500 + 0.15(11\,500)$ $= 11\,500 + 1\,725 = \$13\,225$
3		
4		

Tabla 1

¿Cuál será el capital, en cada plan, a los 12 años? Contestar la pregunta anterior, procediendo año por año, es una tarea larga y engorrosa. Reescribiendo lo que se obtiene en cada año, como se muestra a continuación, nos permite llegar a expresiones donde se simplifican los cálculos:

	Plan A
Año	Capital final
1	$10\ 000 + 0.15(10\ 000) = 10\ 000(1 + 0.15)$
2	$10\ 000(1 + 0.15) + 0.15(10\ 000) = 10\ 000(1 + 0.15 + 0.15)$ $= 10\ 000(1 + 2(0.15))$
3	$10\ 000(1 + 2(0.15)) + 0.15(10\ 000) = 10\ 000(1 + 2(0.15) + 0.15)$ $= 10\ 000(1 + 3(0.15))$
⋮	⋮
n	$10\ 000(1 + n(0.15))$

Tabla 2

	Plan B
Año	Capital final
1	$10\ 000 + 0.15(10\ 000) = 10\ 000(1 + 0.15)$
2	$10\ 000(1 + 0.15) + 0.15(10\ 000(1 + 0.15))$ $= 10\ 000(1 + 0.15)(1 + 0.15)$ $= 10\ 000(1 + 0.15)^2$
3	$10\ 000(1 + 0.15)^2 + 0.15(10\ 000(1 + 0.15)^2)$ $= 10\ 000(1 + 0.15)^2(1 + 0.15)$ $= 10\ 000(1 + 0.15)^3$
⋮	⋮
n	$10\ 000(1 + 0.15)^n$

Tabla 3



¿Cuál es el capital, en cada plan, a los 12 años?

Si consideramos fijos el *capital inicial* (P) o capital presente, la *tasa de interés* de cada período de tiempo (i), y consideramos variable la *cantidad total de periodos* (n), entonces el *capital final* (S) o suma final es una función de n , dado por la expresión:

$$S(n) = P(1 + ni), \text{ si el interés es simple.}$$

$$S(n) = P(1 + i)^n, \text{ si el interés es compuesto.}$$

Ejemplo 1

Una inversión de 5 millones de pesos se deposita en una cuenta, en la que el interés se capitaliza¹ mensualmente (interés compuesto) con una tasa del 1.3% mensual. ¿Cuál es el valor de la inversión a los 2 años?

Solución

Tenemos entonces que $P = 5\,000\,000$, la tasa de interés es $i = 1.3\% = 0.013$ mensual, períodos, $n = 2(12) = 24$ meses; se está pidiendo hallar $S(24)$, la suma final a los 24 meses:

$$S(24) = P(1 + i)^n = 5\,000\,000(1 + 0.013)^{24} \approx 6\,817\,053.35$$

Luego, a los 2 años el valor de la inversión es de \$6 817 053.35.

¹ El interés que se liquida en cada período ingresa como capital en el siguiente.

Ejemplo 2

Se invierten 8 000 dólares a una tasa de interés anual del 14%. Halle la suma final a los 4 años para cada uno de los siguientes métodos de capitalización de los intereses:

- a) anual
- b) semestral
- c) trimestral
- d) mensual

Solución

- a) $P = 8\,000$, $i = 14\% = 0.14$ anual, $n = 4$ años

$$S(4) = 8\,000(1 + 0.14)^4 \approx 13\,511.68 \text{ dólares}$$

- b) $i = \frac{0.14}{2} = 0.07$ semestral, $n = 2(4) = 8$ semestres

$$S(8) = 8\,000\left(1 + \frac{0.14}{2}\right)^8 \approx 13\,745.49 \text{ dólares}$$

- c) $i = \frac{0.14}{4} = 0.035$ trimestral, $n = 4(4) = 16$ trimestres

$$S(16) = 8\,000\left(1 + \frac{0.14}{4}\right)^{16} \approx 13\,871.89 \text{ dólares}$$

- d) $i = \frac{0.14}{12}$ mensual, $n = 12(4) = 48$ meses

$$S(48) = 8\,000\left(1 + \frac{0.14}{12}\right)^{48} \approx 13\,960.06 \text{ dólares}$$

Ejemplo 3

Se invierten \$6 000 000 a una tasa de interés del 6% anual, compuesto trimestral. ¿En cuánto tiempo se duplicará el capital?

Solución

$$P = 6\,000\,000, i = 6\% \text{ anual}, i = \frac{0.06}{4} \text{ trimestral}, t = ? \text{ trimestre}$$

$$S(t) = 2 \cdot 6\,000\,000 = 12\,000\,000$$

$$12\,000\,000 = 6\,000\,000 \left(1 + \frac{0.06}{4}\right)^t$$

Aplicando el inverso multiplicativo a 6 000 000, en ambos lados de la ecuación, y sumando lo del paréntesis, la ecuación anterior se transforma en:

$$\frac{12\,000\,000}{6\,000\,000} = 1.015^t$$

$$2 = 1.015^t$$

La ecuación anterior tiene la incógnita en el exponente. En las secciones 3.6 y 3.7 se darán los elementos para resolver este tipo de ecuaciones; en la sección 3.9 se retoma el problema.

EJERCICIOS

- 1) Se abre un CDT por 9 millones de pesos en un banco. Si la rentabilidad es del 1.8% mensual, ¿cuánto dinero se recibe si se cancela el CDT 1 año después de su apertura?
- 2) \$2 000 000 se depositan en un banco a una tasa de interés anual del 18%. Halle la suma final al cabo de 6 años para cada uno de los siguientes métodos de capitalización de los intereses:

a) anual	b) semestral	c) trimestral
d) mensual	e) diario	f) por hora

Para los ejercicios 3 y 4

El **valor presente** es la cantidad de dinero que debe invertirse hoy a una tasa de interés dada, para producir la suma final después de un tiempo específico.

- 3) ¿Cuál es el valor presente de \$3 500 000 si el interés se capitaliza semestralmente durante 4 años a una tasa del 14.5% anual?
- 4) Halle el valor presente de \$5 500 000 si los intereses se capitalizan mensualmente, durante 3 años, a una tasa de interés de:
 - a) 1.5% mensual.

- b) 18.6% anual.
c) Compare los resultados anteriores.
- 5) Se invierten \$750 000 a una tasa de interés del 16.5% anual, capitalizados mensualmente. Encuentre la suma final después de:
- a) 5 años.
b) 6 años.
c) ¿al cabo de 10 años se habrá duplicado la suma final obtenida en a)?
- 6) En enero de 2009 el precio promedio de la gasolina fue de \$6 850. Durante dicho año, el precio promedio P , en pesos, se incrementó exponencialmente 12.5% cada mes.
- a) Escriba un modelo de crecimiento exponencial que represente el precio promedio de la gasolina después de t meses, a partir de enero.
b) Haga la gráfica del modelo.
c) Use el modelo para predecir el precio de la gasolina después de 10 meses.
- 7) Suponga que su objetivo es tener ahorrados por lo menos \$5 500 000 en una cuenta, después de 5 años. Determine la suma final al cabo de los 5 años e indique si en algún caso logró el objetivo:
- a) si deposita \$2 400 000 en una cuenta que paga un interés compuesto anual del 15.5% anual.
b) si el depósito es de \$3 700 000 en una cuenta que paga el 8% de interés anual, capitalizado mensualmente.
c) si el depósito es de \$3 600 000, en una cuenta que paga el 6.5% de interés anual, capitalizado diariamente.
- 8) Si tiene una suma de \$4 500 000 para depositar en un banco; ¿en cuál de los siguientes bancos se tiene, al cabo de 6 años, la suma final más alta?

BANCO	Tasa de interés anual	Tipo de composición
A	3.2%	anual
B	3%	semestral
C	2.8%	trimestral
D	2.5%	mensual

3.4 INTERÉS COMPUESTO CONTINUO

ACTIVIDAD INICIAL



Supongamos que se invierte \$1 a una tasa de interés anual del 100% durante un año. Complete en la tabla 1 los valores correspondientes a la suma final S para los períodos de composición n señalados ($P = 1$, $i = 100\% = 1$; escriba todos los decimales que muestre la calculadora):

n (períodos de composición)	$S(n)$
1 (anualmente)	2
2 (semestralmente)	2.25
4 (trimestralmente)	
12 (mensualmente)	
365 (diariamente)	
8760 (cada hora)	
525 600 (cada minuto)	
31 536 000 (cada segundo)	

Tabla 1

En la tabla 1 podemos apreciar que a medida que n se hace más grande, los valores de S , obtenidos con la fórmula $S(n) = 1\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, se aproximan cada vez más al número 2.7182818284..., conocido en matemáticas como el *número de Euler* (e). La representación decimal del número e no es periódica y por tanto es un número *irracional*.

$$e = 2.7182818284\dots$$

Lo anterior indica que cuando se invierte \$1 a una tasa de interés anual del 100% durante un año, y la cantidad de períodos de composición es muy grande (el interés se acumula al capital “cada instante”), la suma final es muy cercana al número $e = 2.7182818284\dots$

Cuando el interés se acumula al capital cada instante, hablamos de *interés compuesto continuo*.

Si i es la tasa de interés anual y el interés se compone en n períodos durante el año, entonces en t años la suma final S , expresada en función de t , es:

$$S(t) = P\left(1 + \frac{i}{n}\right)^{nt}.$$

Reescribiendo esta expresión en la forma: $S(t) = P\left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{i}}\right)^{\frac{n}{i}}\right]^{it}$, y considerando el número de períodos de composición n muy grande, entonces la parte que se encuentra en el corchete se aproxima al número e ; tenemos entonces que:

Cuando el interés se compone *continuamente*, la suma final S se calcula con la fórmula:

$$S(t) = Pe^{it}$$

donde P es el capital inicial, i la tasa de interés anual y t es el número de años transcurridos.

Si consideramos la información inicial, es decir, $P = 1$, $i = 100\% = 1$, y remplazamos en S , obtenemos la función $S(t) = e^t$. La gráfica de S :

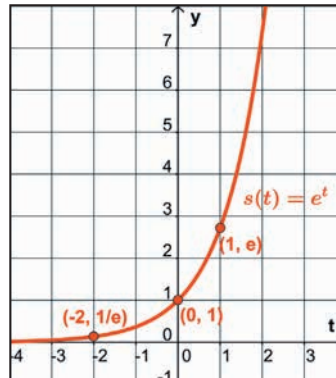


Figura 1

Ejemplo 1

Halle la suma final a los 4 años si se invierten \$6 000 000 a una tasa de interés anual del 12%, capitalizados de forma continua.

Solución

Usamos la fórmula cuando el interés se compone continuamente, para $P = \$6\,000\,000$, $i = 0.12$, $t = 4$:

$$S(4) = 6\,000\,000e^{0.12(4)} \approx 9\,696\,446.41$$

Así, al cabo de 4 años se tendrán \$9 696 446.41.

Ejemplo 2

Halle el capital inicial, si al cabo de 8 años, a una tasa de interés anual del 14% capitalizados en forma continua, se tiene una suma final de \$17 500 000.

Solución

Con la fórmula, cuando el interés se compone continuamente, siendo $S = 17\,500\,000$, $i = 0.14$ y $t = 8$, obtenemos P :

$$P = \frac{17\,500\,000}{e^{0.14(8)}} \approx 5\,709\,896.41$$

El capital inicial era \$5 709 896.41.

EJERCICIOS

- 1) Se invierten \$3 800 000 a una tasa de interés anual del 16.5%, capitalizados de forma continua. Halle la suma final a los 6 años.
- 2) Se invierten \$850 000 a una tasa de interés del 18% anual, capitalizados continuamente. Encuentre la suma final después de 6 años.
- 3) Un depósito de 600 dólares recibe un interés del 14.5% anual, compuesto continuamente.
 - a) ¿Cuánto dinero hay en un año?
 - b) Utilice una graficadora para representar el modelo de interés compuesto continuo.
 - c) Úsela para estimar el tiempo que se necesita para tener 700 dólares.
- 4) ¿Cuál de las siguientes tasas de interés, con sus respectivas formas de capitalización de los intereses, proporciona la mejor inversión?
 - a) 10.5% anual, capitalizable semestralmente.
 - b) 10.25% anual, capitalizable trimestralmente.
 - c) 10% anual, capitalizable de forma continua.
- 5) Después de 7 años se reciben \$17 500 000 al cerrar un CDT. Halle el capital inicial, si la tasa de interés anual fue del 17.5%, capitalizados en forma continua.
- 6) ¿Cuál es el valor presente de \$1 650 000 a una tasa del 12.5% anual, si los intereses se capitalizan en forma continua durante 2 años?
- 7) Si se fija como meta tener, en 5 años, 3 000 dólares en una cuenta que paga una tasa de interés del 10.5% anual, compuesto continuamente, ¿cuánto hay que invertir ahora?

3.5 DINÁMICA DE POBLACIONES Y DESINTEGRACIÓN RADIACTIVA

En la sección 3.3 vimos que cuando el interés se compone *continuamente*, la suma final S está dada por la función exponencial $S(t) = Pe^{it}$, donde P es el capital inicial, i la tasa de interés anual y t es el número de años transcurridos. La gráfica de S tiene la forma:

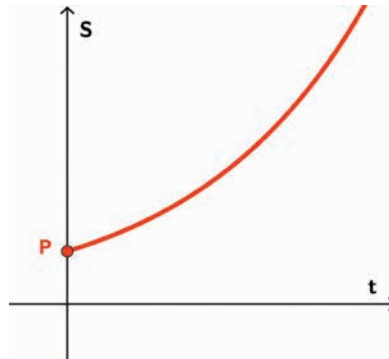


Figura 1

A medida que el tiempo aumenta, la suma final S (dinero acumulado) aumenta; observemos que entre más tiempo pasa, más rápido crece S . Se puede comprobar que *la manera como crece S en un determinado momento es proporcional a la cantidad de dinero que hay en ese momento*.

Se ha encontrado que varios fenómenos de la naturaleza se modelan apropiadamente con funciones exponenciales similares a la del interés compuesto continuo; en estos, una variable A depende de otra variable t (tiempo), de modo que *el cambio en A , para un t dado, es proporcional a la cantidad A correspondiente a ese valor de t* . Ese tipo de fenómenos se modela con la función:

$$A(t) = A_0 e^{kt}$$

Aquí, A_0 es la cantidad inicial ($t=0$) y $k \neq 0$ es una constante. Si $k > 0$, entonces A crece con el tiempo; si $k < 0$, A decrece con el tiempo (figura 2):

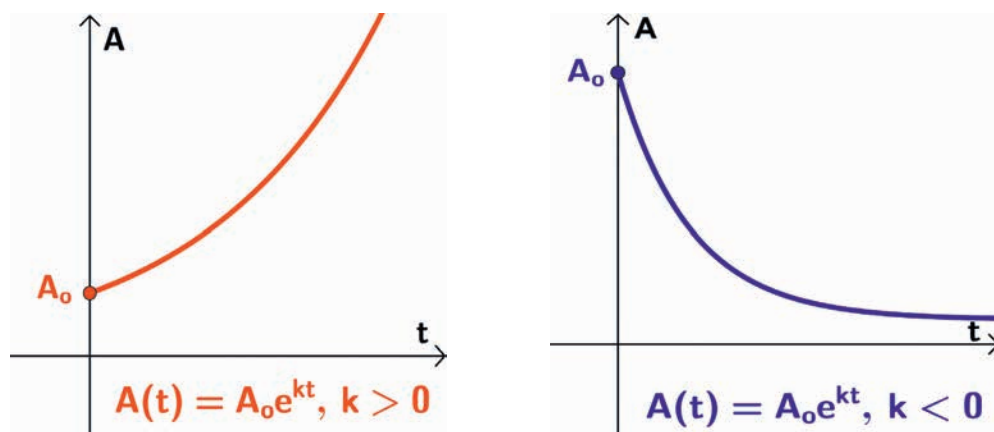


Figura 2

La dinámica de poblaciones y la desintegración radiactiva son ejemplos de fenómenos que se modelan con funciones exponenciales de la forma $A(t) = A_0 e^{kt}$.

3.5.1. DINÁMICA DE POBLACIONES

Cuando se asume la hipótesis de que una población (bacterias, personas u otra especie) crece en forma proporcional a la población total $P(t)$ en cualquier momento t , entonces empleamos el modelo matemático:

$$P(t) = P_0 e^{rt}$$

donde:

P_0 es la *población inicial*,

r es la *tasa de crecimiento* de la población, y

$P(t)$ es la *población después de un tiempo t* .

Ejemplo 1

La población inicial en un cultivo de bacterias es de 400. Posteriormente se realizó un conteo y se encontró que la tasa de crecimiento es del 30% por hora.

- Encuentre una función P que modele el número de bacterias después de t horas.
- ¿Cuál es el número estimado de bacterias después de 6 horas?
- Trace la gráfica de P .

Solución

- $P_0 = 400$; la tasa de crecimiento es del 30%, es decir, $r = 0.30$. La función que modela el número de bacterias después de t horas, es:

$$P(t) = 400e^{0.3t}$$

- Remplazamos t por 6, y obtenemos:

$$P(6) = 400e^{0.3 \cdot 6}$$

$$P(6) \approx 2\,420$$

Por tanto, transcurridas 6 horas, el cultivo tendrá aproximadamente 2 420 bacterias.

- Gráfica de P :

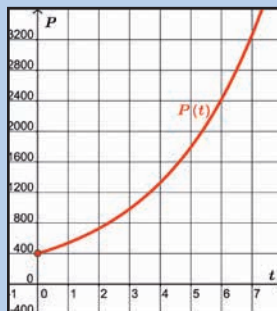


Figura 3

Ejemplo 2

La población de cierta clase de peces tiene una tasa de crecimiento del 65% por año. El conteo de dicha población se inició en 2005 y en 2008 la población era de 12 500 peces.

- ¿Cuál fue el tamaño inicial de la población de peces?
- Estime la población de peces que habrá en el año 2014.

Solución

- La tasa de crecimiento es del 65%, es decir, $r = 0.65$; transcurridos 3 años (desde 2005 hasta 2008), la población es de 12 500, $P(3) = 12\,500$. Remplazamos en el modelo para crecimiento poblacional, $P(t) = P_0 e^{rt}$ y tenemos:

$$P(3) = P_0 e^{0.65 \cdot 3}$$

$$12\,500 = P_0 e^{0.65 \cdot 3}$$

$$12\,500 = P_0 e^{1.95}$$

$$\frac{12\,500}{e^{1.95}} = P_0$$

$$P_0 = 1\,778$$

El tamaño inicial de la población fue de 1 778 peces.

- Para el año 2014, $t = 9$; remplazamos en la fórmula anterior y obtenemos:

$$P(9) = \left(\frac{12\,500}{e^{1.95}} \right) e^{0.65 \cdot 9}$$

$$P(9) = 617\,531$$

En el año 2014 la población de peces será de 617 531.

3.5.2 DESINTEGRACIÓN RADIATIVA

Las sustancias radiactivas pierden masa al emitir radiaciones. Este proceso es espontáneo y recibe el nombre de *desintegración radiactiva*. Si la tasa con la que se desin-

tegra la masa m de la sustancia es proporcional a la cantidad de sustancia que queda, entonces se emplea el modelo:

$$m(t) = m_0 e^{rt}$$

donde:

m_0 es la masa inicial

r es la tasa de desintegración radiactiva, $r < 0$

$m(t)$ es la masa que queda en el tiempo t

Ejemplo 3

La tasa de desintegración del radio 226 es 0.043322% anual. Se tiene una muestra de 40 g de radio 226.

- Encuentre una función m que modele la masa que queda después de t años.
- ¿Cuánto queda de la muestra después de 3 800 años?

Solución

- La masa inicial $m_0 = 40$ y $r = -0.00043322$. Por lo tanto la función es:

$$m(t) = 40e^{-0.00043322 t}$$

- Remplazamos $t = 3\,800$ y obtenemos:

$$m(3\,800) = 40e^{-0.00043322 \cdot 3\,800}$$

$$m(3\,800) = 7.71$$

Después de 3 800 años quedan 7.71 gramos de la muestra.

Ejemplo 4

Transcurridos 50 días quedan 20 g de una muestra de torio 234. La tasa de desintegración radiactiva es de 2.77% por día.

- ¿Cuál es la masa inicial de la muestra? Escriba la función que modela la masa del torio 234, transcurridos t días.
- ¿Cuántos gramos de la muestra quedan después de 100 días?

Solución

a) $m(50) = 20$, $t = 50$ y $r = -0.0277$. Remplazamos en $m(t) = m_0 e^{rt}$ y tenemos:

$$20 = m_0 e^{-0.0277 \cdot 50}$$

$$m_0 = \frac{20}{e^{-0.0277 \cdot 50}}$$

$$m_0 = 79.9 \text{ g}$$

La función que modela la masa del torio 234 que queda después de t días es:

$$m(t) = 79.9 e^{-0.0277t}$$

b) $t = 100$, por lo tanto hallamos $m(100)$ utilizando la función anterior:

$$m(100) = 79.9 e^{-0.0277 \cdot 100}$$

$$m(100) = 5.01 \text{ g}$$

Transcurridos 100 días quedan 5 g de la muestra de torio 234.

PROBLEMAS

Las poblaciones y las sustancias radiactivas planteadas en los siguientes problemas tienen un crecimiento o decrecimiento exponencial.

- 1) El número de bacterias en el cultivo de una caja de Petri al cabo de t horas está dado por:

$$P(t) = 150e^{0.65t}$$

- ¿Cuál fue el número inicial de bacterias?
- ¿Cuál es la tasa de crecimiento de la población de bacterias?
- ¿Cuántas bacterias habrá transcurridas 10 horas?

- 2) La población mundial en el año 2006 era de 6.54 billones de personas y la tasa de crecimiento se estima en 0.02% por año. Si la población crece de acuerdo con el modelo $P(t) = P_0 e^{rt}$:
- ¿Qué función representa la población mundial transcurridos t años?
 - ¿Cuál será la población en el año 2025?
- 3) El conteo de cierta población de peces en un cultivo se inició en el año 2006 y en 2009 había una población de 192 870. Si la tasa de crecimiento de esa clase de peces es del 45% anual, ¿cuál fue la población con que se inició el conteo?
- 4) El cesio 137 se desintegra de acuerdo con el siguiente modelo exponencial: $m(t) = 25e^{-0.023105 \cdot t}$, donde t se mide en años y la masa en gramos.
- ¿Cuál es la tasa de desintegración radiactiva del cesio 137?
 - ¿Cuál es la masa inicial de la muestra?
 - ¿Después de 15 años cuál es la masa restante?
- 5) El estroncio 90 es un material radiactivo que se desintegra de acuerdo con la función $m(t) = m_0 e^{-0.02476 \cdot t}$, donde m_0 es la cantidad de estroncio, en mg, presente en la muestra inicial y t el tiempo medido en años. Si la masa inicial es de 500 mg;
- ¿Cuál es la tasa de desintegración radiactiva del estroncio 90?
 - ¿Cuánta masa queda después de 6 años?
 - ¿Transcurridos 12 años quedará la mitad de la masa que quedó después de 6 años?
- 6) La cantidad de carbono 14 presente en cierto material después de t años, está dada por la función: $m(t) = m_0 e^{-0.000121 \cdot t}$; un artefacto de madera encontrado en una tumba, 2 500 años después de elaborado, contiene 12 mg de carbono 14:

- a. ¿Cuál es la tasa de desintegración radiactiva del carbono 14?
 - b. ¿Cuántos mg de carbono 14 contenía inicialmente el artefacto encontrado?
- 7) La población de delfines rosados que habitan en una región del río Amazonas ha venido extinguiéndose a una tasa del 7% anual desde 1993. Se ha establecido que el modelo exponencial $P(t) = P_0 e^{-0.07 \cdot t}$ se ajusta al decrecimiento de la población de delfines. Si la población actual de delfines en dicha zona es de 1 500 delfines, ¿cuál era la población en 1993?
- 8) El yodo radiactivo se descompone a una tasa del 8.7% diaria. Si dicha sustancia se desintegra siguiendo un modelo exponencial, ¿cuánta masa quedará de una muestra de 34 g de yodo transcurridos 15 días?

3.6 LOGARITMOS

Para resolver un problema sobre interés compuesto como el siguiente:

Una suma de \$10 000 se invierte a una tasa del 8%, capitalizable anualmente. ¿En cuántos años se duplica el capital?

Planteamos la ecuación:

$$20\,000 = 10\,000(1 + 0.08)^t$$

Buscamos resolverla dividiendo los dos lados de la ecuación por 10 000 para transformarla en la ecuación equivalente:

$$2 = (1 + 0.08)^t$$

Notemos que en esta ecuación la incógnita se encuentra en el exponente.

¿Cómo resolvemos ecuaciones cuando la incógnita está en el exponente de uno de los términos?

En esta sección veremos un concepto que nos ayudará a resolver ecuaciones de esa clase.¹

Para empezar, consideremos la igualdad: $2^3 = 8$. Supongamos que se nos pide resolver la ecuación: $x^3 = 8$ (¿qué número elevado a la tres da como resultado 8?). La respuesta a dicha pregunta conduce a buscar la *raíz cúbica* de 8:

$$x = \sqrt[3]{8} = 2.$$

Así, preguntar por la base en una potencia conduce a preguntar por una raíz.

¹ La ecuación $2 = (1 + 0.08)^t$ se resolverá en la sección 3.8.

Formulemos ahora la ecuación: $2^x = 8$ (dos elevado a qué exponente da como resultado 8). La respuesta a esa pregunta conduce a buscar el *logaritmo en base 2 de 8*, simbolizado: $\log_2 8$. Por tanto,

$$\log_2 8 = 3, \text{ ya que } 2^3 = 8.$$

De modo que, *preguntar por el exponente en una potencia equivale a preguntar por un logaritmo.*

El logaritmo en base b de x , escrito $\log_b x$, es el exponente y al cual hay que elevar b para obtener x , $b^y = x$.

Ejemplo 1

Verificar los siguientes logaritmos:

$$1) \log_3 9 = 2 \quad 2) \log_{10} 1\,000 = 3 \quad 3) \log_5 5 = 1 \quad 4) \log_5 1 = 0$$

Solución

- 1) Es cierto que $\log_3 9 = 2$ ya que $3^2 = 9$
- 2) $\log_{10} 1\,000 = 3$, pues $10^3 = 1\,000$
- 3) $\log_5 5 = 1$, ya que $5^1 = 5$
- 4) $\log_5 1 = 0$, porque $5^0 = 1$

Una expresión como $\log_3 (-9)$ no tiene sentido en los números reales ya que 3 elevado a cualquier número da como resultado un número positivo (ver gráfica de la función $y = 3^x$); tampoco tienen sentido las expresiones $\log_1 9$ ni $\log_{-9} 3$ porque 1 elevado a cualquier número es siempre 1 y no existe número al cuál elevar -9 para que dé 3.

Los logaritmos no se definen para números negativos ni para bases negativas, cero, o uno.

$$\log_b x \text{ se define para } x > 0, \quad 0 < b < 1 \quad \text{o} \quad b > 1$$

De una expresión con una potencia podemos pasar a una expresión con logaritmo y viceversa. Por ejemplo, de $2^3 = 8$, pasamos a la *forma logarítmica* equivalente: $\log_2 8 = 3$; de $\log_3 81 = 4$, pasamos a la *forma exponencial* equivalente $3^4 = 81$.

Si $b > 0$, $b \neq 1$, entonces la *forma logarítmica* $\log_b x = y$ es equivalente a la *forma exponencial* $b^y = x$.

3.6.1 VALORES LOGARÍTMICOS ESPECIALES

Logaritmo	Justificación
$\log_b 1 = 0$	$b^0 = 1$
$\log_b b = 1$	$b^1 = b$
$\log_b b^x = x$	$b^x = b^x$

En las aplicaciones se usan con frecuencia logaritmos en dos bases particulares:²

- *Decimal o común*, cuya base es 10, el cual se acostumbra a representar sin escribir la base: $\log_{10} x = \log x$.
- *Natural*, cuya base es el número $e \approx 2.718281$, el cual se escribe: $\log_e x = \ln x$

$$\begin{aligned}\log_{10} x &= \log x \\ \log_e x &= \ln x\end{aligned}$$

² Las calculadoras traen la tecla *log* para evaluar los logaritmos cuya base es 10 y la tecla *ln* para los logaritmos naturales.

Ejemplo 2

Resolver las ecuaciones pasando a forma exponencial:

$$1) \log_x 729 = 6 \quad 2) \log_{\frac{2}{3}} x = -4 \quad 3) \log_{144} 12 = x$$

Solución

$$\begin{array}{lll} 1) \log_x 729 = 6 & 2) \log_{\frac{2}{3}} x = -4 & 3) \log_{144} 12 = x \\ x^6 = 729 & & 144^x = 12 \\ x^6 = 3^6 & \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = x & (12^2)^x = 12 \\ x = 3 & \left(\frac{3}{2}\right)^4 = x & 12^{2x} = 12^1 \\ & x = \frac{81}{16} & 2x = 1 \\ & & x = \frac{1}{2} \end{array}$$

EJERCICIOS

I. Escribe en forma exponencial las siguientes expresiones logarítmicas:

$$\begin{array}{ll} 1) \log_4 64 = 3 & 2) \log_{11} 1 = 0 \\ 3) \log_{\frac{1}{2}} 8 = -3 & 4) \log_7 7 = 1 \\ 5) \log_{81} 9 = \frac{1}{2} & 6) \log_{625} 5 = \frac{1}{4} \\ 7) \ln y = -3 & 8) \log 0.001 = -3 \\ 9) \log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{9}{4}\right) = -2 & 10) \ln\left(\frac{1}{e^2}\right) = -2 \end{array}$$

II. Escribe en forma logarítmica las siguientes expresiones exponenciales:

$$1) 2^7 = 128 \quad 2) 10^3 = 1000$$

3) $10^{-3} = 0.001$

4) $e^0 = 1$

5) $e^{-1} = \frac{1}{e}$

6) $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}$

7) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \frac{64}{27}$

8) $e^{-3} = \frac{1}{e^3}$

9) $4^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{8}$

10) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-2} = 81$

III. Utilice las propiedades correspondientes a “valores logarítmicos especiales” que se encuentran en el recuadro de la página anterior para calcular los siguientes logaritmos:

1) $\log_9 9$

2) $\log_7 1$

3) $\log_{11} 121$

4) $\log_6 36$

5) $\log_5 5^7$

6) $\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^4$

7) $\log_3 \frac{1}{81}$

8) $\log_{\frac{1}{2}} 16$

9) $\log_{64} 8$

10) $\log_{\frac{3}{4}} \left(\frac{64}{27}\right)$

IV. Resuelva cada ecuación pasando a la forma exponencial:

1) $\log_9 81 = x$

2) $\log_x 343 = 3$

3) $\log_5 x = 4$

4) $\log_2 \left(\frac{1}{2}\right) = x$

5) $\log_x 256 = 4$

6) $\log_8 x = 0$

7) $\log_{\frac{1}{2}} 4 = x$

8) $\log_{\frac{3}{2}} x = -3$

9) $\log_x 243 = -5$

10) $\log_x 6 = \frac{1}{3}$

3.6.2 LOGARITMOS DECIMALES

En la tabla 1 se muestran algunos logaritmos decimales de potencias de 10:

x	1	10	100	1 000	10 000	100 000	1000 000
$\log x$	0	1	2	3	4	5	6

Tabla 1

Consideremos ahora un número entero que no es potencia de diez, como por ejemplo 745; ya que el logaritmo decimal de un número va aumentando a medida que aumenta el número y como 745 se encuentra entre 100 y 1 000, el logaritmo de 745 es un número que se encuentra entre 2 y 3, o en otras palabras, la parte entera de $\log 745$ es 2 (compare con el resultado de la calculadora); un razonamiento similar nos dice que la parte entera de $\log 6\,021$ es 3.



La parte entera del logaritmo de un número entero se puede obtener *contando las cifras del número y restando 1*. Sin usar calculadora, halle la parte entera de los siguientes logaritmos: a) $\log 23\,539$, b) $\log 87$.



Si x es un número entero y usted sabe que $\log x = 7,213254\dots$, ¿cuántas cifras tiene x ?

3.6.3 PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS



El desarrollo de potencias que conducen a números grandes (de 10 cifras o más), es mostrado en las calculadoras en el modo de notación científica.

Utilice el resultado que le da la calculadora para indicar cuántas cifras tiene el desarrollo de las siguientes potencias: 2^{19} , 2^{63} , 2^{100} .

Podemos comprobar las limitaciones de una calculadora para desarrollar potencias como 2^{400} (emite el mensaje $-E-$ o Math Error). A pesar de esto, aún podemos calcular la cantidad de cifras de esa potencia utilizando una de las propiedades de los logaritmos que encontraremos a continuación.

La primera de las propiedades que veremos está asociada con la manera de multiplicar dos números como los que se encuentran en la primera fila de la tabla 2:

x	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096
$\log_2 x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Tabla 2

Para multiplicar 16 y 128, por ejemplo, se toma el número de la segunda fila que se encuentra en la columna donde está el 16, o sea el 4 y se suma con el número 7 que se encuentra en la columna donde está el 128, para obtener 11. Se busca el 11 en la segunda fila y el número que se encuentra en la misma columna, el 2 048, es el resultado de la multiplicación como puede verificarlo con una calculadora.



Repita el procedimiento anterior para multiplicar 64 por 16 y verifique con la calculadora.



Antes de continuar la lectura, intente explicar porqué funciona el procedimiento anterior.

Volvamos a la multiplicación del 16 y el 128. Si los escribimos como potencias de 2 tenemos: $16 = 2^4$, $128 = 2^7$. De modo que multiplicar 16 y 128 es lo mismo que multiplicar $2^4 \cdot 2^7$, cuyo resultado, por la propiedad de la multiplicación de potencias de la misma base, se obtiene dejando la base y sumando los exponentes; luego $2^4 \cdot 2^7 = 2^{4+7} = 2^{11}$. Y como el número 2048 es igual a 2^{11} , estaremos advirtiendo porqué funciona el método de la tabla 2. Notemos cómo *se transforman las multiplicaciones en sumas* las cuales son más fáciles de hacer.

Debido a que los logaritmos son exponentes, sus propiedades pueden derivarse de las propiedades de los exponentes:

$$\log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$$

El logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos de los factores.

Ejemplo 2

Verificar que:

$$1) \log_2 (8 \cdot 512) = \log_2 8 + \log_2 512 \quad 2) \log (100 \cdot 1\,000) = \log 100 + \log 1\,000$$

Solución

$$1) \log_2 (8 \cdot 512) = \log_2 8 + \log_2 512 \quad (\text{ver tabla 2})$$

$$\log_2 (8 \cdot 512) = \log_2 (4096) = 12$$

$$\log_2 8 + \log_2 512 = 3 + 9 = 12$$

$$\text{Por lo tanto, } \log_2 (8 \cdot 512) = \log_2 8 + \log_2 512.$$

$$2) \log (100 \cdot 1\,000) = \log 100 + \log 1\,000 \quad (\text{verifique con la calculadora})$$

$$\log (100 \cdot 1\,000) = \log 100\,000 = 5$$

$$\log 100 + \log 1\,000 = 2 + 3 = 5$$

$$\text{Por lo tanto, } \log (100 \cdot 1\,000) = \log 100 + \log 1\,000.$$

Recordemos que el cociente de potencias de la misma base se encuentra restando los exponentes. La propiedad para el logaritmo de un cociente es similar:

$$\log_b \left(\frac{x}{y} \right) = \log_b x - \log_b y$$

El logaritmo de un cociente es la diferencia entre el logaritmo del numerador y el logaritmo del denominador.

Ejemplo 3

Verificar que:

- 1) $\log_2 (32 \div 4) = \log_2 32 - \log_2 4$
- 2) $\log(1\,000 \div 10) = \log 1\,000 - \log 10$

Solución

$$\begin{aligned} 1) \quad \log_2 (32 \div 4) &= \log_2 32 - \log_2 4 \\ \log_2 (32 \div 4) &= \log_2 8 = 3 \end{aligned}$$

También se tiene, $\log_2 32 = 5$, y $\log_2 4 = 2$, entonces:

$$\log_2 32 - \log_2 4 = 5 - 2 = 3$$

Por lo tanto, $\log_2 (32 \div 4) = \log_2 32 - \log_2 4$.

$$\begin{aligned} 2) \quad \log(1\,000 \div 10) &= \log 1\,000 - \log 10 \\ \log(1\,000 \div 10) &= \log 100 = 2 \\ \log 1\,000 - \log 10 &= 3 - 1 = 2 \end{aligned}$$

Entonces, $\log(1\,000 \div 10) = \log 1\,000 - \log 10$.

La propiedad logarítmica correspondiente a una potencia de potencia: $(a^m)^n = a^{mn}$ es:

$$\log_b x^c = c \log_b x$$

El logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base.

Ejemplo 4

Expresar los siguientes logaritmos como productos y simplificar:

1) $\log_2 8^5$

2) $\log_2 \sqrt[3]{64}$

3) $\log 10^3$

Solución

1) $\log_2 8^5 = 5 \log_2 8 = 5 \log_2 2^3 = 15 \log_2 2 = 15$

2) $\log_2 \sqrt[3]{64} = \log_2 (64^{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{3} \log_2 2^6 = \frac{6}{3} \log_2 2 = 2$

3) $\log 10^3 = 3 \log 10 = 3 \cdot 1 = 3$

Ejemplo 5

Usar las propiedades de los logaritmos para expandir cada expresión logarítmica:

1) $\log_7 (49y)$

2) $\ln \left(\frac{\sqrt{x}}{x-3} \right)$

3) $\log \left(\frac{x^4}{5y} \right)$

Solución

$$\begin{aligned} 1) \log_7 (49y) &= \log_7 49 + \log_7 y \\ &= \log_7 7^2 + \log_7 y \\ &= 2 \log_7 7 + \log_7 y \\ &= 2 + \log_7 y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \ln\left(\frac{\sqrt{x}}{x-3}\right) &= \ln\sqrt{x} - \ln(x-3) \\ &= \ln x^{\frac{1}{2}} - \ln(x-3) \\ &= \frac{1}{2}\ln x - \ln(x-3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad \log\left(\frac{x^4}{5y}\right) &= \log x^4 - \log 5y \\ &= 4\log x - (\log 5 + \log y) \\ &= 4\log x - \log y - \log 5 \end{aligned}$$



Utilice las propiedades de los logaritmos para expandir cada expresión logarítmica.

$$1) \log(625x^3)$$

$$2) \ln\left(\frac{y+1}{e^7}\right)$$

$$3) \log_6(6^x 36^y)$$

Ejemplo 6

Usar las propiedades de los logaritmos para escribir cada expresión como un solo logaritmo:

$$1) \log x + \log 4$$

$$2) 3(\ln y - 2 \ln z)$$

$$3) 5 \log_3 x + \frac{1}{2} \log_3 y$$

Solución

$$1) \log x + \log 4 = \log 4x$$

$$\begin{aligned} 2) \quad 3(\ln y - 2 \ln z) &= 3 \ln y - 6 \ln z \\ &= \ln y^3 - \ln z^6 \\ &= \ln\left(\frac{y^3}{z^6}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad 5 \log_3 x + \frac{1}{2} \log_3 y &= \log_3 x^5 + \log_3 y^{\frac{1}{2}} \\ &= \log_3 (x^5 \sqrt{y}) \end{aligned}$$

Las calculadoras traen teclas para hallar logaritmos decimales y naturales. Para las demás bases los cálculos se hacen utilizando la siguiente propiedad:

Cambio de base:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Ejemplo 7

Con la propiedad del cambio de base y una calculadora, hallar:

1) $\log_2 8$

2) $\log_3 81$

3) $\log_7 120$

4) $\log_{\frac{1}{2}} 75$

Solución

1) Cambiamos a la base diez:

$$\log_2 8 = \frac{\log 8}{\log 2} = \frac{0.9030}{0.3010} = 3$$

Al mismo resultado se hubiera llegado cambiando a la base e :

$$\log_2 8 = \frac{\ln 8}{\ln 2} = \frac{2.0793}{0.6931} = 3$$

2) $\log_3 81 = \frac{\log 81}{\log 3} = \frac{1.9084}{0.4771} = 4$

$$3) \log_7 120 = \frac{\log 120}{\log 7} = \frac{2.07918}{0.84509} \approx 2.46028$$

$$4) \log_{\frac{1}{2}} 75 = \frac{\log 75}{\log \frac{1}{2}} = \frac{1.87506}{-0.30103} \approx -6.22882$$

EJERCICIOS

- I. Use las propiedades de los logaritmos para determinar cuántas cifras tiene el desarrollo de la potencia 2^{400} .
- II. Use las propiedades de los logaritmos para escribir cada expresión dada, sin que aparezcan productos, divisiones o potencias. Donde sea posible evalúe los logaritmos sin usar la calculadora.

1) $\log_8 (8x)$

2) $\log_4 (64z)$

3) $\log_3 (243y^3)$

4) $\log_6 (6^x 12^y)$

5) $\log_2 (4^3 8^{12})$

6) $\ln \left(\frac{e^3}{7} \right)$

7) $\log \left(\frac{1000}{x} \right)$

8) $\log_2 \left(\frac{3x}{12y} \right)$

9) $\log_b (x^2 yz)$

10) $\log_b (xy^2)^3$

11) $\ln \sqrt{x(x+2)}$

12) $\log \left(\frac{x^3 y^2}{z^4} \right)$

13) $\log_7 \left(\frac{\sqrt{x}}{49} \right)$

14) $\log_5 \left(\frac{25}{\sqrt{y-2}} \right)$

15) $\log \left(\frac{x^3 \sqrt{y}}{z^4} \right)$

16) $\log \sqrt[4]{\frac{xy^3}{8}}$

17) $\log \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$

III. Use las propiedades de los logaritmos para expresar como un solo logaritmo cada expresión dada. Donde sea posible evalúe los logaritmos sin usar la calculadora.

1) $\log x + \log 4$

2) $\log 20 + \log 5$

3) $\frac{1}{2}(\log_2 64 - \log_2 256)$

4) $3(\ln x + \ln y + \ln z)$

5) $\frac{1}{2} \log_7 49 + 5 \log_7 x$

6) $2 \log_2 (x+3)$

7) $3 \ln x + 2 \ln y - 5 \ln z$

8) $\ln y - 4 \ln(y - 1)$

9) $\log(x - 3) + \log(x + 3)$

10) $9 \log_3 \sqrt[3]{x} - \log_3 27x^2 + \log_3 27$

11) $\ln(x^2 - x - 2) - \ln(x - 2)$

12) $\log_b x + \log_b(x - 2) - \log_b(x^2 + 2x)$

IV. Con la calculadora, evalúe:

1) $\log_{12} 106$

2) $\log_{\pi} 253$

3) $\log_7 \frac{3}{4}$

4) $\log_{\frac{2}{5}} 865$

5) $\log_{0.7} 0.25$

6) $\log_{65} 0.8$

V. Muestre con ejemplos que cada una de las siguientes proposiciones es falsa:

1) $\log_b(M + N) = \log_b M + \log_b N$

2) $\log_b(M - N) = \log_b M - \log_b N$

3) $\log_b(M \cdot N) = \log_b M \cdot \log_b N$

$$4) \log_b \left(\frac{M}{N} \right) = \frac{\log_b M}{\log_b N}$$

$$5) \frac{\log_b M}{\log_b N} = \log_b M - \log_b N$$

VI. ¿A qué número entero equivale la expresión $\log_{\sqrt{a}} a^2$?

VII. Muestre si es verdadera o falsa la siguiente proposición: $\log_{\sqrt{n}} \sqrt{m} = \frac{\log m}{\log n}$

3.7 FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Vimos que la función exponencial $f(x) = 2^x$ es uno a uno; por tanto, tiene inversa. Recordemos el proceso para hallar la inversa:

escribimos y en lugar de $f(x)$: $y = 2^x$

intercambiamos la x y la y : $x = 2^y$

despejamos la y ; para eso pasamos de la forma exponencial a la logarítmica:

$$\log_2 x = y$$

La función inversa de f es entonces: $f^{-1}(x) = \log_2 x$; esta es una *función logarítmica en base 2*.

En la figura 1 se muestra la gráfica de f^{-1} la cual obtenemos reflejando la gráfica de f en la recta $y = x$; observemos que la gráfica tiene ahora una *asíntota vertical*.

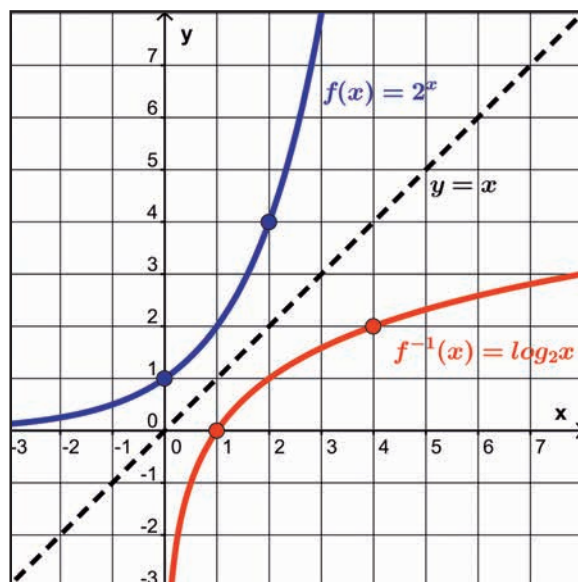


Figura 1



Para la función $y = \log_2 x$, determine dominio, rango (compare con el dominio y rango de $y = 2^x$), interceptos con los ejes e intervalos donde crece o decrece.

Para a positivo, diferente de 1,

$y = \log_a x$ significa: $a^y = x$

$y = \log_a x$ es la función logarítmica en base a .

En las figuras 2 y 3 se muestran las gráficas de varias funciones logarítmicas.

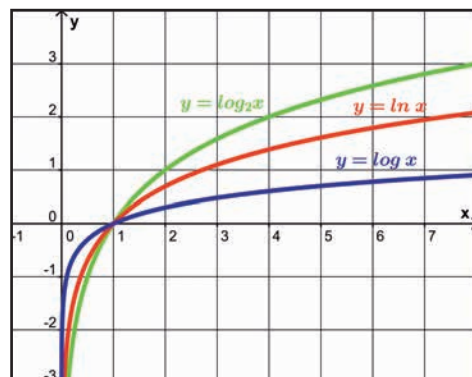


Figura 2



Describe características de las funciones que se muestran en la figura 2.

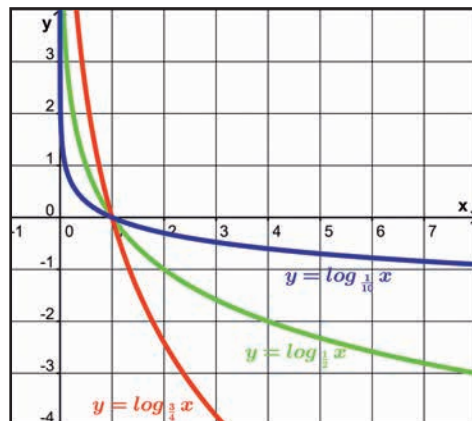


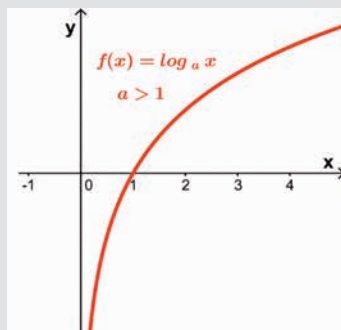
Figura 3



Describe características de las funciones que se muestran en la figura 3.

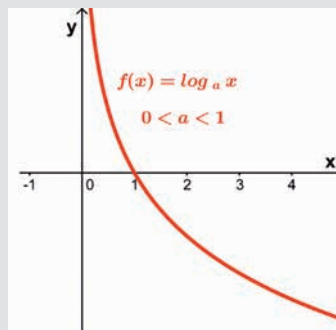
La gráfica de una función *logarítmica*, $f(x) = \log_b x$, tiene una de estas dos formas:

si $a > 1$:



Creciente

si $0 < a < 1$:



Decreciente

Dominio: los reales positivos.

Rango: los números reales.

El eje y es una asíntota vertical.

Intercepto con el eje x : $(1, 0)$.

Como la inversa de la función $f(x) = \log_a x$ es $f^{-1}(x) = a^x$, y puesto que:
 $(f \circ f^{-1})(x) = x$, $(f^{-1} \circ f)(x) = x$, tenemos las *propiedades de las inversas*:

$$\log_a a^x = x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$a^{\log_a a^x} = a^x \quad x \in (0, \infty)$$

Ejemplo

Evaluar las siguientes expresiones usando las propiedades de las inversas:

a) $10^{\log 7}$ b) $\log_2 8^5$

Solución

a) $10^{\log 7} = 10^{\log_{10} 7} = 7$

b) $\log_2 8^5 = \log_2 (2^3)^5 = \log_2 2^{15} = 15$

EJERCICIOS

I. Evaluar las siguientes expresiones usando las propiedades de las inversas:

1) $10^{\log 45}$ 2) $2^{\log_2 2^7}$ 3) $e^{\ln 346}$ 4) $3^{\log_3 3^4}$

5) $\log_6 1296$ 6) $\ln e^3$ 7) $\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{32} \right)$ 8) $\log \sqrt{10}$

II. Dadas las funciones logarítmicas:

$f_1(x) = \log_2 x$ ()

$f_2(x) = -\log_2 x$ ()

$f_3(x) = -1 + \log_2(-x)$ ()

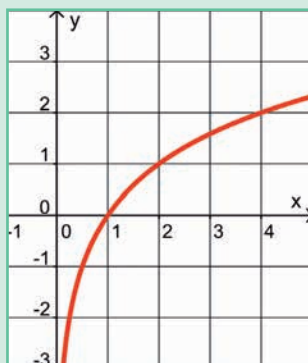
$f_4(x) = \frac{1}{2} \log_2(x+3)$ ()

$f_5(x) = \log_2 x + 2$ ()

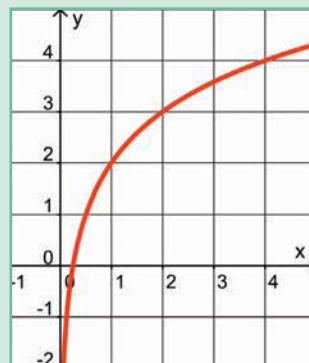
$f_6(x) = -\log_2(x-1)$ ()

forme la pareja con la gráfica correspondiente entre las que aparecen a continuación:

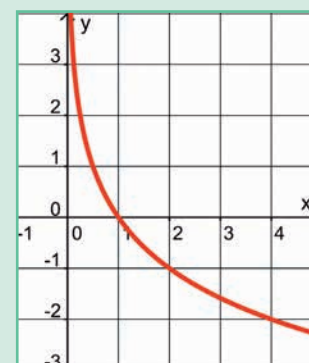
A.



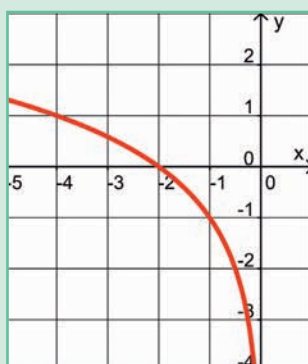
B.



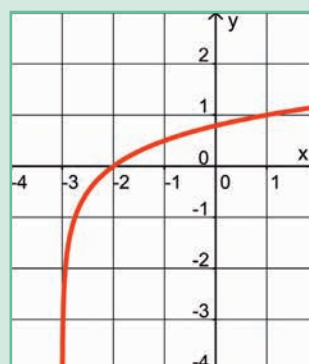
C.



D.



E.



F.

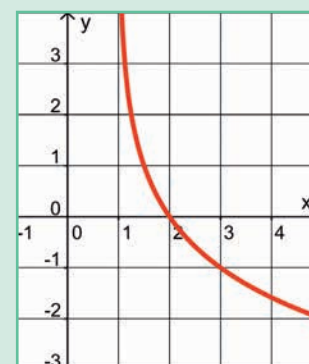


Figura 4

3.8 ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Ecuaciones como $20\,000 = 10\,000(1 + 0.08)^t$, encontrada al comienzo de la sección 3.6, con la incógnita en el exponente, se resuelven con las propiedades de los exponentes y los logaritmos.

Ejemplo 1

Resolver la ecuación $2^x = 32$.

Solución 1

- Escribimos como potencia a $32 = 2^5$, comparamos las dos potencias y obtenemos la solución:

$$2^x = 32$$

$$2^x = 2^5$$

Igualando los exponentes llegamos a que $x = 5$.

Solución 2

- Sacamos logaritmo, en la misma base, a cada lado de la ecuación (cualquier base sirve pero usualmente empleamos la decimal o la natural por ser las más familiares) y aplicamos propiedades de los logaritmos para despejar la incógnita:

$$\begin{aligned}2^x &= 32 \\ \log 2^x &= \log 32 \\ x \log 2 &= \log 32 \\ x &= \frac{\log 32}{\log 2} = \frac{1.505150}{0.301030} \\ x &= 5\end{aligned}$$



Verifique que se llega al mismo resultado cuando se resuelve la ecuación del ejemplo 1 utilizando logaritmo natural.

Ejemplo 2

Resolver $5^{x+2} = 7$.

Solución

$$\begin{aligned}5^{x+2} &= 7 \\ \log 5^{x+2} &= \log 7 \\ (x+2) \log 5 &= \log 7 \\ x &= \frac{\log 7}{\log 5} - 2 \\ x &= -0.7909\end{aligned}$$

La ecuación tiene como solución $x = -0.7909$.

Ejemplo 3

Resolver la ecuación $20\,000 = 10\,000(1 + 0.08)^t$ (ver problema inicial sección 3.6).

Solución

$$\begin{aligned}20\,000 &= 10\,000(1 + 0.08)^t \\ \frac{20\,000}{10\,000} &= (1.08)^t \\ 2 &= (1.08)^t \\ \log 2 &= \log(1.08)^t \\ \log 2 &= t \cdot \log 1.08 \\ \frac{\log 2}{\log 1.08} &= t \\ t &= 9\end{aligned}$$

Por lo tanto, el capital se duplica transcurridos 9 años.

Veamos ahora ecuaciones en las cuales la variable hace parte de una expresión que contiene logaritmos:

Ejemplo 4

Resolver: $\log(3x + 7) = 2$.

Solución

$$\begin{aligned}\log(3x + 7) &= 2 \\ 10^2 &= 3x + 7 && \text{(pasamos a la forma exponencial)} \\ 100 - 7 &= 3x && \text{(reunimos términos semejantes)} \\ x = \frac{93}{3} &= 31 && \text{(despejamos la incógnita)}\end{aligned}$$

La ecuación $\log(3x + 7) = 2$ tiene como solución $x = 31$.

Ejemplo 5

Resolver: $\log(x - 5) + \log(x - 2) = 1$.

Solución

$$\begin{aligned} \log(x - 5) + \log(x - 2) &= 1 \\ \log[(x - 5)(x - 2)] &= 1 && \text{(propiedad del producto de los logaritmos)} \\ \log(x^2 - 7x + 10) &= 1 && \text{(efectuamos el producto indicado)} \\ 10^1 &= x^2 - 7x + 10 && \text{(pasamos a la forma exponencial)} \\ x^2 - 7x &= 0 && \text{(simplificamos términos semejantes)} \\ x(x - 7) &= 0 && \text{(factorizamos)} \\ x = 0 \quad \text{o} \quad x = 7 &&& \text{(encontramos las soluciones de la ecuación } x^2 - 7x = 0) \end{aligned}$$

Por último, verificamos que al sustituir estas soluciones en la ecuación dada, $\log(x - 5) + \log(x - 2) = 1$, no aparezcan logaritmos de números negativos (los logaritmos no se definen para números negativos).

Al sustituir $x = 0$ obtenemos:

$$\log(0 - 5) + \log(0 - 2) = \log(-5) + \log(-2)$$

como aparecen logaritmos de números negativos, descartamos $x = 0$ como solución.

Al sustituir $x = 7$, nos da:

$$\log(7 - 5) + \log(7 - 2) = \log 2 + \log 5$$

Como no aparecen logaritmos de números negativos, concluimos que $x = 7$ es la solución de la ecuación.

Ejemplo 6

Resolver $\log_3(x + 6) - \log_3(2x - 3) = 1$.

Solución

$$\begin{aligned} \log_3(x + 6) - \log_3(2x - 3) &= 1 \\ \log_3 \frac{x + 6}{2x - 3} &= 1 \end{aligned}$$

$$3^1 = \frac{x+6}{2x-3}$$

$$3(2x-3) = x+6$$

$$6x-9 = x+6$$

$$5x = 15$$

$$x = 3$$

Verificamos la solución, reemplazando en la ecuación inicial

$$\log_3(3+6) - \log_3(2 \cdot 3 - 3)$$

$$= \log_3 9 - \log_3 3$$

$$= \log_3 \frac{9}{3}$$

$$= \log_3 3 = 1$$

La solución de la ecuación sí es $x = 3$.

EJERCICIOS

I. Resuelva las siguientes ecuaciones exponenciales; verifique la solución:

1) $-3e^{4x} + 11 = 2$

2) $1 - \frac{1}{3}e^{5x} = -5$

3) $3^{2-x} = 9^{2x+1}$

4) $5^{3x+2} = 7^{4x}$

5) $e^{2x+5} = 250$

6) $3(2 + 10^{3x}) = 90$

7) $1.25^{5-x} = 240$

8) $225(2.5)^{4x} = 900$

9) $\frac{12}{3+e^{-x}} = 2$

II. Resuelva las siguientes ecuaciones logarítmicas; verifique que lo obtenido sí es solución de la ecuación original.

1) $\log_7(2x+3) = 2$

2) $\log_5 254 = x$

3) $\log_{\frac{3}{2}} 124 = 5x$

4) $\ln(3-x) = 6$

5) $\log(6-5x) = 1$

6) $\log_7(x^2-9) = 1$

$$7) \log_2 (x - 2) + \log_2 x = 3 \qquad 8) \log_3 (y - 1) + \log_3 y = \log_3 12$$

$$9) \log(x - 2) - \log(x + 1) = 1 \qquad 10) \log_4 (x + 5) - \log_4 x = \log_4 6$$

$$11) 2 \log x = \log 2 + \log(12 - x) \qquad 12) \ln(x + 2) - \ln(x - 3) = \ln 7$$

$$13) \log_7 (m - 3) + \log_7 (m + 3) = \log_7 16$$

III. Dadas las funciones $f(x) = \log_2 (x - 1)$ y $g(x) = \log_2 (3x + 1)$, resolver las siguientes ecuaciones:

$$1) f(x) = 3 \qquad 2) g(x) = 4 \qquad 3) f(x) = g(x)$$

$$4) f(x) + g(x) = 7 \qquad 5) f(x) - g(x) = 2$$

IV. Resuelva los siguientes problemas:

- 1) En cuánto tiempo se triplicará una suma de \$185 000, si la tasa de interés es del 7.5% anual, capitalizable continuamente?
- 2) ¿A qué tasa de interés anual capitalizable mensualmente, se invirtió una suma de \$ 1 750 000, si al cabo de 4 años se recibieron \$2 600 000?
- 3) Calcule el tiempo requerido para que una inversión de \$5 600 000 aumente a \$9 650 000, si la tasa de interés es del 9.4% anual, capitalizable cada semestre.
- 4) Al cabo de 2 años de ahorrar \$3 850 000, a una tasa de interés capitalizable trimestralmente, se recibieron \$5 460 000; ¿cuál fue la tasa de interés?
- 5) Se quieren invertir \$2 000 000 en títulos de ahorro que producen una tasa de interés anual del 8.75%, capitalizable cada mes. ¿Qué período de tiempo debe permanecer el dinero en el título a fin de ahorrar \$4 850 000?
- 6) Calcule el rendimiento porcentual anual para una inversión que gana 7.5% por año, capitalizable de manera continua.
- 7) Calcule el rendimiento porcentual anual para una inversión que gana 6.5% por año, capitalizable semestralmente.

3.9 OTROS MODELOS CON FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

En las secciones 3.3 a 3.5 vimos cómo se puede modelar interés compuesto, dinámica de poblaciones y desintegración radiactiva con funciones exponenciales. En esta sección retomaremos esos modelos y veremos otros que ilustran la variedad de situaciones en las que se utilizan funciones exponenciales y logarítmicas como modelos matemáticos. Lo estudiado en las secciones 3.6 a 3.8 nos permite resolver las ecuaciones que surgen en esos contextos.

3.9.1 DINÁMICA DE POBLACIONES (SEGUNDA PARTE)

Volvamos al ejemplo 3 de la sección 3.3. Allí llegábamos a la ecuación:

$$2 = 1.015^t$$

Esta ecuación la podemos resolver como se hizo en el ejemplo 1 de la sección 3.8; sacando logaritmos a ambos lados de la ecuación:

$$\log 2 = \log(1.015)^t$$

En el lado derecho de la ecuación aplicamos la propiedad del logaritmo de una potencia:

$$\log 2 = t \cdot \log(1.015)$$

Aplicamos el inverso multiplicativo de $\log(1.015)$ para obtener:

$$\frac{\log 2}{\log(1.015)} = t$$

$$t = 46.55 \text{ trimestres}$$

Por lo tanto, el tiempo que se requiere para que el capital se duplique es de 11.64 años.

Ejemplo 1

Se ha aproximado la población de una ciudad con el modelo $P(t) = 45000e^{0.035t}$, donde t es el número de años a partir del año 2000. Según el modelo, ¿cuándo la población será de 70 000 habitantes?

Solución

$P(t) = 70\,000$, remplazamos en el modelo y hallamos el valor de t :

$$70\,000 = 45\,000e^{0.035t}$$

$$\frac{70\,000}{45\,000} = e^{0.035t}$$

$$\ln\left(\frac{14}{9}\right) = \ln e^{0.035t}$$

$$\ln\left(\frac{14}{9}\right) = 0.035t \ln e$$

$$\ln\left(\frac{14}{9}\right) = 0.035t$$

$$\frac{\ln\left(\frac{14}{9}\right)}{0.035} = t$$

$$t \approx 12.62$$

Según el modelo, dentro de aproximadamente 12.62 años la población será de 70 000 personas.



La población de perros en cierta ciudad crece de manera exponencial. La población inicial, en el año 2002, era de 550 y en el año 2010 había 2 322 perros.

- ¿Cuál es la tasa de crecimiento anual de esta población?
- Determine la población de perros prevista para el año 2014.

3.9.2 DESINTEGRACIÓN RADIATIVA (SEGUNDA PARTE)

En la sección 3.5.2 vimos que algunas sustancias se desintegran con una tasa r que es proporcional a la cantidad de sustancia m que queda cuando el tiempo es t (llamadas sustancias radiactivas). En estos casos, se modela m con la función:

$$m(t) = m_0 e^{rt}, r \leq 0$$

Las sustancias radiactivas tienen una **vida media** específica, la cual es el tiempo que transcurre para que la masa de esa sustancia se desintegre a la mitad. En los ejemplos y problemas que siguen consideraremos sustancias que obedecen a este tipo de modelo.

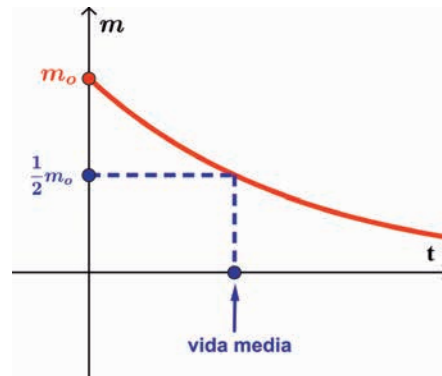


Figura 1

Ejemplo 2

El estroncio 90 tiene una vida media de 28 años. ¿Cuánto tiempo le toma a 34 gramos de este isótopo reducirse a una masa de 6 gramos?

Solución

La vida media del estroncio 90 es de 28 años, es decir, una masa cualquiera de dicho elemento tarda 28 años en desintegrarse a la mitad; por ejemplo 34 gramos de estroncio 90 tardan 28 años en convertirse en 17 gramos.

Tomamos: $m_0 = 34$, $m(28) = 17$, $t = 28$ en el modelo y hallamos la tasa de desintegración radiactiva r :

$$m(t) = m_0 e^{rt}$$

$$17 = 34e^{r \cdot 28}$$

$$\frac{17}{34} = e^{r \cdot 28}$$

$$\ln\left(\frac{17}{34}\right) = \ln e^{r \cdot 28}$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = r \cdot 28 \ln e$$

$$\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{28} = r$$

$$r = -0.02476$$

La tasa de desintegración radiactiva del estroncio 90 es de 2.476% anual.

Hallamos el tiempo que tarda el material en reducirse a 6 gramos.

Remplazamos: $m_0 = 34$, $m(t) = 6$, $r = -0.02476$

$$6 = 34e^{-0.02476t}$$

$$\frac{6}{34} = e^{-0.02476t}$$

$$\ln\left(\frac{6}{34}\right) = \ln e^{-0.02476t}$$

$$\ln\left(\frac{3}{17}\right) = -0.02476t \ln e$$

$$\frac{\ln\left(\frac{3}{17}\right)}{-0.02476} = t$$

$$t \approx 70.1$$

La muestra de 34 gm de estroncio 90 tarda aproximadamente 70.1 años en reducirse a 6 gramos.



La vida media del uranio es de 2.7×10^5 años. Si el uranio se desintegra exponencialmente y se tiene una muestra de 45 gramos, determine la cantidad que queda después de 5 000 años.

3.9.3 LEY DEL ENFRIAMIENTO DE NEWTON

La temperatura T de una taza de café caliente va disminuyendo con el tiempo t , de manera exponencial, acercándose cada vez más a la temperatura del medio ambiente (T_m). En la figura 1 se muestra la gráfica de T para una situación particular:

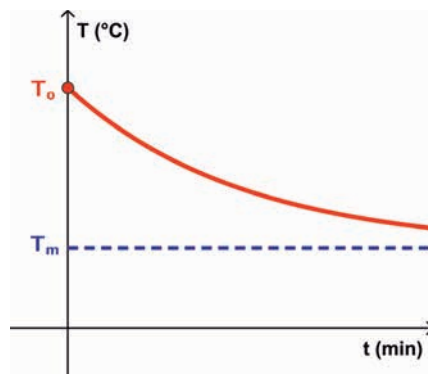


Figura 2

La ley del enfriamiento de Newton permite modelar la temperatura mediante la función:

$$T(t) = T_m + (T_o - T_m) e^{kt}$$

donde:

T_m es la temperatura constante del medio ambiente.

T_o es la temperatura inicial del objeto.

k es una constante negativa.

$T(t)$ es la temperatura en el tiempo t .

Ejemplo 3

La temperatura del motor de un automóvil en ciertas competencias es de 93°C . Cuando se apaga el motor, este se enfría de acuerdo con la ley del enfriamiento de Newton. La constante k de enfriamiento para los motores de ese tipo es $k = -0.0341$, donde el tiempo se mide en minutos. Encuentre el tiempo necesario para que el motor se enfríe a 38°C , si la temperatura ambiente es de 24°C .

Solución

$T_m = 24$, $T_o = 93$, $k = -0.0341$, $T(t) = 38$. Remplazamos en la función

$T(t) = T_m + (T_o - T_m) e^{kt}$ y despejamos t :

$$38 = 24 + (93 - 24)e^{-0.0341t}$$

$$\frac{38 - 24}{93 - 24} = e^{-0.0341t}$$

$$\ln 0.2 = \ln e^{-0.0341t}$$

$$\frac{\ln 0.2}{-0.0341} = t$$

$$t \approx 47.2$$

Se necesita que transcurran aproximadamente 47.2 minutos para que el motor se enfríe a 38°C .



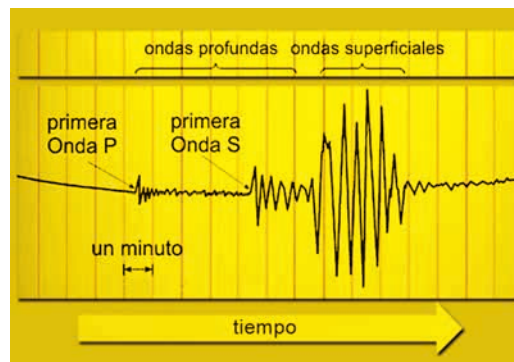
De un horno que se encuentra a una temperatura de 176.5°C se saca un pavo a un ambiente que se encuentra a una temperatura de 24°C . Un minuto después se mide la temperatura del pavo la cual resulta ser de 140°C . ¿Cuál es la temperatura del pavo 7 minutos después?

3.9.4 ESCALAS LOGARÍTMICAS

En las mediciones de la intensidad de los terremotos, la acidez de una sustancia, la intensidad de los sonidos, la intensidad de la luz, o la radiación, entre otros, las cantidades varían en rangos muy amplios. Utilizar el logaritmo, en base 10, de esas cantidades permite trabajar con escalas (*escalas logarítmicas*) en las que se tiene un conjunto más manejable de números.

3.9.4.1 ESCALA DE RICHTER

Una forma de cuantificar la magnitud de un terremoto es por medio de una escala logarítmica desarrollada en la década de 1930 por el sismólogo norteamericano Charles Richter (1900-1985) utilizando las ondas registradas en un aparato llamado sismógrafo:



Richter definió la magnitud M de un terremoto como:

$$M = \log\left(\frac{I}{S}\right)$$

donde I es la intensidad del terremoto (medida según la amplitud de una lectura de sismógrafo tomada a 100 km del epicentro del terremoto) y S es la intensidad de un terremoto “estándar”, de cierta magnitud (pequeña). Se considera que los sismos de magnitud 6 o mayores son potencialmente destructivos. La magnitud de un terremoto estándar es:

$$M = \log\left(\frac{S}{S}\right) = \log 1 = 0$$

Ejemplo 4

El sismo del 26 de diciembre de 2004 al norte de Sumatra, que produjo un tsunami causante de 200 000 muertes, se clasificó como de 9.2 en la escala de Richter. El 28 de marzo de 2005 se produjo una réplica en la misma zona, clasificada como de 8.5 en la escala de Richter. ¿Cuántas veces fue más intenso el sismo de 2004?

Solución

$$9.2 = \log\left(\frac{I}{S}\right)_{2004} \qquad 8.5 = \log\left(\frac{I}{S}\right)_{2005}$$

Escrito en forma exponencial:

$$\left(\frac{I}{S}\right)_{2004} = 10^{9.2} \qquad \left(\frac{I}{S}\right)_{2005} = 10^{8.5}$$

Podemos expresar $9.2 = 8.5 + 0.7$; utilizando las leyes de los exponentes tenemos:

$$\left(\frac{I}{S}\right)_{2004} = 10^{9.2} = 10^{0.7} 10^{8.5} = 10^{0.7} \left(\frac{I}{S}\right)_{2005} \approx 5.01 \left(\frac{I}{S}\right)_{2005}$$

Por lo tanto el sismo del año 2004 fue aproximadamente 5 veces más intenso que la réplica de 2005.



El sismo en la Ciudad de México tuvo una intensidad de 8.1 en la escala de Richter. La intensidad del sismo en la ciudad de Tangshan, en China, fue 1.26 veces el de Ciudad de México. ¿Cuál fue la magnitud del sismo de Tangshan?

3.9.4.2 ESCALA DEL pH

El nivel de pH de una sustancia mide su acidez. Un pH bajo indica una *solución ácida* mientras que un pH alto indica una *solución básica*. Una sustancia con un pH de 7 se define como *neutra*; aquellas que tienen un $\text{pH} < 7$ se consideran *ácidas* y las que tienen un $\text{pH} > 7$ son *básicas*. Se considera que el agua no contaminada tiene un pH de 7, por tanto es una sustancia *neutra*. El nivel de pH de algunas sustancias está dado en el siguiente cuadro:

Acidez de algunas sustancias	
Sustancia	nivel de pH
Ácido de una batería	1.0
Lima	1.3 – 2.0
Naranja	3.0 – 4.0
Tomate	4.1 – 4.4
Leche de vaca	6.4 – 6.8
Galleta	7.0 – 8.5
Sangre humana	7.3 – 7.5
Agua de mar	8.0 – 8.4
Leche de magnesia	10.5

El nivel de pH de una sustancia está por:

$$\text{pH} = -\log[H^+] \quad (1)$$

donde $[H^+]$ es la concentración del ion **hidronio** medida en moles por litro (M).

Ejemplo 5

La concentración del ion hidronio en quesos varía entre $3.8 \times 10^{-7} \text{ M}$ y $1.7 \times 10^{-4} \text{ M}$. Encuentre el intervalo correspondiente de nivel de pH.

Solución

La acidez para $[H^+] = 3.8 \times 10^{-7}$, es $pH = -\log(3.8 \times 10^{-7}) = 6.4$

La acidez para $[H^+] = 1.7 \times 10^{-4}$, es $pH = -\log(1.7 \times 10^{-4}) = 3.8$

Por lo tanto el intervalo de acidez de los quesos está entre 3.8 y 6.4.

Ejemplo 6

El pH de la cerveza es 4.6 y el del vinagre es 3.0. Halle la concentración del ion hidronio en cada sustancia y compare los resultados.

Solución

Despejamos $[H^+]$ en la ecuación (1) y tenemos:

$$[H^+] = 10^{-pH}$$

Remplazamos el pH de cada sustancia y obtenemos:

La concentración del ion hidronio de la cerveza es:

$$[H^+] = 10^{-4.6} = 2.5 \times 10^{-5} \text{ M}$$

La concentración del ion hidronio del vinagre es:

$$[H^+] = 10^{-3.0} = 1 \times 10^{-3} \text{ M}$$

Observe que cuando se incrementa el pH en una unidad, $[H^+]$ disminuye por un factor de 10.



Determine cuántas veces es más ácida la primera sustancia que la segunda:

Jugo de limón: pH = 2.3

vinagre: vinagre: pH = 3.3.

PROBLEMAS

En los problemas 1 a 8 asuma que las poblaciones respectivas crecen exponencialmente según el modelo $P(t) = P_0 e^{rt}$.

- 1) La población de cierta ciudad puede ser modelada por la ecuación $P(t) = 30e^{0.03t}$, donde P es la población en millones y t es el tiempo, en años, transcurrido desde 1970. ¿Cuándo la población será de 75 millones?
- 2) Para cierta clase de bacteria la tasa de crecimiento es del 78.5% diario.
 - a. ¿Cuándo el número de bacterias será 20 000, si el conteo inicial es de 100?
 - b. ¿Cuántas bacterias habrá en el cultivo transcurridos 8 días?
 - c. La población infectada que tiene dicha bacteria se encuentra en riesgo cuando el cultivo que se inicia con 100 bacterias tenga más de 12 millones de estas. ¿Cuánto tiempo tienen los científicos para controlar la bacteria antes de convertirse en peligro para la población?
- 3) En un cultivo de bacterias se inició el conteo a la 1 p.m.; a las 2 p.m. el número de estas fue de 150 y a las 6 p.m. de 5 400.
 - a. Escriba una función exponencial que modele el crecimiento de dicha colonia de bacterias.
 - b. ¿Cuál será el número de bacterias a las 10 p.m.?
 - c. ¿A qué hora el número de bacterias será el cuádruple de las que había al comienzo?
- 4) La población de peces en cierto cultivo crece a una tasa del 45% anual. Si se inició el cultivo hace 2 años y hoy hay 6.5 millones de peces:
 - a. ¿Con cuántos peces se inició el cultivo?
 - b. Encuentre una fórmula que modele la población de peces transcurridos t años.
 - c. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que la población inicial se triplique?
- 5) La población de cierta ciudad, en 1995, era de 35 400 y en el año 2006 era de 68 000.
 - a. Encuentre la tasa de crecimiento poblacional de dicha ciudad.
 - b. Escriba una fórmula que modele el crecimiento de la población en función de t .
 - c. ¿Cuál será la población en el año 2014?
- 6) La población mundial en el año 2006 era de 6 540 millones de personas aproximadamente. Si la población del mundo continúa creciendo a una tasa constan-

te, la población futura P , en billones, puede ser estimada por la función $P(t) = 6.54e^{0.02t}$, donde t es el tiempo en años desde 2006.

- De acuerdo con este modelo, ¿en qué año la población será el doble?
 - Algunos expertos han estimado que el suministro de alimentos del mundo puede apoyar una población de a lo más, 18 mil millones. ¿Según este modelo, por cuántos más años el suministro de alimentos podrá apoyar la tendencia en crecimiento de la población del mundo?
- Dos diferentes tipos de bacterias se reproducen exponencialmente. El primer tipo puede ser modelado por la función $P_1(t) = 1\,200 e^{0.1532t}$, y el segundo puede ser modelado por $P_2(t) = 3\,000 e^{0.0466t}$, donde t es el tiempo medido en horas. Si el conteo de bacterias se inicia a la misma hora en ambos cultivos, de acuerdo con los modelos, ¿cuántas horas deben transcurrir para que la cantidad de bacterias del primer modelo P_1 sea mayor que la cantidad del modelo P_2 ?
 - En el año 2005, China era el país más populoso del mundo, con una población estimada de 1 310 millones personas. El segundo país más populoso era la India, con 1 080 millones. Las poblaciones de la India y de China pueden ser modeladas con $P_i(t) = 1.08e^{0.0103t}$ y $P_{ch}(t) = 1.31e^{0.0038t}$ respectivamente. ¿Según estos modelos, cuándo la población de la India será mayor que la de China?

En los problemas 9 a 13 utilice el modelo de desintegración radiactiva $m(t) = m_0 e^{-rt}$

- Una muestra de 28 g de paladio 100 se desintegra anualmente de acuerdo con el siguiente modelo exponencial: $m(t) = 28 e^{-0.125t}$.
 - ¿Cuál es la tasa de desintegración del paladio?
 - ¿Cuánto tiempo tarda en reducirse a la tercera parte?
- La vida media del cesio son 30 años. Si el cesio se desintegra exponencialmente y se tiene una muestra de 35 mg:
 - ¿Cuál es la tasa de desintegración del cesio transcurridos t años?
 - Encuentre una fórmula que modele la masa que queda después de t años.
 - ¿Cuánto tiempo transcurre para que de la muestra queden 10 mg?
- El radio 226 tiene una vida media de 1 800 años. Encuentre la tasa de desintegración radiactiva de este compuesto.
- La vida media del radio 226 es de 1 620 años. ¿Cuándo una muestra de 20 gramos de radio se desintegrará completamente? Explique su respuesta.

- 13) Un paleontólogo que examina los huesos del fósil de un mamut estima que contienen solamente el 3% del carbono 14 que contenían cuando el animal estaba vivo. ¿Hace cuántos años murió el mamut? (la vida media del carbono 14 es de 5 760 años).

En los problemas 14 a 16 utilice la función que modela la ley del enfriamiento de Newton: $T(t) = T_m + (T_0 - T_m) e^{kt}$

- 14) Se saca un ponqué de un horno cuando su temperatura ha alcanzado 160°C y la temperatura de la habitación donde se deja enfriar es de 18°C . Si la temperatura del ponqué es de 46°C después de 20 minutos:
- ¿cuál es la temperatura de este después de 40 minutos?
 - ¿en cuánto tiempo su temperatura será de 28°C ?
- 15) Un termómetro se saca del interior de una habitación al exterior de la casa donde la temperatura del aire es de -14°C . Después de estar afuera 2 minutos, el termómetro indica -4°C y después de 5 minutos indica -9°C . ¿Cuál es la temperatura al interior de la habitación?
- 16) Un vaso de jugo frío se saca del interior de la nevera cuya temperatura es de -1°C y se deja en la cocina, donde la temperatura ambiente es de 21°C . Tres minutos después, la temperatura del jugo es de 7°C . ¿Cuál es su temperatura después de 10 minutos?
- 17) En la bahía de San Francisco se han producido dos de los sismos más devastadores; el primero en 1906, a lo largo de la falla de San Andrés, con una intensidad de 8.5 en la escala de Richter y el segundo en 1989 en las montañas de Santa Cruz, con una intensidad de 7.1 en la misma escala. ¿Cuántas veces fue mayor el sismo de 1906 en comparación con el de 1989?
- 18) Si un terremoto es 10 veces la intensidad de otro, ¿cuánta más grande es su magnitud en la escala de Richter?
- 19) Por razones de salud, el médico le recomendó a Sandra que evitara comidas que tuvieran un pH menor que 4.5. ¿Cuál es la concentración de ion hidronio en la comida que puede consumir Sandra? Dé ejemplos de comidas que podría consumir Sandra atendiendo a la recomendación del médico.
- 20) Tres muestras de sustancias no identificadas tienen una concentración del ion hidronio de $[H^+] = 4.5 \times 10^{-2}\text{M}$, $[H^+] = 1.003 \times 10^{-7}\text{M}$ y

$[H^+] = 1.4 \times 10^{-10} \text{ M}$ respectivamente. Determine el pH de cada una y establezca si las sustancias son ácidas, básicas o neutras.

- 21) Determine cuántas veces es más ácida la primera sustancia que la segunda:
 - a. Lluvia limpia: $\text{pH} = 5.6$ lluvia ácida: $\text{pH} = 3.8$
 - b. NaOH : $[H^+] = 10^{-14}$ HCL : $[H^+] = 1$
- 22) Los humanos tenemos cerca de 1 400 000 cabellos en la cabeza y perdemos en promedio 75 cabellos cada día. Si una persona *nunca* remplazara el cabello, ¿aproximadamente cuántos años le tomaría tener solamente 10 000 cabellos en su cabeza?
- 23) La policía utiliza el contenido de alcohol en la sangre (CAS) para medir el porcentaje de concentración de alcohol en el torrente sanguíneo de una persona. En muchos lugares del mundo un CAS de 0.08% significa que a una persona no se le permite manejar. Cada hora después de beber, el CAS de una persona puede disminuir un 15%. Si una persona tiene un CAS de 0.18, ¿cuántas horas necesitará esperar para que pueda conducir legalmente?
- 24) En el año 2004 la cantidad anual de mensajes *spam* en los celulares era de cerca de 12 millones. En 2006, el total ha crecido exponencialmente a 600 millones. Escriba una función exponencial de la forma $P(t) = P_0 e^{rt}$ que pueda ser usada como modelo del incremento de dichos mensajes; escriba la función en términos de t , número de años desde 2004. Si el número de mensajes continúa creciendo a la misma tasa, estime su número en el año 2016.
- 25) Un isótopo radioactivo es usado como fuente de potencia en un satélite. La potencia de salida P (en watts) está dada por:
 $P = 50e^{-\frac{1}{250}t}$, donde t es el tiempo medido en días.
 - a) ¿La función de la potencia de salida P es un ejemplo de crecimiento o decaimiento exponencial? Explique.
 - b) Encuentre la potencia disponible después de 100 días.
 - c) Para operar los equipos en el satélite se requieren 10 watts de potencia. ¿Durante cuánto tiempo podrán operar estos equipos?
- 26) El peso de una barra de jabón decrece un 2.5% cada vez que es usado. Si el peso de la barra cuando está nueva es de 95 gramos y su desintegración obedece a un modelo exponencial, ¿cuál es su peso después de ser usada 15 veces?

EJERCICIOS FINALES DE LA UNIDAD 3

1) Reescriba la ecuación usando exponentes en lugar de logaritmos:

a) $\log 10 = 1$ b) $\log 0.001 = -3$ c) $\log_4 x = -\frac{3}{2}$

d) $\log_3 x = \frac{1}{2}$ e) $\ln a = r$ f) $\log_2 x = y$

2) Reescriba la ecuación usando logaritmos en lugar de exponentes:

a) $10^5 = 100\,000$ b) $10^{-1} = 0.1$ c) $5^2 = 25$

d) $b^{-3} = 243$ e) $2^{\frac{1}{2}} = x$ f) $e^3 = c$

3) Evalúe, sin calculadora, o diga si la expresión es indefinida:

a) $\log 1\,000$ b) $\log\left(\frac{1}{1000}\right)$ c) $\ln(\ln e)$

d) $\log 0$ e) $\ln\left(\frac{1}{e^3}\right)$ f) $\log(-1)$

g) $\log\sqrt{10}$ h) $\log\sqrt[3]{10}$ i) $\log\left(\frac{1}{\sqrt[4]{10}}\right)$

j) $\log 10^{3.68}$ k) $e^{\ln 5} - \ln e^5$ l) $10^{\log 10}$

m) $10^{\log(-10)}$ n) $10^{\log(3a-2b)}$ o) $e^{\ln(125+4b)}$

4) Simplifique cada expresión:

a) $\log 10^{5x-3}$ b) $\log\sqrt{10^x}$

c) $\log 1000^{2x^3}$ d) $0.1^{-\log(1+x^3)}$

e) $\log\left(\frac{1}{\sqrt[3]{10^x}}\right)$ f) $10^{2\log(3x+1)}$

5) Resuelva cada ecuación:

a) $5^t = 20$

b) $\pi^x = 100$

c) $8 \cdot 1.5^t = 60.75$

d) $0.03^{\frac{t}{3}} = 0.0027$

e) $22^{t-5} = 1024$

f) $\frac{1}{4}(5)^t + 86.75 = 3^5$

g) $\log x = 2 \log \sqrt{2}$

h) $\log(x-1) = 3$

i) $\log x^2 = 6$

j) $15 - 3 \log x = 10$

k) $\log_2(x-5) = 3$

l) $2 \log x + 1 = 5 - \log x$

6) Escriba la función $y = 2^x$ en la forma $y = e^{ax}$.

7) Escriba las expresiones en la forma $\log_b x$ para el valor dado de b . Establezca el valor de x y verifique su respuesta usando una calculadora:

a) $\frac{\log 18}{2} \quad b = 100$

b) $\frac{\log 18}{2} \quad b = 10$

c) $\frac{\log 90}{4 \log 5} \quad b = 5$

d) $\frac{\log 90}{4 \log 5} \quad b = 25$

e) $\frac{\log 4}{\log_2 5} \quad b = 5$

f) $\frac{\log 4}{\log_3 5} \quad b = 5$

8) Sea $y = f(x)$ una función exponencial en la que si se aumenta x en 1, el valor de y se triplica. Si x se aumenta en 2 unidades, entonces el valor de y se multiplica por:

a) 2

b) 3

c) 5

d) 6

e) 9

9) Sea $y = f(x)$ una función exponencial en la que si se aumenta x en 1, el valor de y aumenta en un 20%. Si x se aumenta en 3 unidades, entonces el valor de y aumenta en un:

a) 30%

b) 44%

c) 52.8%

d) 72.8%

e) 90%

10) De las gráficas que se muestran en la figura 1,

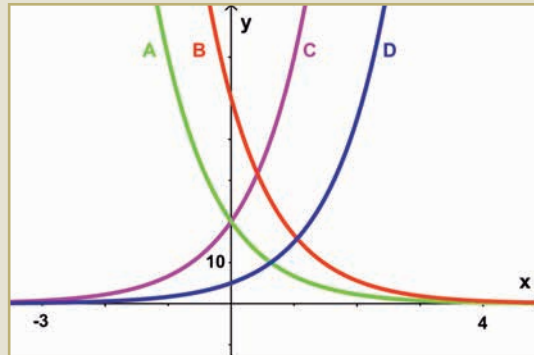


Figura 1

las que mejor describen a las funciones $f(x) = 20(3)^x$, $g(x) = 20(3)^{-x}$, son respectivamente:

- a) A y B b) B y C c) C y D d) A y C e) A y D

11) ¿En qué intervalos la gráfica de la función exponencial $f(x) = 2^x$ se encuentra por encima de la gráfica de la función lineal $g(x) = 2x$?

12) Algunos valores funcionales para las funciones f , g , h , j (unas exponenciales y otras lineales) se muestran en la tabla siguiente. Indique cuáles son exponenciales. Justifique su respuesta.

x	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$	$j(x)$
0	-500	1	10.25	1
1	-200	2.5	8.25	0.5
2	100	6.25	6.25	0.25
3	400	15.625	4.25	0.125
4	700	39.0625	2.25	0.0625
5	1000	97.25625	0.25	0.03125

13) Use álgebra para hallar el punto de intersección:

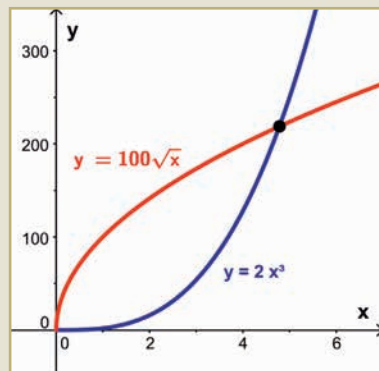


Figura 2

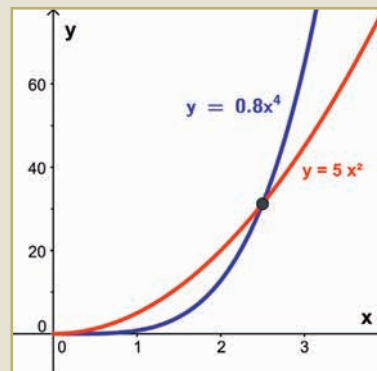


Figura 3

14) ¿Qué es mayor: 80^{70} o 70^{80} ?

15) Si las variables B y x están relacionadas por la expresión $B = 100(0.4)^x$, entonces cuando x aumenta en una unidad, B

- a) crece en un 40%
- b) decrece en un 40%
- c) crece en un 60%
- d) decrece en un 60%
- e) decrece en un 20%

16) ¿En cuánto tiempo se duplica cualquier cantidad invertida a una tasa de interés anual del 8%, compuesto continuamente?

17) Una inversión de \$1 200 crece a razón de 11.2% anualmente. ¿Cuándo tendrá un valor de \$5 000?

18) En cada caso, genere una ecuación que represente una población P como una función del tiempo t , en años, tal que $t = 0$, $P_0 = 150$, y:

- a. P se duplica cada año.
- b. P disminuye en 12 unidades cada año.
- c. P aumenta en un 5% cada año.

19) Una población decrece exponencialmente como muestra la figura 4:

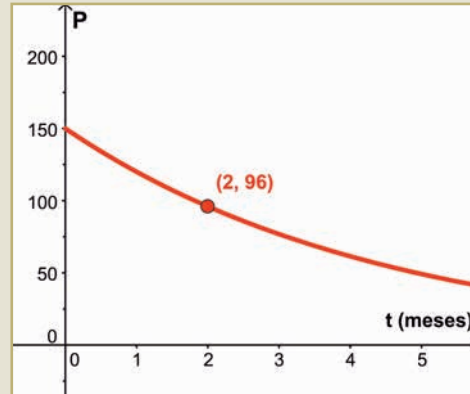


Figura 4

¿Cuál es la población transcurridos 4 meses?

20) Una especie depredadora de peces se introduce en un lago. El número P de peces después de t años está dado por $P = 20 \cdot 2^{\frac{t}{3}}$.

- ¿Cuál es el tamaño inicial de la población de peces?
- ¿En cuánto tiempo se duplica la población?, ¿se triplica?
- La población deja de crecer cuando hay 200 peces. ¿Cuándo ocurrirá esto?

UNIDAD

4

4.1 FUNCIONES PERIÓDICAS

ACTIVIDAD INICIAL

EL NADADOR

Un nadador hace recorridos de ida y vuelta en una piscina, (figura 1) desde A hasta B, con una rapidez de 2 metros por segundo:

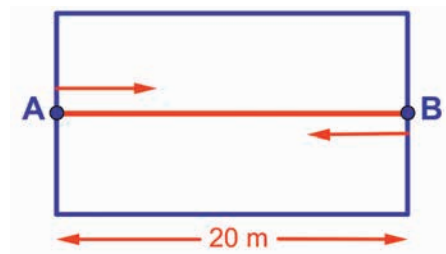


Figura 1

Considere una función d (en metros), con respecto al tiempo t (en segundos), como modelo de la distancia del nadador al punto de partida A, desde que comenzó a nadar.



Haga la gráfica de la función d en la figura 2.

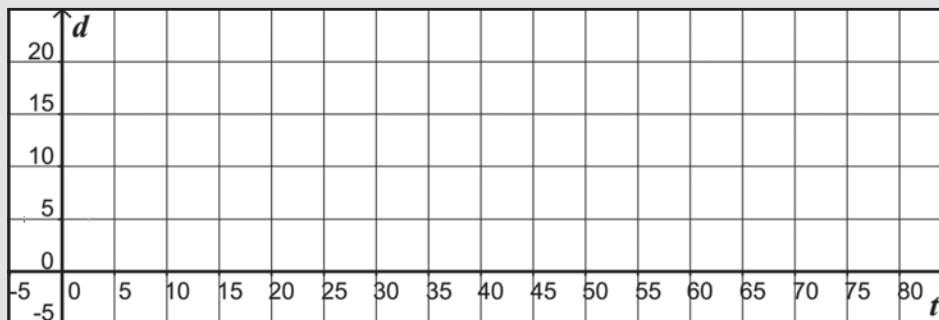


Figura 2



Indique dominio, rango, intervalos de crecimiento o decrecimiento y cortes con los ejes.



¿Para qué valores de t , la distancia al punto A es de 5 m?



¿Encuentra algún patrón en la gráfica que la diferencie de las gráficas de las funciones estudiadas hasta ahora?

En la naturaleza hay muchos fenómenos asociados con repeticiones; por ejemplo, la salida y puesta del sol cada día (día, noche, día, noche...), las estaciones (primavera, verano, otoño, invierno, primavera...). Fenómenos como los anteriores son llamados *periódicos* o *cíclicos*.

En matemáticas también encontramos ejemplos donde hay periodicidad:

- En la escritura decimal de los números racionales:

$$\frac{2}{11} = 0.\overline{181818}\dots$$

↓
Periodo

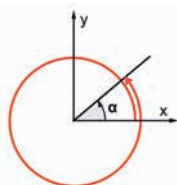
- En los residuos de los números naturales cuando se dividen por un natural determinado:

$$\begin{array}{r} 6 \overline{) 3} \\ \underline{0} 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7 \overline{) 3} \\ \underline{1} \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \overline{) 3} \\ \underline{2} 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 9 \overline{) 3} \\ \underline{0} 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 10 \overline{) 3} \\ \underline{1} 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 11 \overline{) 3} \\ \underline{2} 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \overline{) 3} \\ \underline{0} 4 \end{array}$$

- En los dígitos de las unidades cuando se hace la expansión de las potencias de un número natural:

$$2^1 = \boxed{2} \quad 2^2 = \boxed{4} \quad 2^3 = \boxed{8} \quad 2^4 = 1 \boxed{6} \quad 2^5 = 3 \boxed{2} \quad 2^6 = 6 \boxed{4} \quad 2^7 = 12 \boxed{8}$$

- En la medida de los ángulos como rotaciones:



$$\alpha = 40^\circ = 40^\circ + 360^\circ = 40^\circ + 2 \cdot 360^\circ = \dots$$

- En la gráfica de la función d de la actividad inicial que se muestra en la figura 3. Observemos que los valores que toma esta función se repiten a intervalos regulares (de longitud 20); una función como d es un ejemplo de una función **periódica**.

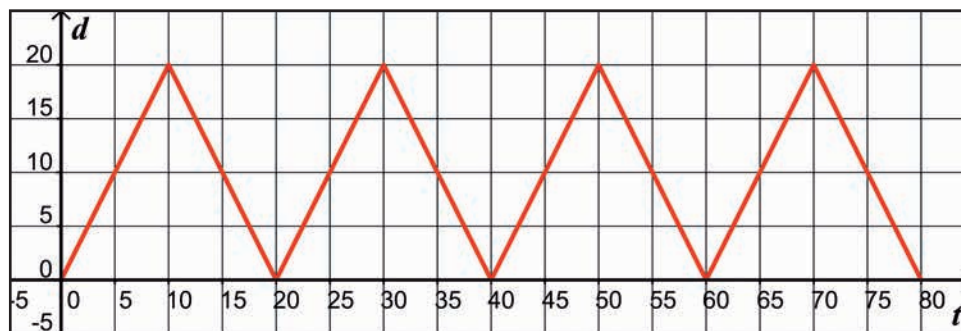


Figura 3

Una función f es *periódica* si existe un número positivo T tal que:

$$f(x) = f(x + T), \text{ para todo } x \text{ en el dominio de } f \quad (1)$$

El menor valor de T que satisface (1) es el **período** de f ; la porción de la gráfica que se repite es un **ciclo**.

En la figura 4 se indica el período de la función d en la actividad inicial y se señala un ciclo:

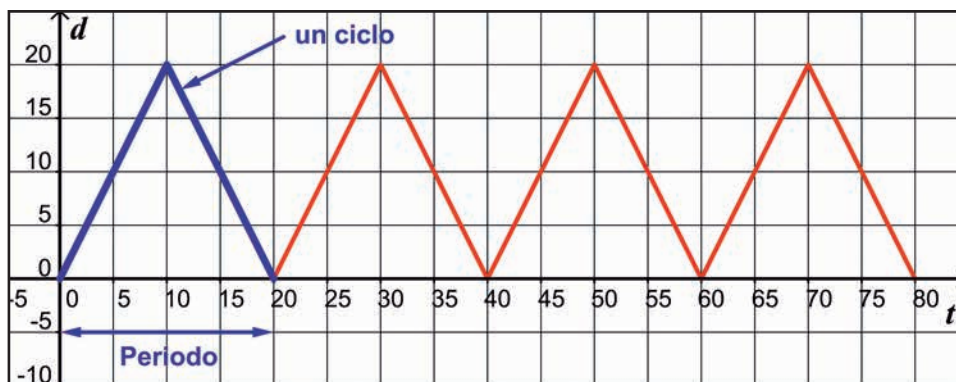


Figura 4

El período T es de 20 segundos, para cualquier t en el dominio de d ,

$$d(t) = d(t + 20)$$

Ejemplo 1

En las figuras 5 a 8 se muestran las gráficas de varias funciones. Identifique aquellas que son periódicas y diga los períodos correspondientes.

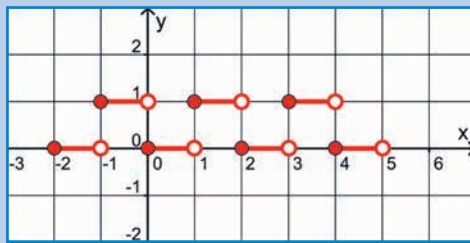


Figura 5

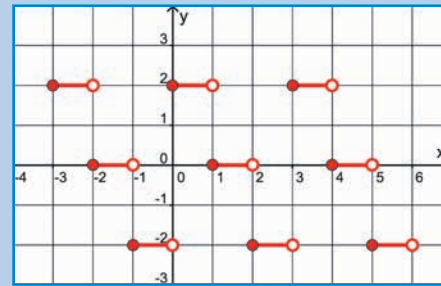


Figura 6

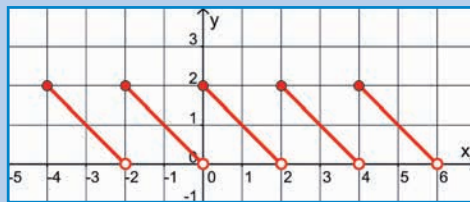


Figura 7

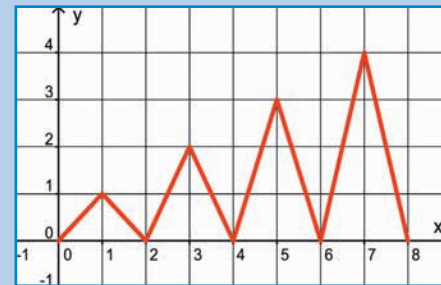


Figura 8

Solución

Las figuras 5, 6 y 7 corresponden a funciones periódicas de período 2, 3 y 2, respectivamente; la 8 no es periódica.

Ejemplo 2

Con la gráfica $f(x) = x - \llbracket x \rrbracket$ y utilizando transformaciones, obtenga una representación algebraica para la función periódica de la figura 3:

Solución

$$1) f(x) = x - \llbracket x \rrbracket$$

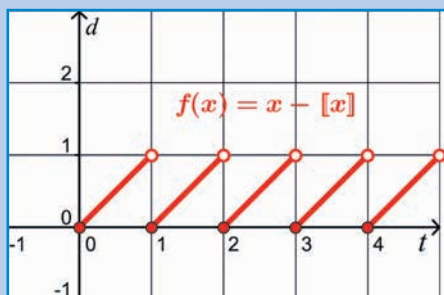


Figura 9

$$2) f_1(x) = (x - \llbracket x \rrbracket) - \frac{1}{2}$$

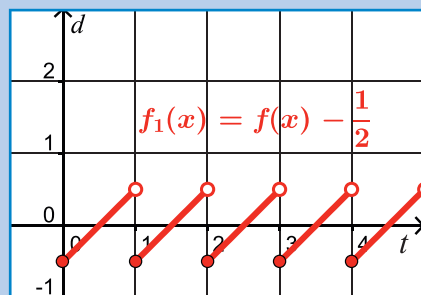


Figura 10

$$3) f_2(x) = \left| (x - \llbracket x \rrbracket) - \frac{1}{2} \right|$$

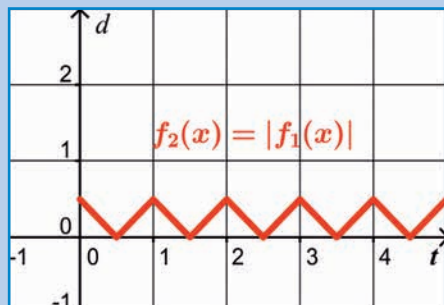


Figura 11

$$4) f_3(x) = \left| \left(\left(x - \frac{1}{2} \right) - \llbracket x - \frac{1}{2} \rrbracket \right) - \frac{1}{2} \right|$$

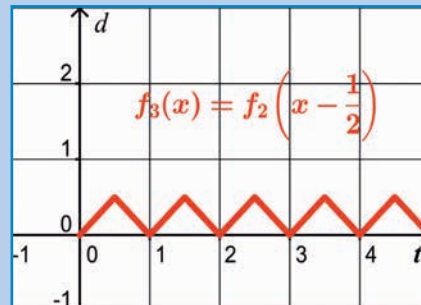


Figura 12

$$5) f_4(x) = 2 \left| \left(\left(x - \frac{1}{2} \right) - \left\lfloor x - \frac{1}{2} \right\rfloor \right) - \frac{1}{2} \right|$$

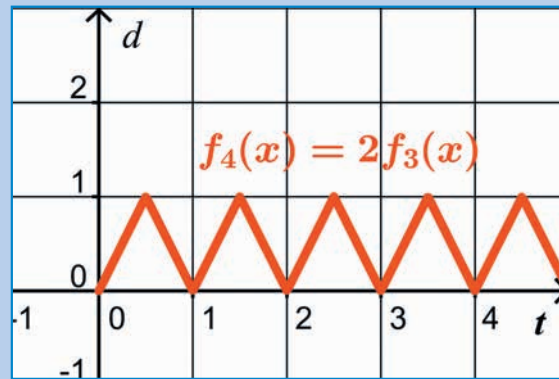


Figura 13

$$6) f_5(x) = 20 \left(2 \left| \left(\left(x - \frac{1}{2} \right) - \left\lfloor x - \frac{1}{2} \right\rfloor \right) - \frac{1}{2} \right| \right)$$

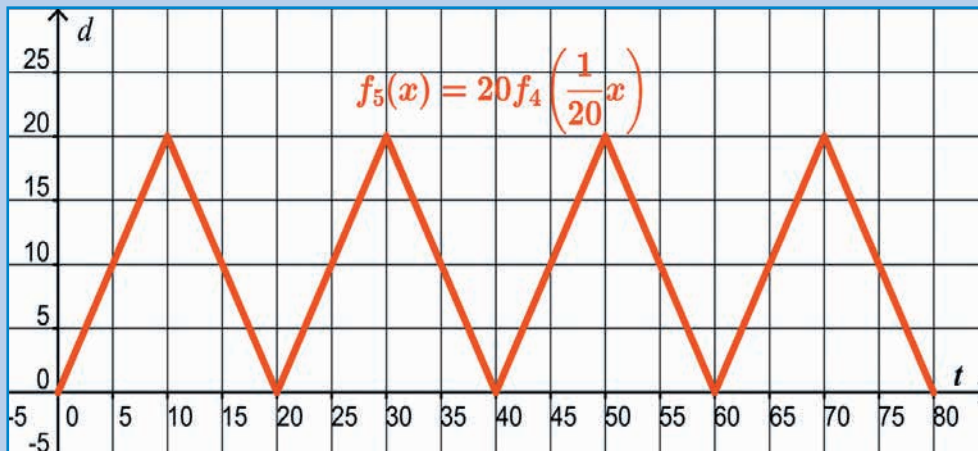


Figura 14

Veamos ahora otros rasgos asociados con las funciones periódicas:

Si una función periódica tiene valor máximo **M** y valor mínimo **m**, se define **amplitud** **A** de la función:

$$A = \frac{M - m}{2}$$

eje de la gráfica, la recta:

$$A = \frac{M + m}{2}$$

Ejemplo 3

Determine la amplitud y el eje de la gráfica para la función d (figura 3).

Solución

Los valores máximo (M) y mínimo (m) de la función son: $M = 20$; $m = 0$

Por tanto, la amplitud A es: $A = \frac{20 - 0}{2} = 10$

El eje de la gráfica es la recta $A = \frac{20 + 0}{2} = 10$

Se representan los anteriores resultados en figura 15:

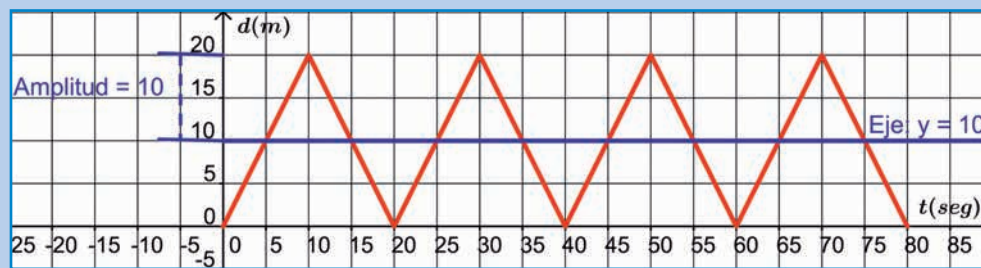
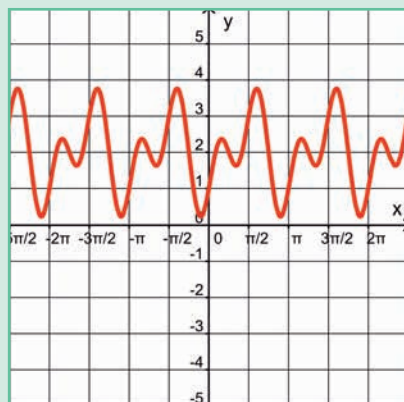


Figura 15

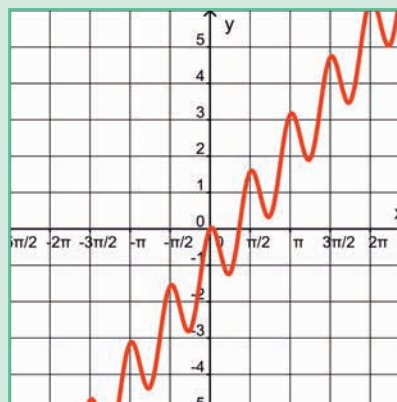
EJERCICIOS

- I. ¿Cuáles de las gráficas de la figura 16 corresponden a funciones periódicas? Determine el período de las que lo sean:

1)



2)



3)

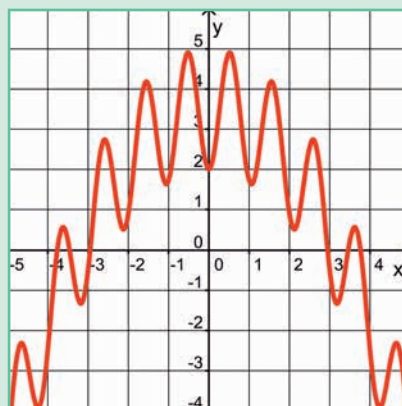
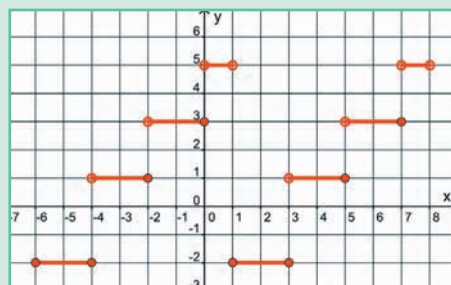


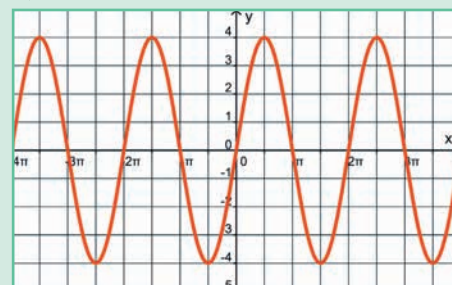
Figura 16

II. En cada una de las gráficas de la figura 16, determine la amplitud y trace el eje:

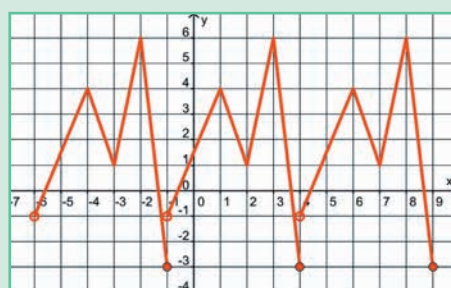
1)



2)



3)



4)

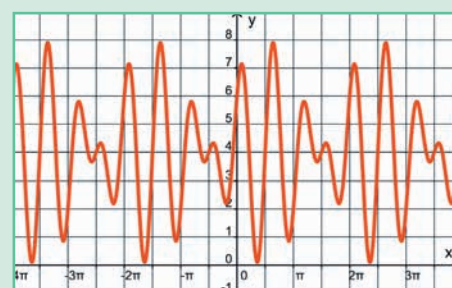


Figura 17

III. Para cada ítem, trace la gráfica de una función periódica que cumpla las condiciones correspondientes:

a) período: 6, amplitud: 4, eje: la recta $y = 1$

b) período: 3, amplitud: 1, eje: la recta $y = 0$

4.2 FUNCIONES CIRCULARES

ACTIVIDAD INICIAL

Suponga una rueda panorámica (figura 1) con un diámetro de 20 metros, en la que acaban de ingresar las dos últimas personas en la canasta C para completar el cupo. Comienza entonces a girar la rueda a las 3 p.m., con rapidez uniforme, a razón de una vuelta cada minuto:

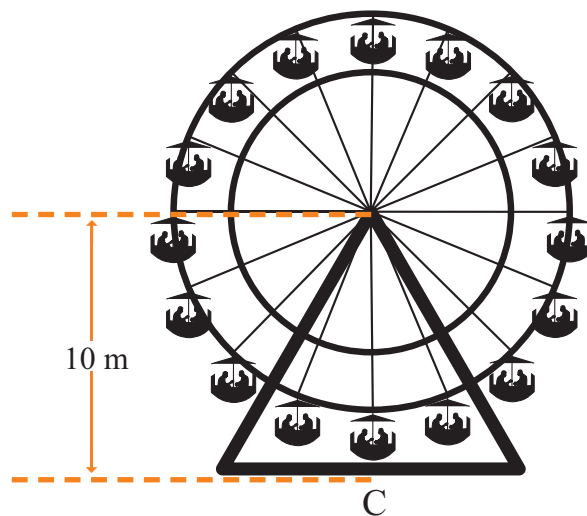


Figura 1

3 p.m.

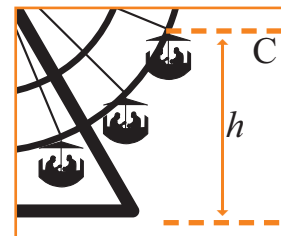


Figura 2

Consideremos la altura h a la que se encuentra la canasta C como una función del tiempo t , transcurrido desde las 3 p.m. (figura 2).



En la figura 3 se muestran las posiciones que va ocupando la canasta para algunos valores del tiempo t , en segundos, desde las 3 p.m., con una cuadrícula de fondo que permite estimar a simple vista la altura que va adquiriendo. Use esas estimaciones para hacer una gráfica de la función h , en el plano de la figura 4, para los 3 primeros minutos (180 segundos).

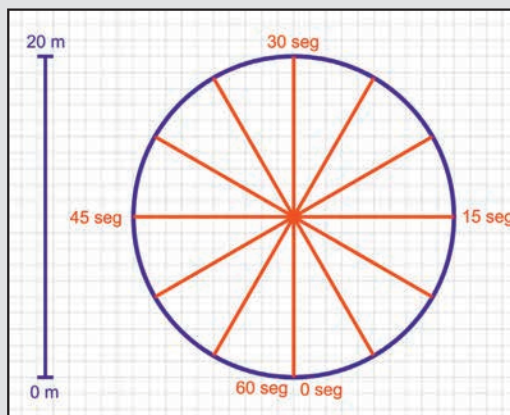


Figura 3

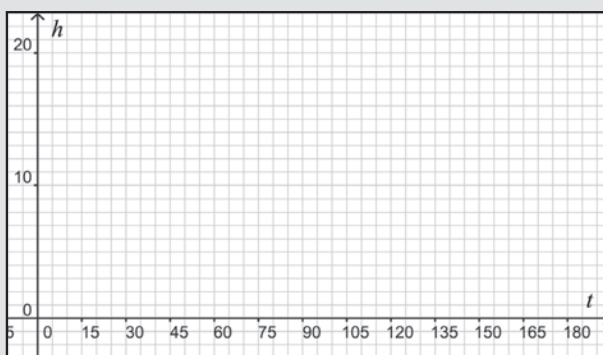


Figura 4

Observe que h es una función periódica. ¿Cuál es el período? Dibuje el eje de la gráfica en la figura 4.

4.2.1 LAS FUNCIONES SENO Y COSENO

Consideremos un círculo de radio 1 centrado en el origen del plano cartesiano, y t un número real. Un punto P recorre, a partir del punto $(1, 0)$ una distancia t por la circunferencia, en sentido contrario a las manecillas del reloj si t es positivo y en el mismo sentido de las manecillas si t es negativo. En las figuras 5 y 6 se ilustra esto para valores de t iguales a 1, 2, -0.8 y -3 , respectivamente:

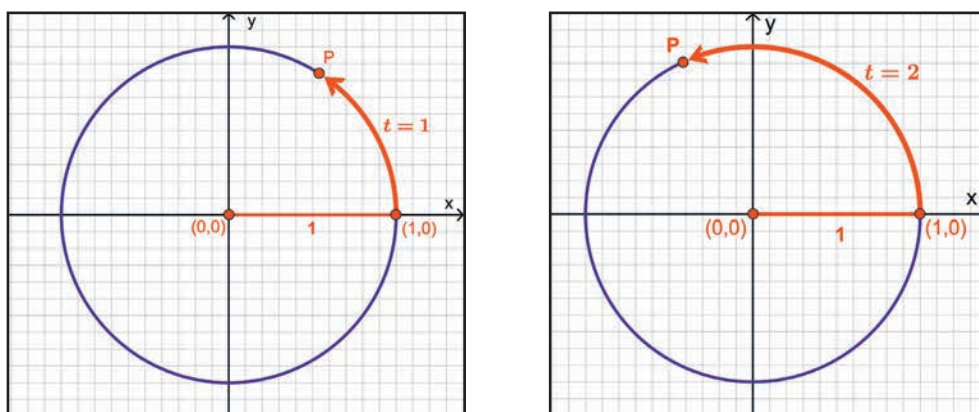


Figura 5

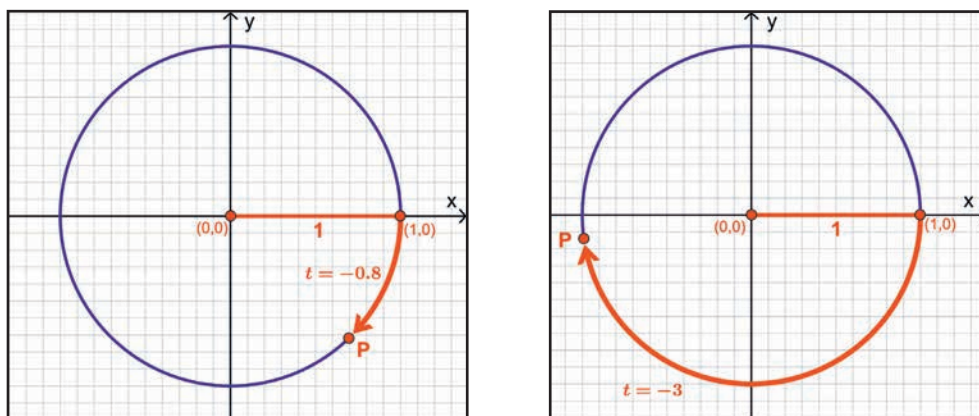


Figura 6

La abscisa (coordenada x) y la ordenada (coordenada y) de P dependen de la distancia recorrida t , son funciones de t . Se definen *coseno* y *seno* a esas funciones, respectivamente (figura 7):

$$x = \cos t$$

$$y = \sin t$$

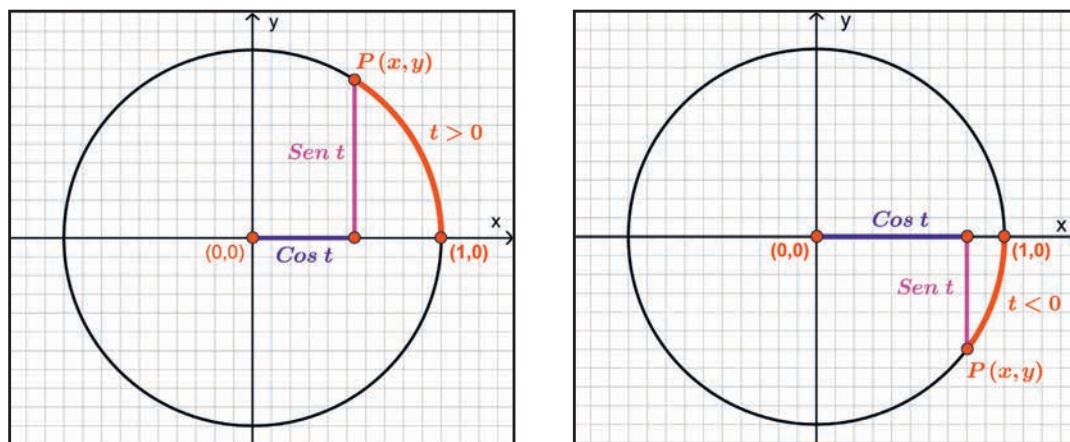


Figura 7

Utilice las figuras 5 y 6 para estimar $\cos t$ y $\sin t$ en la tabla 1. Compare con lo que indica su calculadora (verifique primero que esté en el modo RAD).

t	$\cos t$	$\sin t$
1		
2		
-0.8		
-3		

Tabla1

Posiciones particulares de P son aquellas en donde la circunferencia intercepta a los ejes coordenados. En la figura 8 se muestra, por ejemplo, una de ellas. ¿A qué valor de t corresponde esta posición?

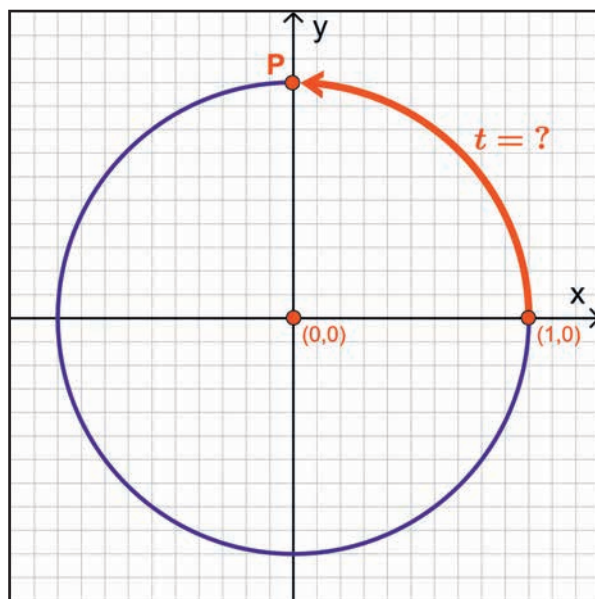


Figura 8

Una primera aproximación la obtenemos observando en la figura 5 la posición de P para $t = 1$; de ahí estimamos que t se encuentra entre 1 y 2. Para más precisión, observemos que el valor de t corresponde a la cuarta parte de la longitud de la circunferencia. Como la longitud C de una circunferencia y su radio r están relacionados por la ecuación: $C = 2\pi r$ y ya que en este caso el radio es de longitud 1, tenemos que la longitud de la circunferencia es $2\pi \approx 6.2832$. El valor de t que buscamos es por tanto la cuarta parte de 2π :

$$t = \frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2} \approx 1.5708$$



¿A qué valor de t corresponde cada posición del punto P?

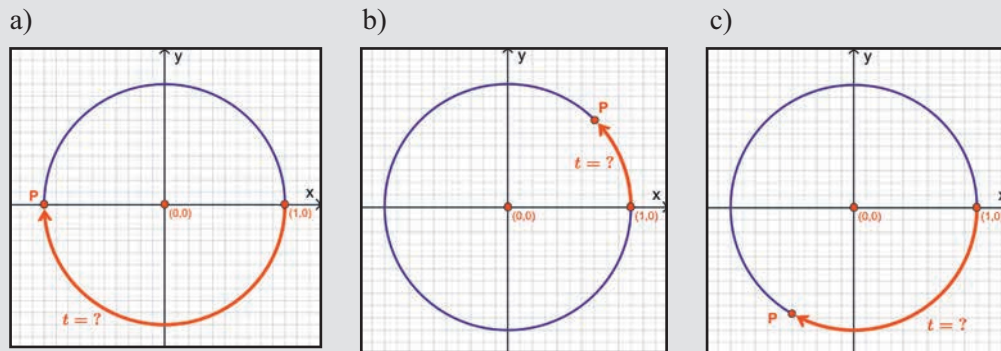


Figura 9

Si P sigue recorriendo la circunferencia después de haber dado una vuelta completa, P vuelve a ocupar las mismas posiciones que tuvo cuando comenzó el movimiento, como se aprecia por ejemplo en la figura 10, en la que varios valores de t conducen a P al mismo punto $(0,1)$:

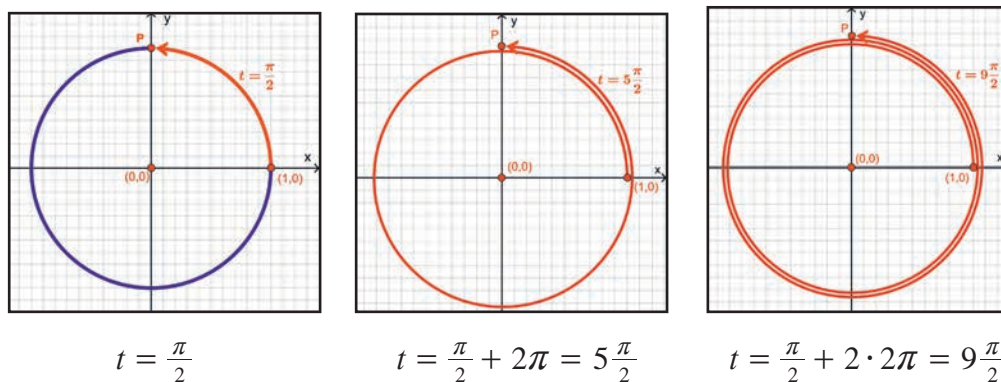


Figura 10

Los valores de las funciones seno y coseno comienzan a repetirse a intervalos de 2π y por tanto son funciones periódicas.

4.2.2 GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES SENO Y COSENO

En la figura 11 se muestra a P cuando $t = \frac{\pi}{2} \div 3 = \frac{\pi}{6}$, al igual que posiciones de P que se obtienen tomando algunos múltiplos de $\frac{\pi}{6}$: $\frac{\pi}{6}, 2 \cdot \frac{\pi}{6}, 3 \cdot \frac{\pi}{6}, 4 \cdot \frac{\pi}{6} \dots, 12 \cdot \frac{\pi}{6}$.

Utilice el círculo unitario de la figura 11 para estimar los valores de $\text{sen } t$ y $\text{cos } t$ correspondientes a los múltiplos de $\frac{\pi}{6}$ indicados y haga las gráficas respectivas en las figuras 12 y 13 (una suavemente los puntos).

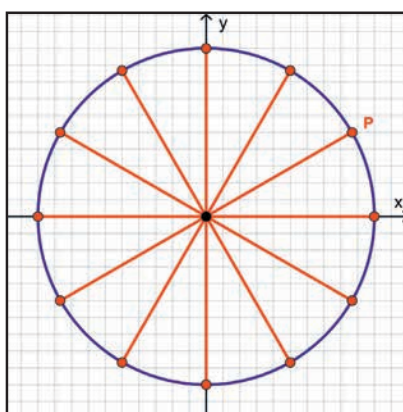


Figura 11

Gráfica de la función *seno*:

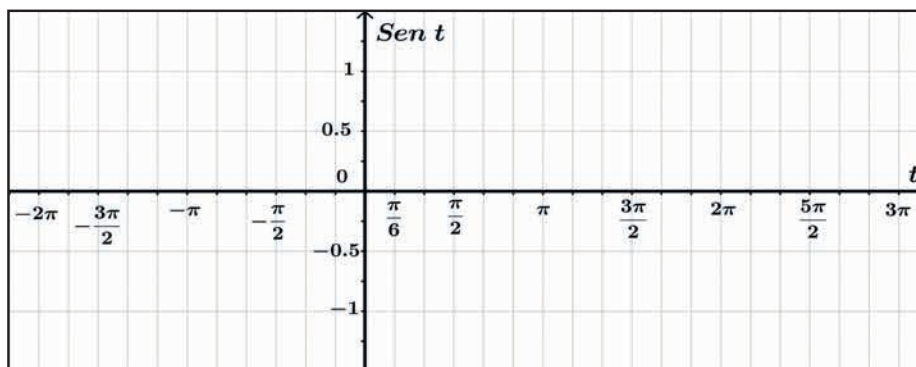


Figura 12

Gráfica de la función *coseno*:

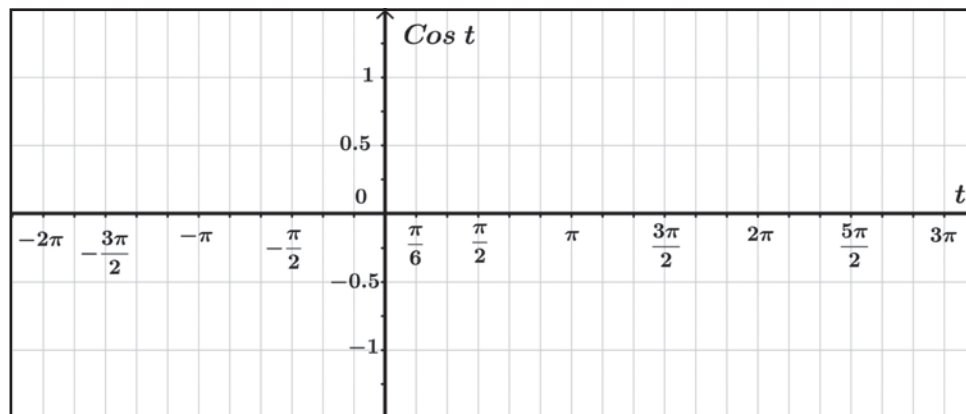


Figura 13



Escriba a un lado de las gráficas en las figuras 12 y 13 el dominio, rango, amplitud, período e interceptos con los ejes correspondientes.

4.2.3 FUNCIONES SINUSOIDALES

Las funciones seno, coseno y cualquiera que se obtenga por transformaciones de ellas se llaman funciones **sinusoidales**; en otras palabras, son funciones que se pueden expresar en cualquiera de las formas:

$$f(x) = A \operatorname{sen}(B(x + C)) + D$$

$$f(x) = A \operatorname{cos}(B(x + C)) + D$$

A continuación se dan varios ejemplos de funciones sinusoidales:

1) $g(x) = 2\text{sen} x$

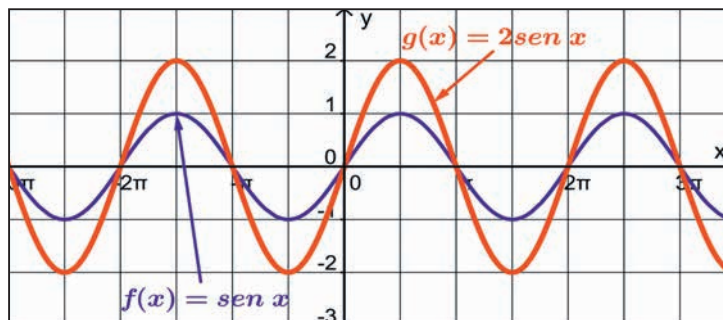


Figura 14

2) $h(x) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 2$

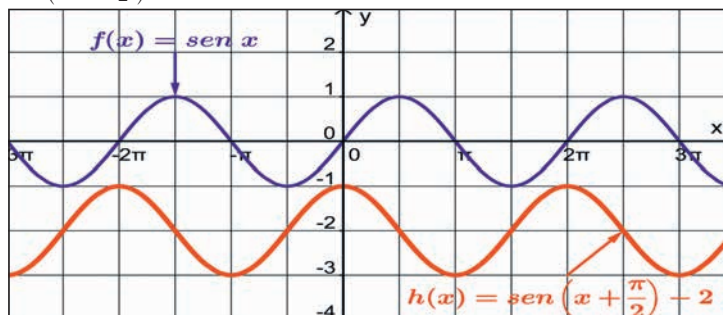


Figura 15

3) $m(x) = \text{sen}(2x)$

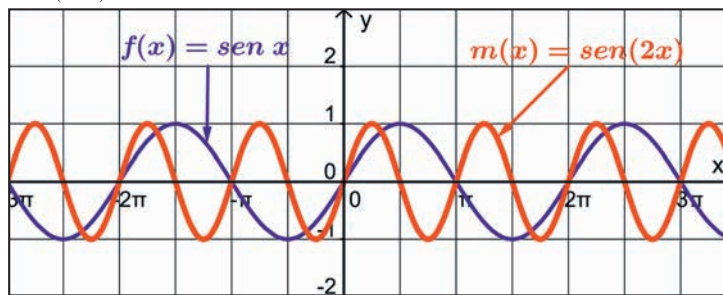


Figura 16

4) $n(x) = -\text{sen}(x)$

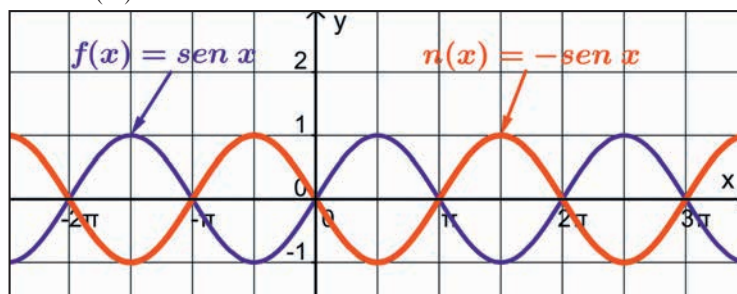


Figura 17

5) $p(x) = \text{sen}(-x)$

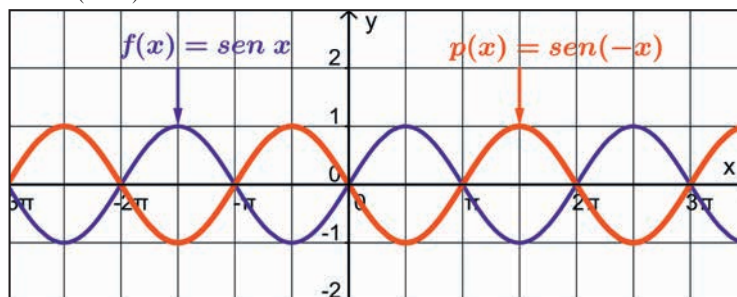


Figura 18

6) $r(x) = \frac{1}{2}\text{sen}(2x - \pi)$

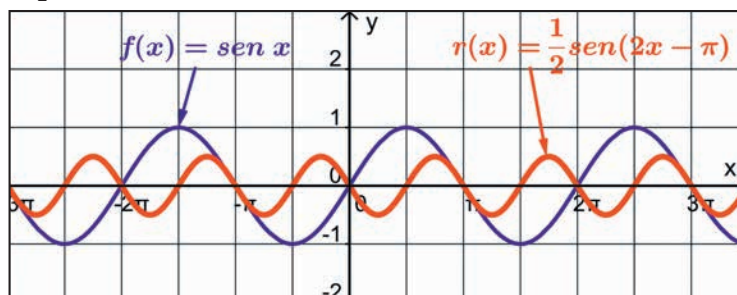


Figura 19



En cada uno de los ejemplos anteriores (figuras 14 a 19) determine eje, amplitud, período y resalte un ciclo.



Se da la gráfica de la función $y = \cos x$; haga la gráfica de las funciones:

a) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 2$

b) $y = 2 \cos x$

c) $y = \frac{1}{2} \cos(-x)$

d) $y = -\cos x + 1$

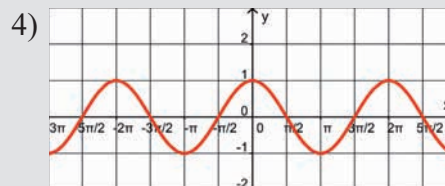
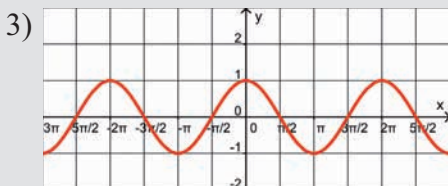
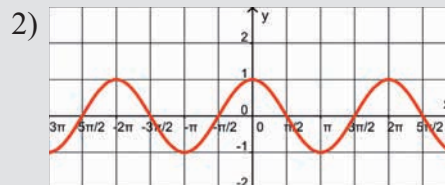
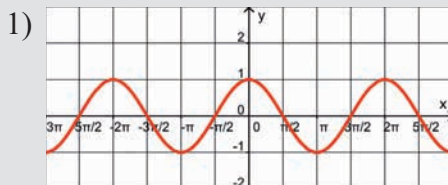


Figura 20



Trace líneas que unan parejas de funciones equivalentes:

$y = \sin(-x)$

$y = -\cos(x)$

$y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$y = -\sin(x)$

$y = \cos(-x)$

$y = \cos(x)$

EJERCICIOS

I. ¿Cuál es la gráfica de cada función?

1) $y = \cos 2x$

()

2) $y = \frac{1}{2} \cos x + 1$

()

3) $y = -1 - 2 \sin \frac{1}{2}x$

()

4) $y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

()

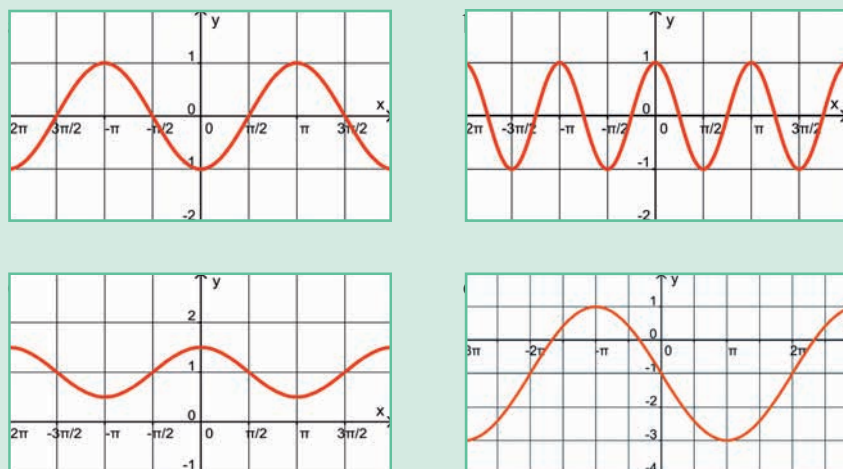


Figura 21

II. Para cada función haga la gráfica, determine dominio, rango, período y trace el eje de cada gráfica:

1) $y = 2 \operatorname{sen}(2x)$

2) $y = 4 \cos(x + \pi)$

3) $y = -\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

4) $y = -\cos x + 2$

III. Para cada ejercicio escriba una ecuación de la forma $y = a \operatorname{sen}(bx)$ donde $a > 0$, $b > 0$, de modo que se cumplan las condiciones indicadas:

1) Máximo 1; período $\frac{\pi}{4}$

2) Mínimo -8 ; período $\frac{\pi}{2}$

IV. Complete con $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $-\operatorname{sen} x$ o $-\cos x$ según corresponda:

1) $\cos(-x) =$

2) $\operatorname{sen}(-x) =$

3) $\operatorname{sen}(x + 2k\pi) =$, $k \in \mathbb{Z}$

4) $\cos(x + 2k\pi) =$, $k \in \mathbb{Z}$

5) $\operatorname{sen}(x + \pi) =$

6) $\cos(x + \pi) =$

4.3 FUNCIONES DEFINIDAS CON EL SENO Y EL COSENO

Con el seno y el coseno se define la función *tangente* por medio del cociente:

$$\tan t = \frac{\operatorname{sen} t}{\operatorname{cos} t}$$

El cociente $\frac{\operatorname{sen} t}{\operatorname{cos} t}$ tiene sentido para todos los números reales excepto aquellos para los cuales $\operatorname{cos} t = 0$. Por tanto el dominio de la función tangente es el conjunto de los números reales exceptuando $\pm \frac{\pi}{2}, \pm 3 \frac{\pi}{2}, \pm 5 \frac{\pi}{2} \dots$

Así como el seno y el coseno, la tangente tiene su representación gráfica en el círculo unitario (figura 1).

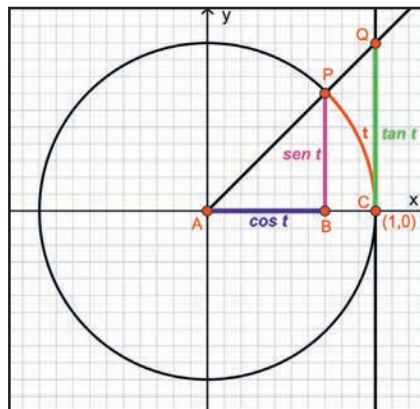


Figura 1

Explicación:

Supongamos que el punto P ha recorrido una distancia t . Trazamos la semirrecta cuyo origen es el punto $(0, 0) = A$ y que pasa por P; luego trazamos la recta perpendicular al eje x por $(1, 0)$ y la recta perpendicular al eje x por $(-1, 0)$. Sea Q la intersección de la semirrecta y alguna de las rectas perpendiculares que se acaban de trazar. Como los triángulos AQC y APB son semejantes, se tiene:

$$\frac{QC}{AC} = \frac{PB}{AB}$$

$$\frac{QC}{1} = \frac{\text{sen } t}{\text{cos } t}$$

$$QC = \tan t$$

Si el segmento QC está por encima del eje x , la tangente es positiva; si está por debajo, la tangente es negativa. Observe que si $t = \frac{\pi}{2}$ o cualquier otro valor en donde la tangente no está definida, entonces deja de haber intersección entre la semirrecta y las rectas mencionadas.



En la figura 1 $t = 0.7$; estime $\tan 0.7$. Compare con su calculadora.

4.3.1 GRÁFICA DE LA FUNCIÓN TANGENTE

En la figura 2 se muestra a P para $t = \frac{\pi}{12}$ y posiciones que se obtienen tomando múltiplos de $\frac{\pi}{12}$: $\frac{\pi}{12}$, $2 \cdot \frac{\pi}{12}$, $3 \cdot \frac{\pi}{12}$, $4 \cdot \frac{\pi}{12}$...

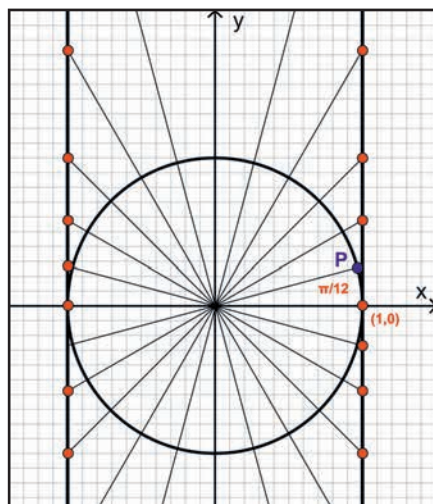


Figura 2



Utilice la figura 2 para hacer la gráfica de la función tangente en la figura 3.

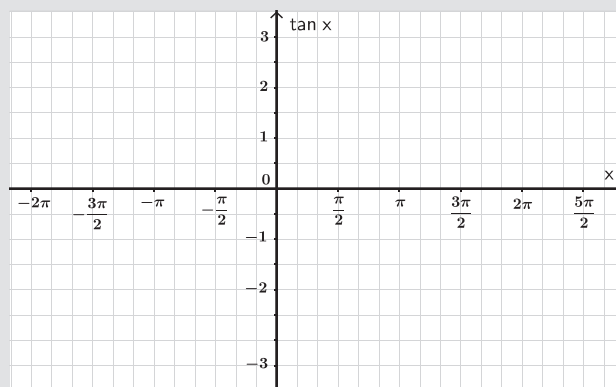


Figura 3



En la gráfica de la tangente se puede apreciar un comportamiento asintótico en $t = \frac{\pi}{2}$. ¿Para cuáles otros valores de t hay comportamiento asintótico? Trace las asíntotas correspondientes en la figura 3.



Escriba en la figura 3 el dominio, rango, interceptos con los ejes y el período de la función tangente .

En la figura 4 se presentan las gráficas de las funciones seno, coseno y tangente, hechas con un graficador:

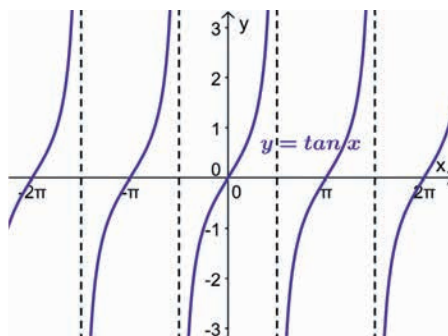
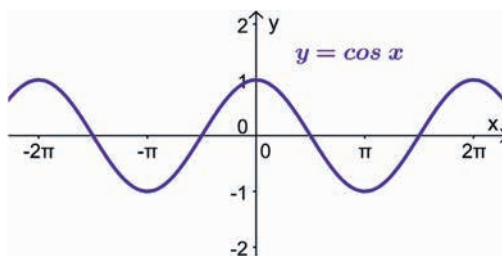
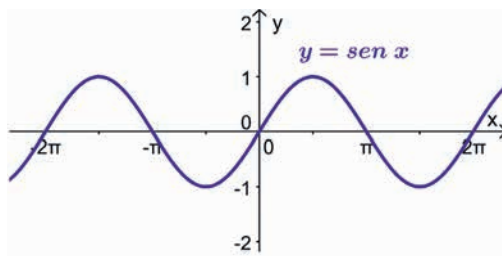


Figura 4

4.3.2 LAS FUNCIONES SECANTE, COSECANTE Y COTANGENTE

Hemos visto hasta el momento tres funciones circulares: *seno*, *coseno* y *tangente*. Con estas funciones se definen tres funciones más, la *secante* (*sec*), *cosecante* (*csc*) y *cotangente* (*cot*), así:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x}$$

Las gráficas correspondientes se muestran en la figura 5:

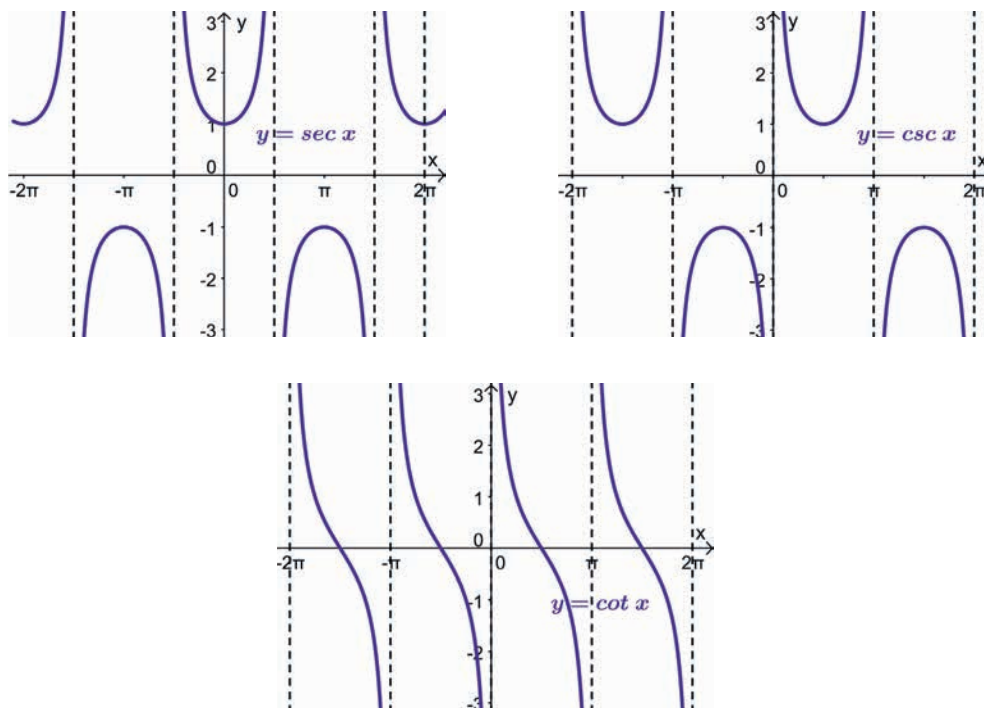


Figura 5

Ya que $\tan x = \frac{\text{sen} x}{\text{cos} x}$, expresamos la cotangente en términos de seno y coseno:

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\frac{\text{sen} x}{\text{cos} x}}$$

$$\cot x = \frac{\text{cos} x}{\text{sen} x}$$

4.3.3 FUNCIONES INVERSAS

En la figura 6 se observa que hay rectas horizontales que cortan a las gráficas de las funciones seno, coseno y tangente en más de un punto:

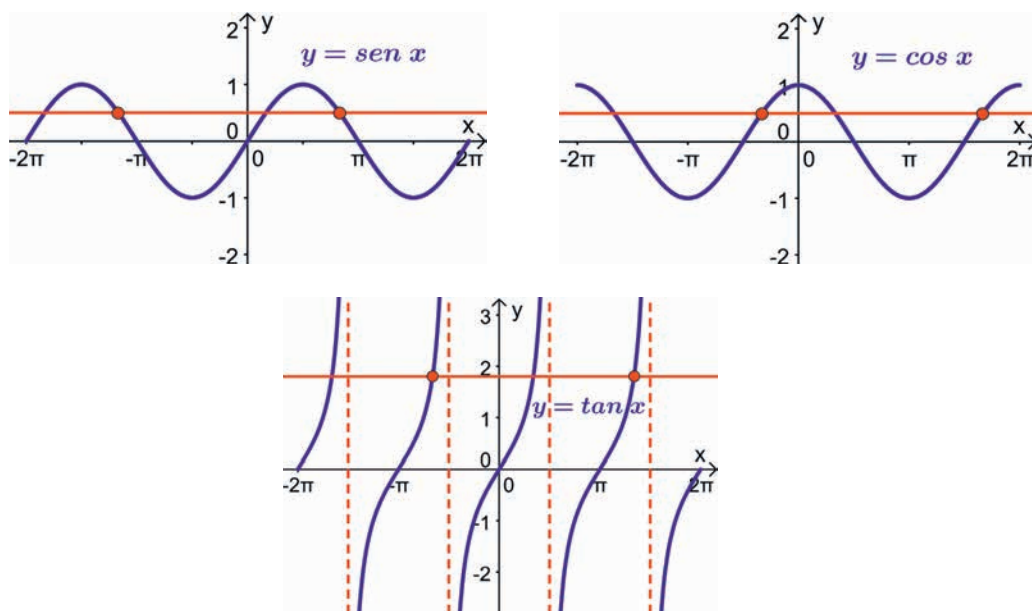


Figura 6

Lo anterior indica que esas funciones no son uno a uno y por tanto no tienen inversas. Sin embargo, restringiendo apropiadamente los dominios respectivos se obtienen funciones que sí tienen inversas (figura 7).

En la función seno, restringimos el dominio al intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$:

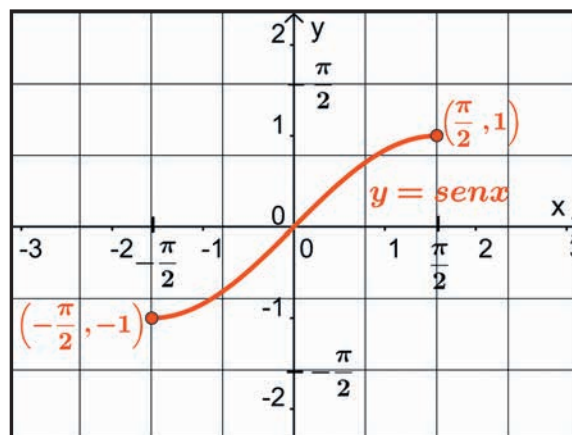


Figura 7

En la figura 8 se observa cómo se obtiene la gráfica de la inversa del seno reflejando la gráfica de la figura 7 en la recta $y = x$. La descripción explícita de la inversa del seno es $y = \text{sen}^{-1}x$, o también $y = \arcsen x$:

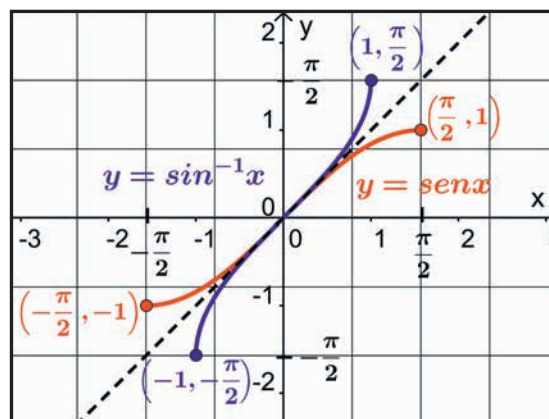


Figura 8

Para la función coseno el dominio se restringe al intervalo $[0, \pi]$. La inversa se describe como $y = \cos^{-1} x$ o también como $y = \arccos x$ (figura 9):

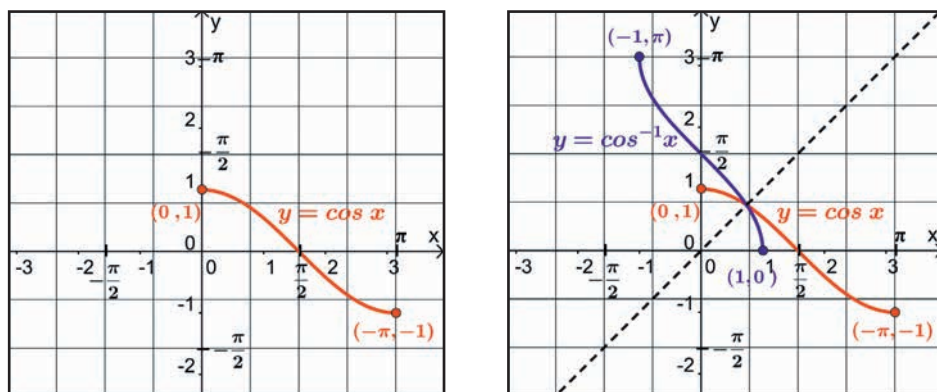


Figura 9

Para la tangente, el dominio se restringe al intervalo $(-\pi, \pi)$. La inversa se describe como $y = \tan^{-1} x$ o también como $y = \arctan x$ (figura 10):

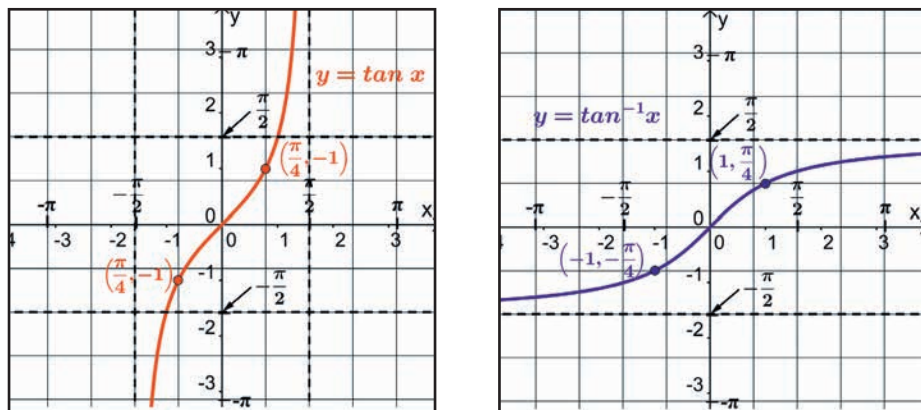


Figura 10



En la figura 11 se muestran las gráficas de $y = \sin^{-1}x$, $y = \cos^{-1}x$, $y = \tan^{-1}x$. Indique dominio y rango de cada una.

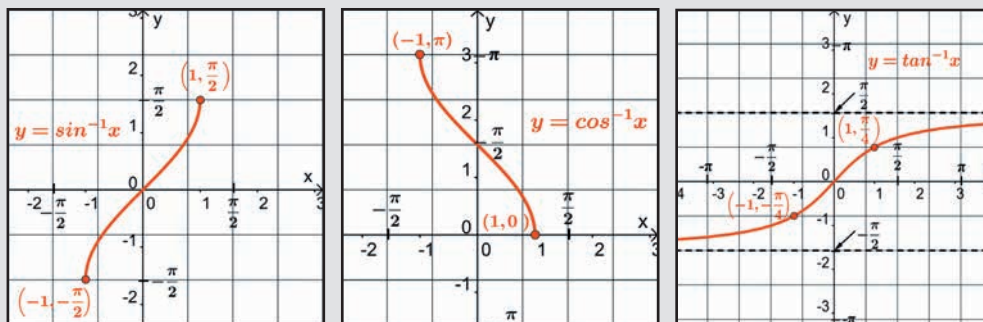
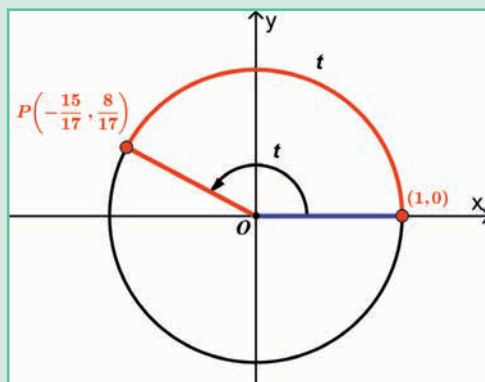


Figura 11

EJERCICIOS

I. Posiciones de P correspondientes a varios números reales se dan en las figuras 12 y 13. Halle los valores de las seis funciones circulares para cada una de ellas.

1)



2)

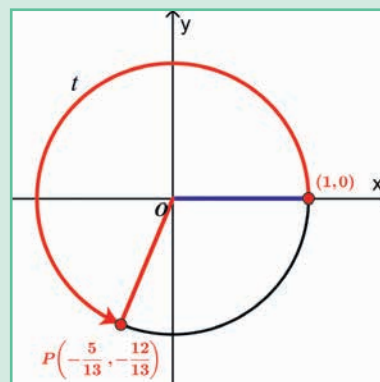


Figura 12

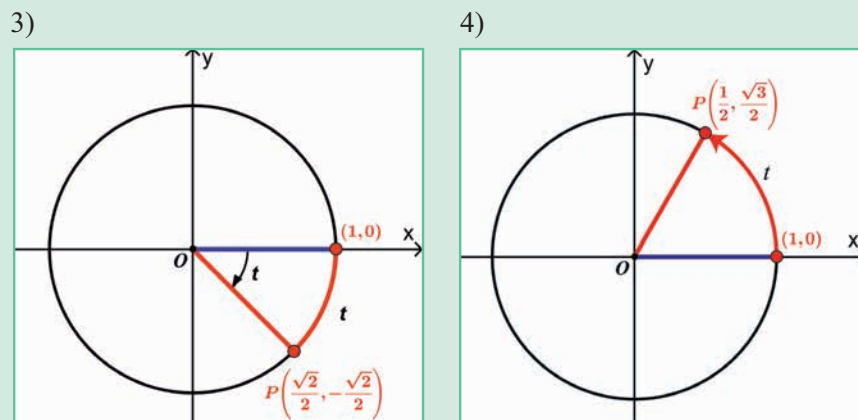


Figura 13

II. Utilice las gráficas de las funciones seno, coseno y tangente para determinar el signo de los valores de las funciones circulares indicadas en la tabla para cada uno de los cuatro cuadrantes:

Función	I	II	III	IV
Seno				
Coseno				
Tangente				

Tabla 1

III. Con las gráficas de las funciones seno y coseno halle todos los números x que satisfacen la desigualdad: $\operatorname{sen} x < \operatorname{cos} x$, para $0 \leq x \leq 2\pi$

IV. Determine qué segmento de la figura 14 corresponde a cada función circular:

a) $\text{Sen } t =$

b) $\text{Cos } t =$

c) $\text{Tan } t =$

d) $\text{Sec } t =$

e) $\text{Csc } t =$

f) $\text{Cot } t =$

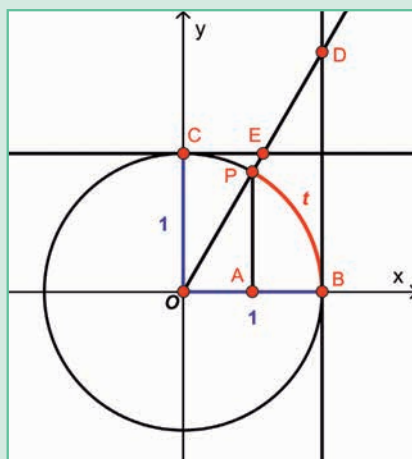


Figura 14

V. Halle los valores funcionales solicitados a partir de la figura:

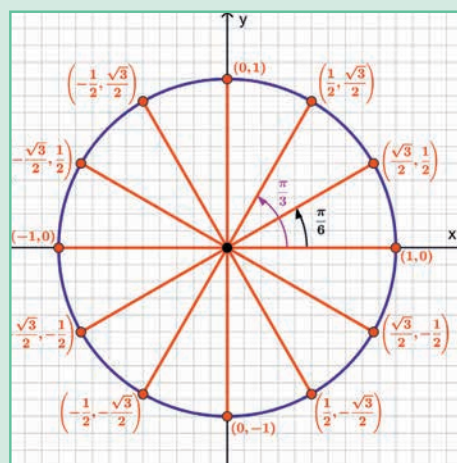


Figura 15

1) $\operatorname{sen} \frac{\pi}{6}$

2) $\operatorname{sen} \frac{\pi}{3}$

3) $\cos \frac{5\pi}{6}$

4) $\cos \frac{2\pi}{3}$

5) $\tan \pi$

6) $\tan 0$

7) $\csc \frac{7\pi}{6}$

8) $\csc \frac{4\pi}{3}$

9) $\sec \frac{11\pi}{6}$

10) $\sec \frac{5\pi}{3}$

11) $\operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}$

12) $\cos \frac{3\pi}{2}$

VI. Calcule:

1) $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

2) $\operatorname{sen}^{-1} 0$

3) $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

4) $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

5) $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

6) $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

7) $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

8) $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

9) $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

10) $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

11) $\cos^{-1} 0$

12) $\cos^{-1} 1$

13) $\tan^{-1} 0$

14) $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

15) $\tan^{-1} 1$

16) $\tan^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

17) $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$

18) $\tan^{-1}(-1)$

4.4 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

ACTIVIDAD INICIAL



Observe las cuatro situaciones de la figura 1. Describa la información gráfica y formule preguntas apropiadas que las conviertan en problemas.

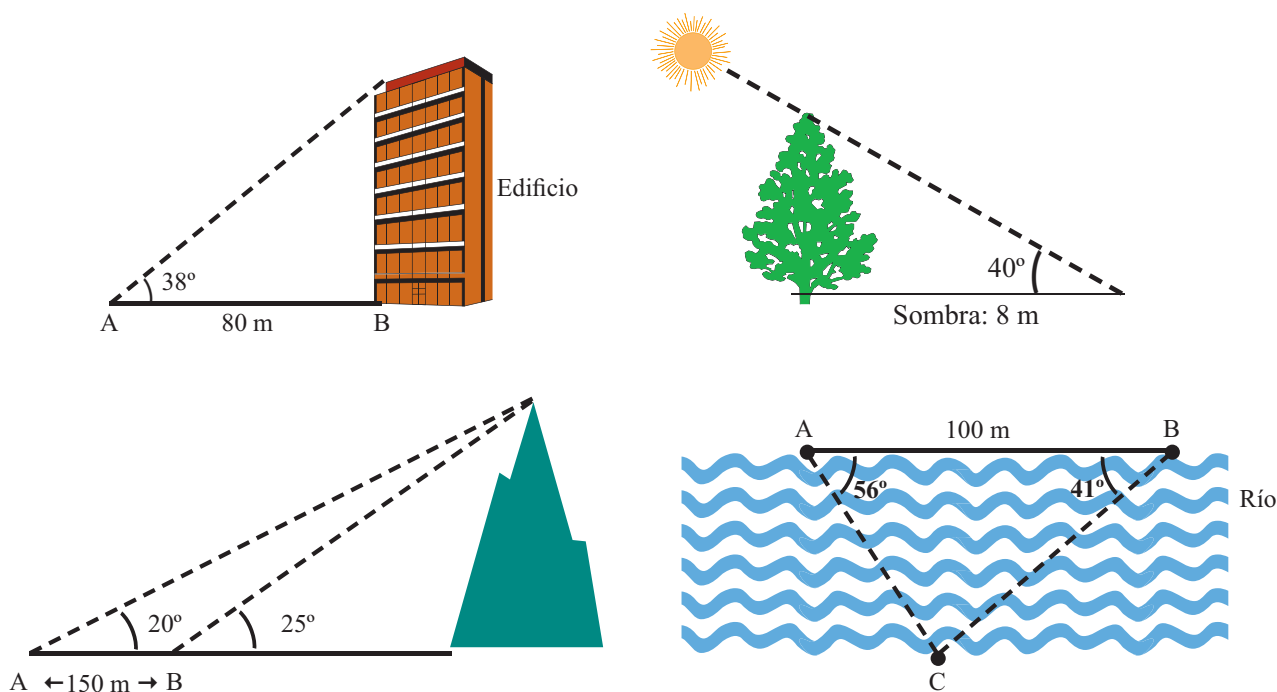


Figura 1

En esta sección veremos cómo calcular elementos desconocidos de *triángulos* (polígonos de tres lados) que permiten contestar preguntas como las asociadas a las situaciones anteriores. Revisemos en primer lugar algunos conocimientos básicos relacionados con los triángulos.



En el triángulo ABC de la figura 2 identifique cada concepto: *lado*, *ángulo*, *lado opuesto a un ángulo*. Si B es el mayor de los ángulos, ¿cuál es el mayor de los lados?

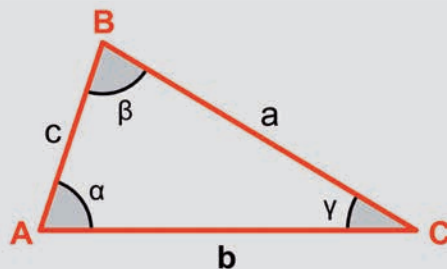


Figura 2



Dibuje ejemplos de *tipos de triángulo según los lados* (equilátero, isósceles, escaleno).



Dibuje ejemplos de *tipos de triángulos según los ángulos* (acutángulo, obtusángulo, rectángulo).

Determine β , θ , x (figuras 3, 4 y 5):

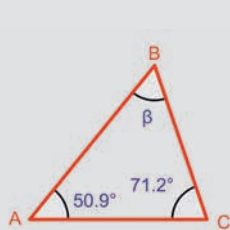


Figura 3

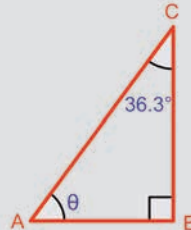


Figura 4

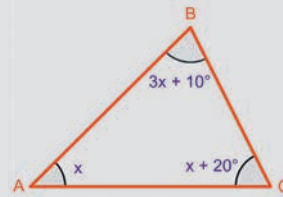


Figura 5

Con relación al *triángulo rectángulo* de la figura 6, indique cuáles son, la *hipotenusa*, los *catetos* y escriba la *relación pitagórica* entre los lados.

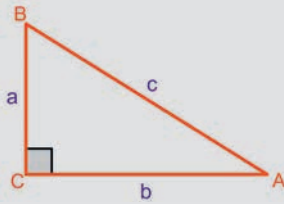


Figura 6

Determine el valor de x en cada caso (figuras 7, 8 y 9):

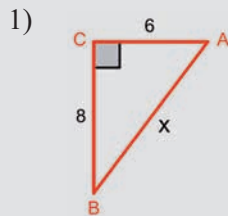


Figura 7

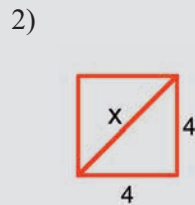


Figura 8

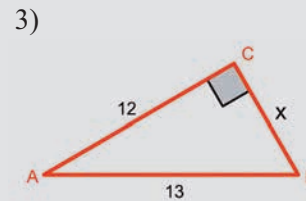


Figura 9

1 Letras del alfabeto griego: A α alfa; B β beta; Γ γ gamma; Δ δ delta; E ε épsilon; Z ζ dseta; H η eta; Θ θ zeta; I ι iota; K κ kappa; Λ λ lambda; M μ mi; N ν ni; Ξ ξ xi; O ómicron; Π π pi; P ρ ro; Σ σ sigma; T τ tau; Υ τ ípsilon; Φ φ fi; X χ ji; Ψ ψ psi; Ω ω omega.

✎ Exprese en términos de b , los lados que faltan en los triángulos rectángulos especiales de 60° (triángulo ADB) y 45° (triángulo ADB) (figuras 10 y 11):

Triángulo equilátero ABC

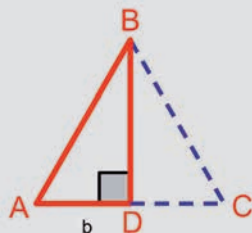


Figura 10

Cuadrado ACBD

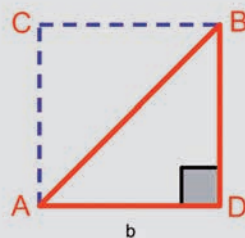


Figura 11

✎ Halle x , y , z , w (figuras 12 y 13):

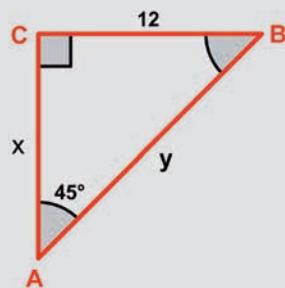


Figura 12

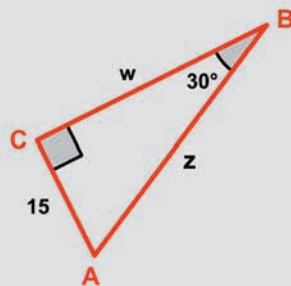


Figura 13

Rotaciones de un lado con respecto al otro permiten considerar ángulos de cualquier medida. Los ángulos de la figura 14 se encuentran en *posición estándar*, esto es, con vértice en el origen y lado inicial en el eje x :

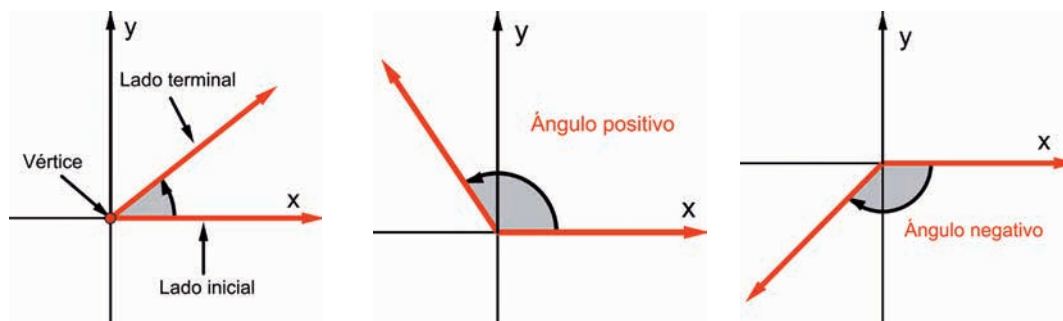


Figura 14



Dibuje ángulos de 45° , 90° , 180° , 270° , 360° , -45° , -120° y 405° , en los planos de la figura 15:

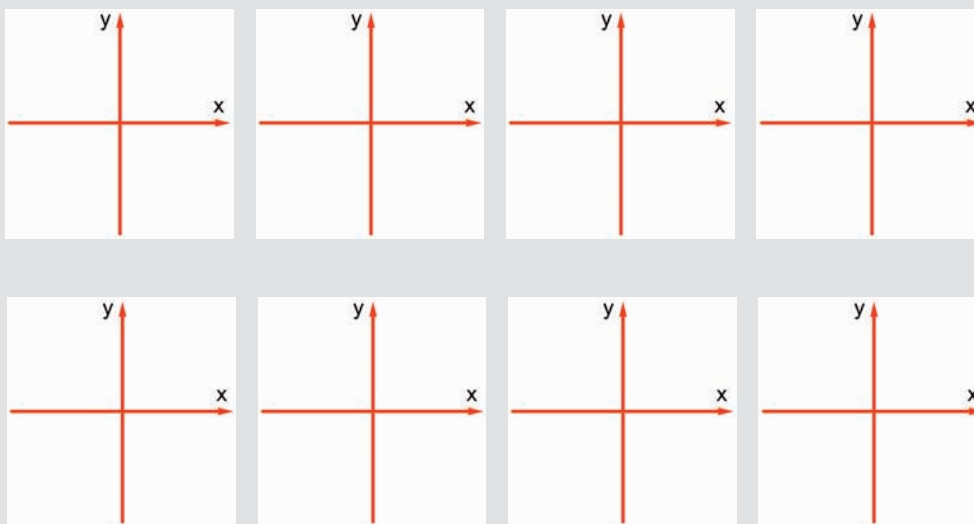


Figura 15

La medida angular utilizada en los ejemplos anteriores es la *sexagesimal*; otra medida para los ángulos, especialmente útil en cálculo, es la de los *radianes*:

Si se traza un círculo unitario con centro en el vértice del ángulo y el arco interceptado es de longitud 1, entonces el ángulo central correspondiente es un ángulo de **1 radián**.

Por tanto: *la medida del ángulo central, en radianes, en el círculo unitario, la da la longitud del arco* (figura 16):

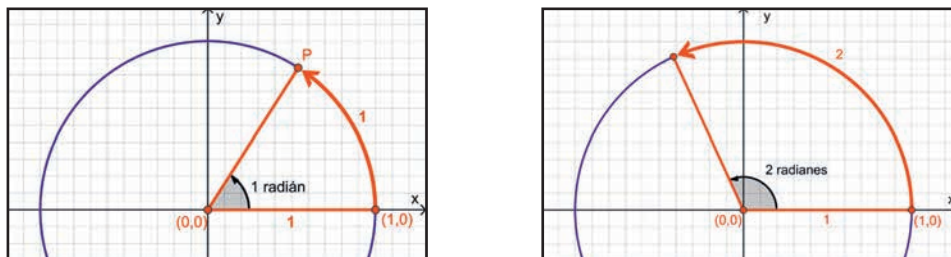


Figura 16

¿A cuántos grados equivale un ángulo de 1 radián?

Una primera estimación la conseguimos trazando un triángulo equilátero de lado 1, como en la figura 17:

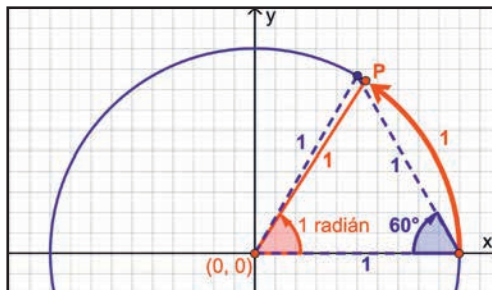


Figura 17

Observamos que el ángulo de un radián es de un poco menos de 60° .

Una mejor aproximación la obtenemos teniendo en cuenta que cuando el arco es toda la circunferencia, o sea cuando el arco mide $2 \cdot \pi \cdot 1 = 2\pi$, el ángulo central es un ángulo de 360° . Planteamos entonces la regla de tres:

Radianes	Grados
2π	360
1	x

Resolviendo tenemos: $x = \frac{1 \cdot 360}{2\pi} \cong 57.296^\circ$

Luego,

$1 \text{ radián} \cong 57.296^\circ$

¿Cómo convertir medidas angulares de grados a radianes y viceversa?

Podemos proceder con una regla de tres como la formulada anteriormente en la que a un ángulo de 2π radianes le corresponde un ángulo de 360 grados, o en forma equivalente pero más abreviada, que un ángulo de π radianes corresponde a un ángulo de 180 grados. Por ejemplo, veamos a cuántos radianes equivale un ángulo de 60° .

Radianes	Grados
π	180
x	60

Resolviendo la regla de tres:

$$x = \frac{60 \cdot \pi}{180} = \frac{\pi}{3} \cong 1.05$$

Se acostumbra dar el resultado como una fracción de π . Por tanto, decimos que un ángulo de 60° equivale a un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ radianes.



Dé la medida en radianes de los ángulos de la figura 18:

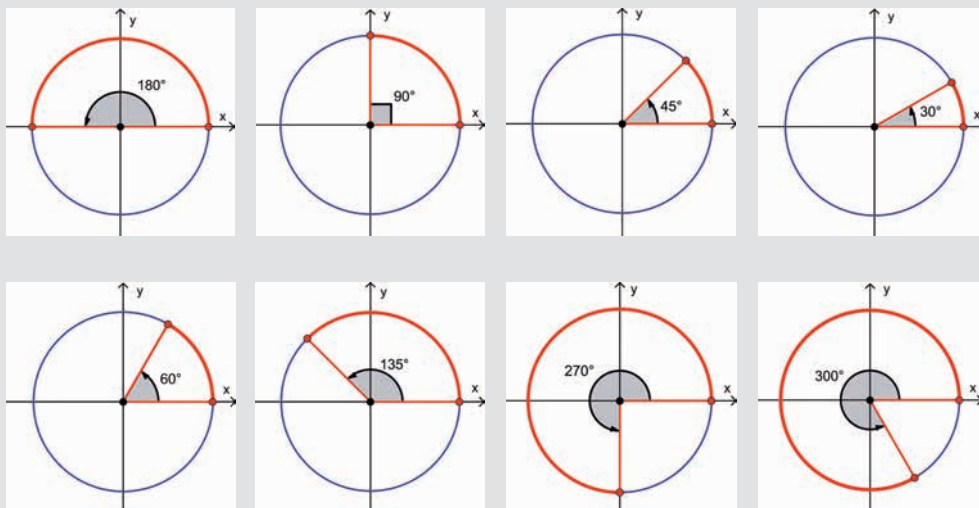


Figura 18

4.4.1 SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Dos triángulos son *semejantes* si los ángulos de uno de ellos miden lo mismo que los del otro. Por ejemplo, los triángulos ABC y DEF de la figura 19 son semejantes ya que $\text{med } \angle A = \text{med } \angle D$, $\text{med } \angle B = \text{med } \angle E$, $\text{med } \angle C = \text{med } \angle F$.

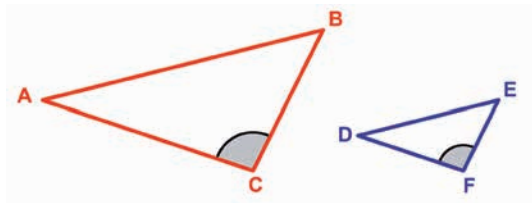


Figura 19

Observemos que el triángulo ABC es como una “ampliación fotográfica” del triángulo DEF. Los lados opuestos a los pares de ángulos que son iguales se llaman lados *corres-*

pendientes. En este ejemplo los lados AB, BC y CA del triángulo ABC son correspondientes a los lados DE, EF y FD del triángulo DEF, respectivamente.

Es importante resaltar en los triángulos semejantes que *los lados correspondientes son proporcionales*, lo cual quiere decir que la ampliación de los lados se hace por el mismo factor. Si en este caso $\frac{AB}{DE} = 2$ (el lado AB es el doble de DE), entonces $\frac{BC}{EF} = 2$ (el lado BC es el doble de EF) y $\frac{CA}{FD} = 2$ (el lado CA es el doble de FD). Luego:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$$

La propiedad de la proporcionalidad de los lados en triángulos semejantes se ha usado desde el antiguo Egipto para calcular, por ejemplo, alturas. Así, conociendo la altura de una persona se puede estimar la altura de otro objeto cercano (un árbol, un muro) midiendo las sombras respectivas. En la figura 20 se da una información particular (los triángulos ABC y DEF se consideran semejantes ya que debido a la lejanía del sol los rayos llegan casi paralelamente en B y en E).

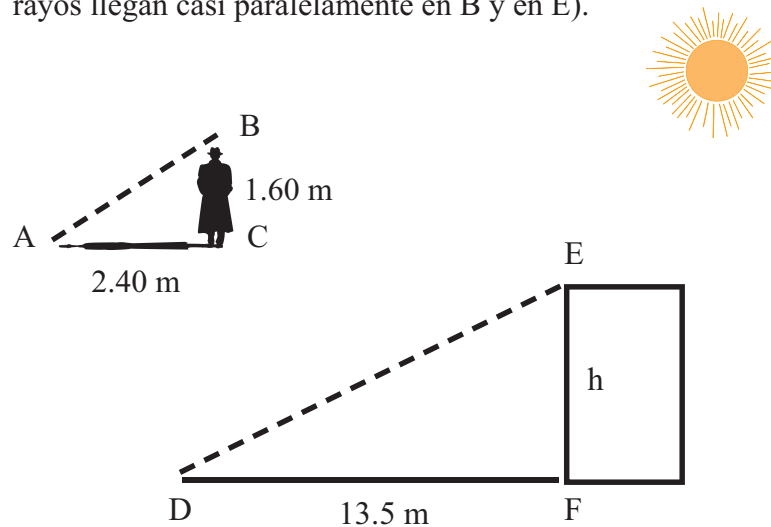


Figura 20

$$\frac{1.60}{2.40} = \frac{h}{13.5}$$

$$h = \frac{1.60 \cdot 13.5}{2.4}$$

$$h = 9$$

Por tanto, la altura del edificio es 9 m.

4.4.2 TRIGONOMETRÍA DE LOS TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS



Mida los lados de los dos triángulos de la figura 21 y escriba en la tabla 1 los cocientes o razones indicados (redondee a una cifra decimal):

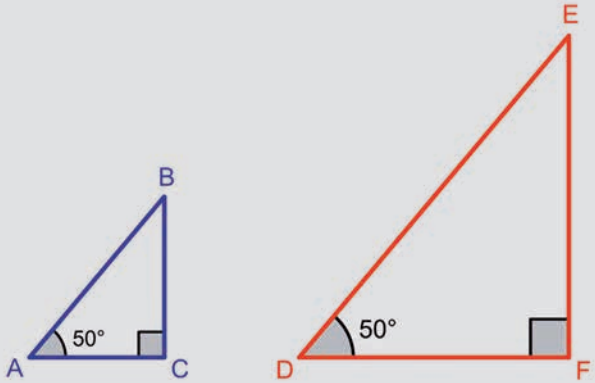


Figura 21

	Triángulo ABC	Triángulo DEF
$\frac{\text{cateto opuesto al ángulo de } 50^\circ}{\text{hipotenusa}}$		
$\frac{\text{cateto adyacente al ángulo de } 50^\circ}{\text{hipotenusa}}$		
$\frac{\text{cateto opuesto al ángulo de } 50^\circ}{\text{cateto adyacente al ángulo de } 50^\circ}$		

Tabla 1

Observe que los resultados en las dos columnas son muy parecidos (intente dar una explicación de esto antes de continuar la lectura).

Como los dos triángulos tienen los mismos ángulos (50° , 90° y 40°), ellos son semejantes. Por tanto, los lados son proporcionales. Por ejemplo, $\frac{DF}{AC} = \frac{DE}{AB}$, proporción que se puede escribir también como $\frac{DF}{DE} = \frac{AC}{AB}$. Esto explica la coincidencia en los resultados de la primera fila. Los demás se explican de manera similar.

De lo anterior apreciamos que los resultados de esos cocientes dependen solo del ángulo, no del tamaño de los triángulos. A esos cocientes obtenidos para cada ángulo agudo de un triángulo rectángulo se les da un nombre especial:

Cocientes o razones trigonométricas	Forma simplificada
seno del ángulo = $\frac{\text{cateto opuesto al ángulo}}{\text{hipotenusa}}$	$\text{sen } \alpha = \frac{\text{co}}{\text{h}}$
coseno del ángulo = $\frac{\text{cateto adyacente al ángulo}}{\text{hipotenusa}}$	$\text{cos } \alpha = \frac{\text{ca}}{\text{h}}$
tangente del ángulo = $\frac{\text{cateto opuesto al ángulo}}{\text{cateto adyacente al ángulo}}$	$\text{tan } \alpha = \frac{\text{co}}{\text{ca}}$

Tabla 2



De acuerdo a las definiciones dadas y los resultados de la tabla 1, complete:

$$\cos 50^\circ \cong$$

$$\tan 50^\circ \cong$$

$$\text{sen } 50^\circ \cong$$

Compare con los resultados de la calculadora (modo angular DEG).

Establezca seno, coseno y tangente de α y de β en el triángulo de la figura 22:

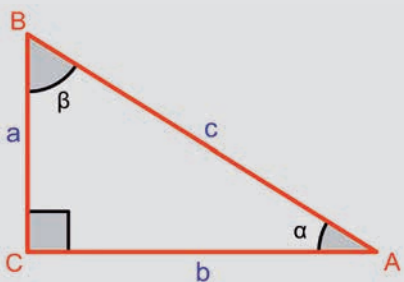


Figura 22

Halle seno, coseno y tangente de 45° , 60° y 30° (figura 23). Compare con la calculadora.

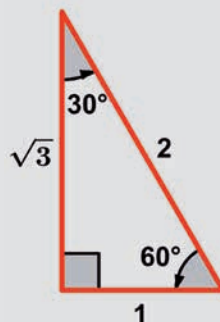
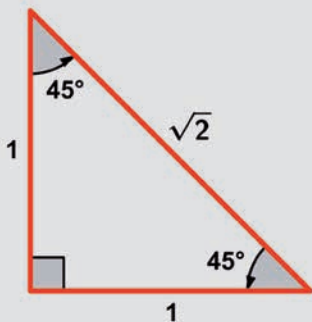


Figura 23

Veamos cómo hallar los lados o ángulos desconocidos en un triángulo rectángulo

Ejemplo

Encuentre los lados b , c y el ángulo β del triángulo de la figura 24:

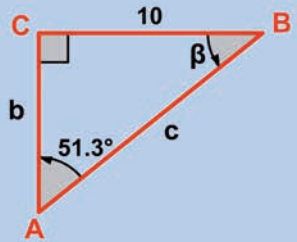


Figura 24

$$\begin{aligned}\beta &= 90 - 51.3 = 38.7^\circ & \tan 51.3 &= \frac{10}{b} \\ \sen 51.3 &= \frac{10}{c} & b &= \frac{10}{\tan 51.3} \\ c &= \frac{10}{\sen 51.3} & b &\approx 8 \\ c &\approx 12.8 & &\end{aligned}$$



Encuentre los lados o ángulos desconocidos en el triángulo rectángulo ACB:

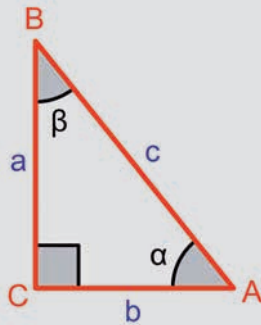


Figura 25

$$1) \beta = 70^\circ \quad a = 9.5 \quad 2) \alpha = 48^\circ \quad b = 6$$

$$3) \alpha = 15.5^\circ \quad c = 17 \quad 4) \beta = 67.4^\circ \quad c = 19.5$$

Cuando se hizo la definición de seno, coseno y tangente, esta se hizo independiente de la medida angular. Así, por ejemplo, $\sen 45^\circ = \sen \frac{\pi}{4} \text{ rad} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Como un ángulo de 1° y uno de 1 radián no miden lo mismo (figura 26), tengamos cuidado en tener presente que $\sen 1^\circ \neq \sen 1 \text{ rad}$.

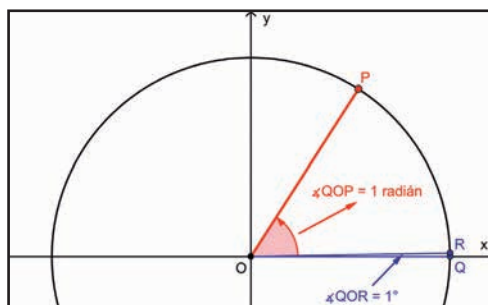


Figura 26

En la sección encontramos que se definió el seno y el coseno de un número real en términos de las coordenadas: $x = \cos t$, $y = \sin t$.

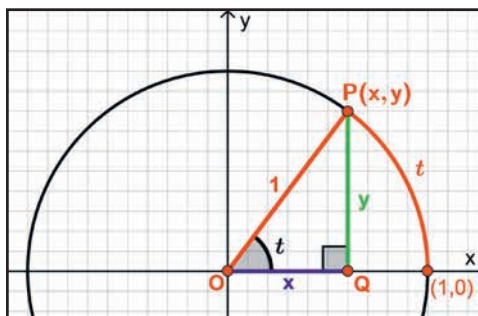


Figura 27

El ángulo central determinado por el arco de longitud t es de t radianes. En el triángulo rectángulo OPQ tenemos que:

$$\operatorname{sen} t = \frac{y}{1} = y$$

$$\operatorname{cost} = \frac{x}{1} = x$$

Observemos que las dos formas de definir seno y coseno para ángulos agudos coinciden.

4.4.3 PROBLEMAS DE APLICACIÓN

Retomemos las 4 situaciones del comienzo de esta sección colocando enunciados que las convierten en problemas que se resuelven usando funciones trigonométricas, pero antes aclaremos dos términos que emplearemos en los enunciados:

Si un observador se encuentra mirando un objeto, la línea desde el ojo del observador hasta el objeto se denomina *línea visual*.

Cuando el objeto observado está *encima* de la horizontal, el ángulo formado por la *línea visual* y la *horizontal* es un *ángulo de elevación*.

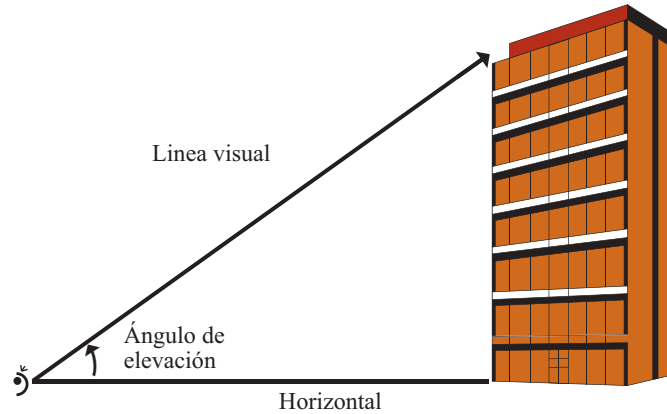


Figura 28

Cuando el objeto observado está *abajo* de la horizontal, el ángulo formado por la *línea visual* y la *horizontal* es un *ángulo de depresión*.

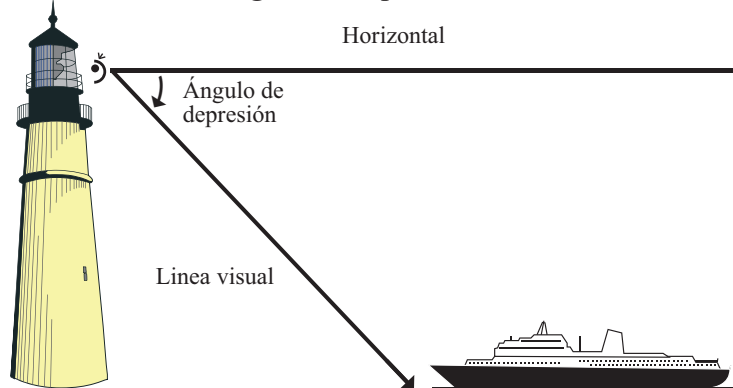


Figura 29

Ejemplo 1

Desde un punto A situado a 80 metros de la base de un edificio (figura 30) se determina que el ángulo de elevación es de 38° . ¿Cuál es la altura del edificio?

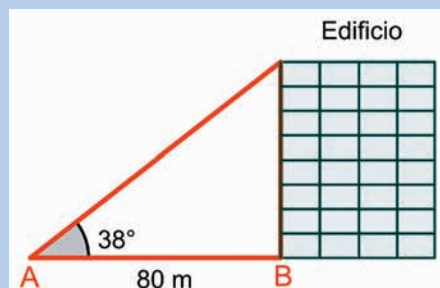
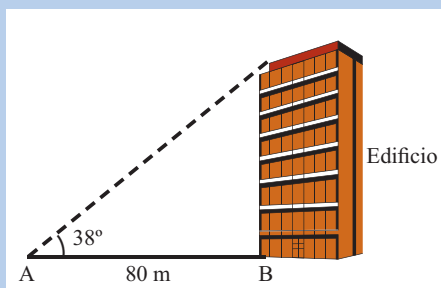


Figura 30

Solución

Consideramos el triángulo rectángulo BAC, en el que podemos identificar:

$\alpha = 38^\circ$, cateto adyacente el lado $BA = 80$ y cateto opuesto h .

Utilizamos tangente de un ángulo:

$$\tan \alpha = \frac{\text{co}}{\text{ca}}$$

$$\tan 38 = \frac{h}{80}$$

$$h = 80 \tan 38$$

$$h = 62.5$$

La altura del edificio es de 62.5 metros.

Ejemplo 2

Un árbol ubicado en un terreno plano proyecta una sombra de 8 metros. Si el ángulo de elevación del sol es de 40° , ¿cuál es la altura del árbol?

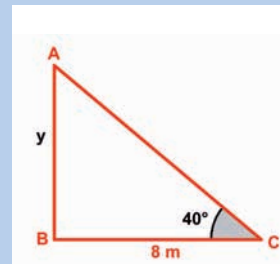
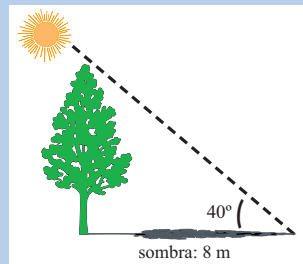


Figura 31

Solución

Al trasladar los datos a un esquema observamos que se conoce un ángulo y el cateto adyacente, y se necesita hallar el cateto opuesto por lo que podemos utilizar

$\tan \alpha = \frac{\text{CO}}{\text{CA}}$, así tenemos:

$$\tan 40 = \frac{y}{8}$$

$$8 \tan 40 = y$$

$$y = 6.7$$

La altura del árbol es de aproximadamente 6.7 metros.

Ejemplo 3

El extremo de una montaña se observa desde dos puntos A y B con un ángulo de elevación de 20° y 25° respectivamente. Los puntos se encuentran separados 150 m; ¿cuál es la altura de la montaña?

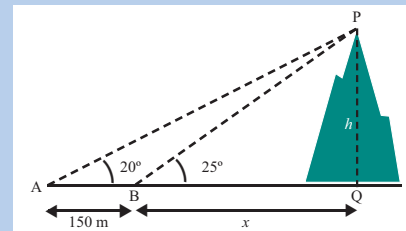
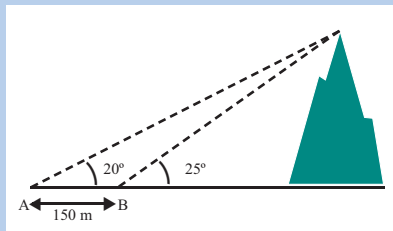


Figura 32

Solución

Nombramos los vértices y así determinamos los triángulos APQ y BPQ rectángulos; escribimos la información dada y seleccionamos el cociente que permita encontrar la altura de la montaña:

Triángulo APQ	Triángulo BPQ
$\alpha = 20^\circ$, co = h, ca = $150 + x$	$\beta = 25^\circ$, co = h, ca = x

Utilizamos *tangente de un ángulo* en cada uno de los triángulos y despejamos x en las ecuaciones que se obtienen:

Triángulo APQ	Triángulo BPQ
$\tan 20 = \frac{h}{150 + x}$	$\tan 25 = \frac{h}{x}$
$150 + x = \frac{h}{\tan 20}$	$x \tan 25 = h$
$x = \frac{h}{\tan 20} - 150$	$x = \frac{h}{\tan 25}$

Igualamos y resolvemos la ecuación:

$$\frac{h}{\tan 20} - 150 = \frac{h}{\tan 25}$$

$$\frac{h}{\tan 20} - \frac{h}{\tan 25} = 150$$

$$h\left(\frac{1}{\tan 20} - \frac{1}{\tan 25}\right) = 150$$

$$h\left(\frac{\tan 25 - \tan 20}{\tan 20 \tan 25}\right) = 150$$

$$h = \frac{150}{\frac{\tan 25 - \tan 20}{\tan 20 \tan 25}}$$

$$h = 150\left(\frac{\tan 20 \tan 25}{\tan 25 - \tan 20}\right)$$

$$h \approx 248.8$$

La montaña tiene una altura aproximada de 248.8 metros.



Escriba un enunciado que convierta en problema la cuarta situación planteada al inicio de la sección y resúelvala usando funciones trigonométricas.

PROBLEMAS

- 1) Una escalera de 18 metros de largo se encuentra recostada sobre un edificio. La base de la escalera se encuentra a 2.5 metros de la base del edificio; ¿cuánto mide el ángulo formado por la escalera y el edificio?
- 2) Desde un punto situado a 12 metros de la base de un edificio se observan, el extremo del edificio con un ángulo de elevación de 26° y el extremo de una antena, ubicada encima del edificio, con un ángulo de elevación de 32° . ¿Cuál es la altura del edificio? ¿Cuánto mide la antena?

- 3) Desde la parte superior de un edificio que mide 35 metros de altura, una persona observa un automóvil que se desplaza frente al edificio. Si el ángulo de depresión cambia de 25° a 48° durante el tiempo que dura la observación, ¿cuánto se ha desplazado el automóvil?
- 4) El ángulo de depresión de una boya desde lo alto de un faro es de 18° . Si la altura del faro es de 25 metros, ¿cuál es la distancia desde la base del faro a la boya?
- 5) El ángulo de elevación de la parte superior de la catedral desde un punto situado a 140 metros de la base de la misma, es de 68° . Determine la altura de la catedral.
- 6) Una rampa que se encuentra en una pista mide 120 metros de largo y se eleva 12 metros. ¿Cuál es el ángulo de inclinación de la rampa?
- 7) Un cable conecta la parte superior de una antena a un punto situado a 15 metros de la base de la antena. El ángulo de elevación formado por el cable es de 70° . ¿Cuál es la longitud del cable? ¿Cuál es la altura de la torre?
- 8) Un edificio proyecta una sombra de 24 metros cuando el ángulo de elevación del sol es de 35° . ¿Cuál es la altura del edificio?
- 9) Un hombre que se encuentra a 85 metros de la base de un edificio, observa el extremo superior con un ángulo de elevación de 38° y a una mujer que se encuentra en una ventana del mismo edificio con un ángulo de elevación de 30° . ¿A qué altura está la mujer? ¿Cuál es la altura del edificio?
- 10) El ángulo de elevación de un avión desde el aeropuerto es de 20° cuando el avión está directamente sobre el radar que se encuentra a 12 km del aeropuerto. ¿Cuál es la altitud del avión cuando se encuentra justo encima del radar?

4.4.4 LEY DE LOS SENOS

Veamos la siguiente situación:

Una represa surte de agua a la ciudad A, a través de un acueducto. Una estación de la ciudad A bombea agua a la ciudad B. Con el fin de mejorar el servicio se planea hacer un acueducto directamente desde la represa hasta la

ciudad B. Si las ciudades y la represa se encuentran ubicadas como muestra la figura 33, ¿qué longitud tendrá el acueducto?

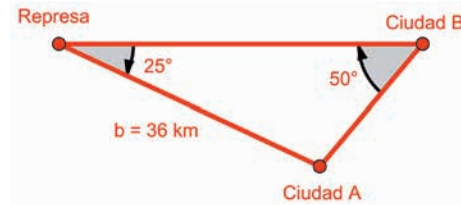


Figura 33

Observamos que se obtiene un triángulo que no es rectángulo, en el que se conocen dos ángulos y el lado correspondiente a uno de ellos. Veamos cómo resolver este tipo de triángulos.

Consideremos el triángulo ABC, figura 34, acutángulo u obtusángulo (el proceso es el mismo si consideramos cualquier triángulo que no sea recto), en el cual trazamos la altura h sobre el lado AB.

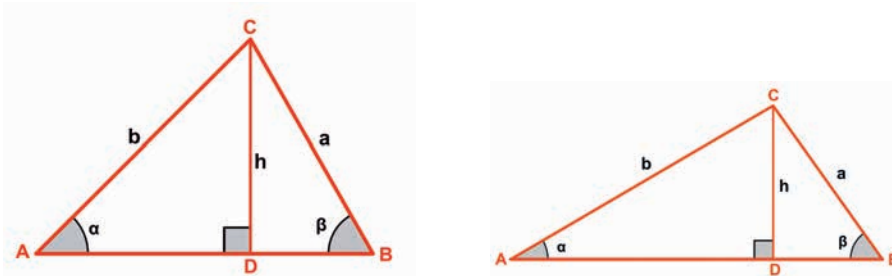


Figura 34

Se determinan dos triángulos rectángulos ADC y BDC, en los cuales se tiene:

triángulo ADC

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{h}{b}$$

$$h = b \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

triángulo BCD

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{h}{a}$$

$$h = a \cdot \operatorname{sen} \beta$$

Igualemos las dos ecuaciones:

$$b \cdot \operatorname{sen} \alpha = a \cdot \operatorname{sen} \beta$$

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{b} \quad (1)$$

Si consideramos alturas sobre los lados BC y AC y seguimos el mismo argumento, tenemos:

$$\frac{\operatorname{sen} \beta}{b} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{c} \quad (2)$$

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{c} \quad (3)$$

De las ecuaciones (1), (2) y (3) tenemos:

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{b} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{c}$$

Cuando en un triángulo se conocen dos lados y el ángulo correspondiente a uno de estos lados, o dos ángulos y el lado correspondiente a uno de los ángulos, podemos encontrar la longitud de los lados y ángulos desconocidos utilizando la *ley de senos*.

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{b} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{c}$$

Ejemplo

En cada uno de los triángulos encuentre la medida de los lados o ángulos que no se conocen (a este proceso se le conoce como resolver triángulos):

1) $\alpha = 117^\circ$ $\gamma = 25^\circ$ $b = 10$

Solución

1)

a=?	b=10	c=?
$\alpha = 117^\circ$	$\beta = ?$	$\gamma = 25^\circ$

Hallamos la medida del ángulo B:

$$\beta = 180 - (\alpha + \gamma) = 180 - (117 + 25) = 38^\circ$$

$$\beta = 38^\circ$$

Hallamos c:

$$\frac{\text{sen } \beta}{h} = \frac{\text{sen } \gamma}{c}$$

$$\frac{\text{sen } 38}{10} = \frac{\text{sen } 25}{c}$$

$$c = \frac{10 \text{ sen } 25}{\text{sen } 38}$$

$$c = 6.9$$

Hallamos a:

$$\frac{\text{sen } \beta}{h} = \frac{\text{sen } \alpha}{a}$$

$$\frac{\text{sen } 38}{10} = \frac{\text{sen } 117}{a}$$

$$a = \frac{10 \text{ sen } 117}{\text{sen } 38}$$

$$a = 14.5$$



Resuelva los siguientes triángulos:

1) $\beta = 85^\circ$ $b = 17$ $c = 14$

2) $\alpha = 34^\circ$ $\beta = 48^\circ$ $c = 25$

Retomemos la situación planteada al iniciar la sección 4.4.4. Si la representamos en un triángulo como el que aparece en la figura 35, podemos establecer qué conocemos y qué debemos hallar.

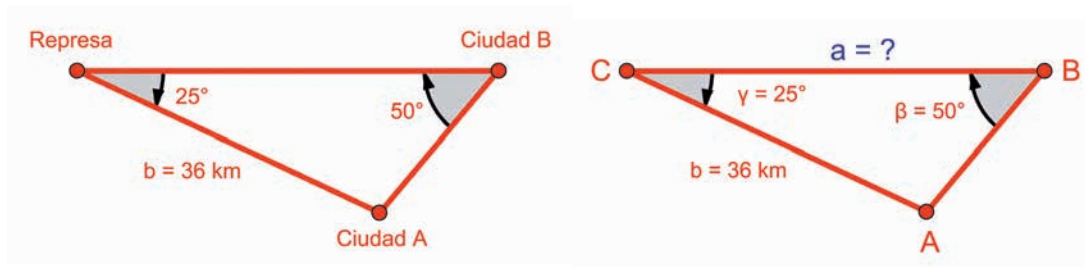


Figura 35

En el triángulo ABC tenemos:

$a = ?$	$b = 36$	$c = ?$
$\alpha = ?$	$\beta = 50^\circ$	$\gamma = 25^\circ$

Como se conocen dos ángulos podemos hallar α :

$$\alpha = 180 - (\beta + \gamma) = 180 - (50 + 25) = 105^\circ$$

Como conocemos un lado y su ángulo correspondiente, podemos utilizar la *ley de senos*; tomamos la proporción que involucre b , β , a , α , ya que no conocemos a .

$$\begin{aligned} \frac{\text{sen } \beta}{b} &= \frac{\text{sen } \alpha}{a} \\ \frac{\text{sen } 50}{36} &= \frac{\text{sen } 105}{a} \\ a &= \frac{36 \text{ sen } 105}{\text{sen } 50} \\ a &\approx 45.4 \end{aligned}$$

La longitud del acueducto que va directamente de la represa a la ciudad B es de aproximadamente 45.4 km.

PROBLEMAS

- 1) Un poste se ha desviado 8 grados de la vertical (figura 36); cuando el ángulo de elevación del sol es de 50° , este proyecta una sombra de 10 metros. ¿Cuánto mide el poste?

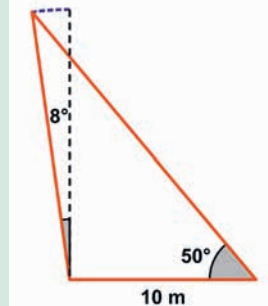


Figura 36

- 2) Dos personas que están separadas 3.5 km observan un globo que se encuentra entre ellos, con ángulos de elevación de 33° y 40° . Determine la distancia de cada una al globo y la altura del mismo.
- 3) La distancia entre los puertos A y C es de 6 km. Un bote sale de A hacia C pasando primero por B, como se muestra en la figura 37. ¿Cuál fue la distancia recorrida por el bote?

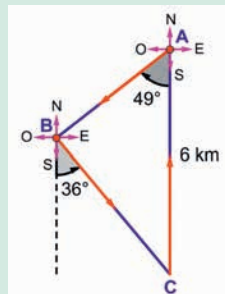


Figura 37

- 4) Una rueda panorámica tiene 20 carros igualmente espaciados. La distancia entre carro y carro es de 4.5 metros. ¿Cuánto mide el radio de la rueda?

- 5) La Torre de Pisa estaba originalmente perpendicular al suelo con una altura de 179 pies. Ahora se ha inclinado un cierto ángulo con respecto a la perpendicular debido al hundimiento del terreno. Cuando se observa la parte alta de la torre desde un punto situado a 150 pies del centro de su base, el ángulo de elevación es de 53.3° . ¿Cuántos grados se ha inclinado la torre y qué tanto se ha movido la parte superior con respecto a la perpendicular?

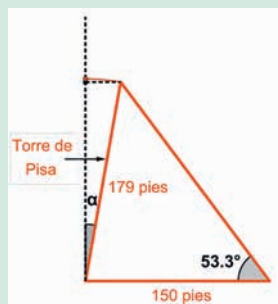


Figura 38

- 6) Los ángulos de elevación a un avión en vuelo se miden desde la parte superior y la base de un edificio que mide 24.5 metros. El ángulo desde la base es de 35° y desde la parte superior es de 31° . ¿A qué altura vuela el avión?
- 7) Un hombre que mide 1.85 m está de pie en una calle que baja en ángulo constante (figura 39). Un poste de alumbrado ubicado directamente detrás de él, forma una sombra de 6.2 m de largo. El ángulo de depresión desde la parte superior del hombre hasta la inclinación de su sombra es de 35° . Halle la inclinación de la calle (β).

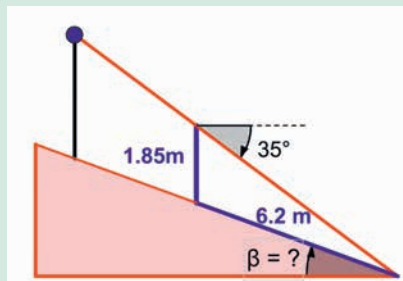


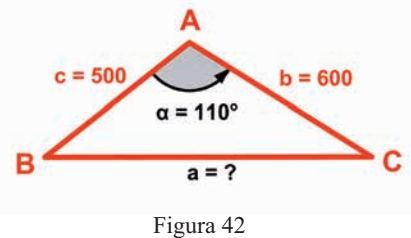
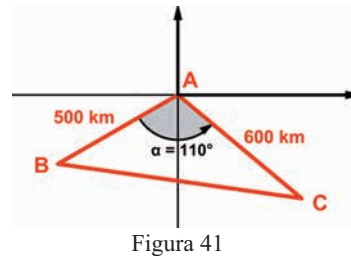
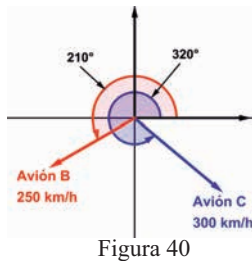
Figura 39

4.4.5 LEY DE LOS COSENOS

Veamos la siguiente situación:

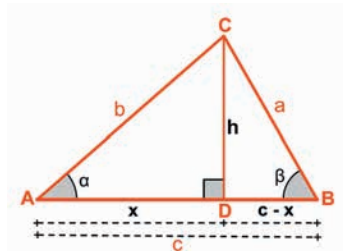
Dos aeroplanos dejan el aeropuerto A al mismo tiempo. El avión B vuela a 250 km/h en una dirección de 210° y el C viaja a 300 km/h en una dirección de 320° . Después de volar durante 2 horas a velocidad constante, ¿a qué distancia se encuentra el avión B del avión C?

Si representamos la anterior situación tenemos el gráfico de la figura 40, el cual podemos transformar en el gráfico de la figura 41 y luego en el triángulo de la figura 42:



Observamos que nuevamente se obtiene un triángulo que no es rectángulo, pero en este se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos, por lo que a no se puede hallar utilizando la ley de los senos. Veamos cómo resolver triángulos cuando nos dan la información del problema o cuando conocemos sus tres lados.

Consideremos el triángulo ABC, figura 43, acutángulo (si es obtusángulo el proceso es el mismo), en el cual trazamos la altura h sobre el lado AB.



Se determinan dos triángulos rectángulos ADC y BDC, en los cuales se tiene:

Triángulo ADC

$$\cos \alpha = \frac{x}{b}$$

$$x = b \cdot \cos \alpha \quad (1)$$

$$x^2 + h^2 = b^2 \quad (2)$$

Triángulo BDC

$$a^2 = (c - x)^2 + h^2$$

$$a^2 = c^2 - 2cx + x^2 + h^2$$

$$a^2 = c^2 - 2cx + (x^2 + h^2) \quad (3)$$

Remplazamos (1) y (2) en (3):

$$a^2 = c^2 - 2cx + (x^2 + h^2)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

Si consideramos alturas sobre los lados BC y CA y procedemos de manera similar obtenemos las ecuaciones:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Resumiendo lo anterior:

Cuando en un triángulo se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre los lados, o los tres lados, podemos encontrar la longitud del lado y la medida de los ángulos desconocidos utilizando la *ley de cosenos* utilizando una de las ecuaciones de acuerdo con la información que se tenga.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Ejemplo

En cada uno de los triángulos encuentre la medida de los lados o ángulos que no se conocen:

1)

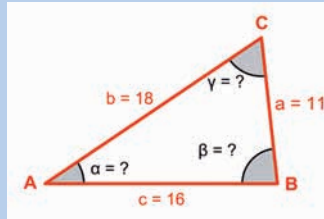


Figura 44

2)

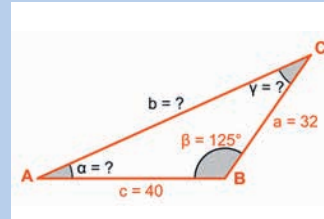


Figura 45

Solución

$$1) \ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$11^2 = 18^2 + 16^2 - 2 \cdot 18 \cdot 16 \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{11^2 - 18^2 - 16^2}{-2 \cdot 18 \cdot 16}$$

$$\alpha = 37.2^\circ$$

Hallamos β , podemos utilizar la ley de senos o cosenos:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$18^2 = 11^2 + 16^2 - 2 \cdot 11 \cdot 16 \cos \beta$$

$$\cos \beta = \frac{18^2 - 11^2 - 16^2}{-2 \cdot 11 \cdot 16}$$

$$\beta = 81.3^\circ$$

Hallamos γ :

$$\gamma = 180 - (\alpha + \beta)$$

$$\gamma = 180 - (37.2 + 81.3)$$

$$\gamma = 61.5^\circ$$

$$2) \ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$b^2 = 32^2 + 40^2 - 2 \cdot 32 \cdot 40 \cos 125$$

$$b = 64$$

Hallamos α , podemos utilizar la ley de senos o cosenos:

$$\frac{\sin 125}{64} = \frac{\sin \alpha}{32}$$

$$\sin \alpha = \frac{32 \sin 125}{64}$$

$$\alpha = 24.2^\circ$$

Hallamos γ :

$$\gamma = 180 - (\alpha + \beta)$$

$$\gamma = 180 - (24.2 + 125)$$

$$\gamma = 30.8^\circ$$



Resuelva los siguientes triángulos de acuerdo con la información dada:

1) $a = 35$ $b = 28$ $\gamma = 62^\circ$

2) $a = 22$ $b = 26$ $c = 34$

Volvamos al problema planteado al inicio de la sección 4.4.5.

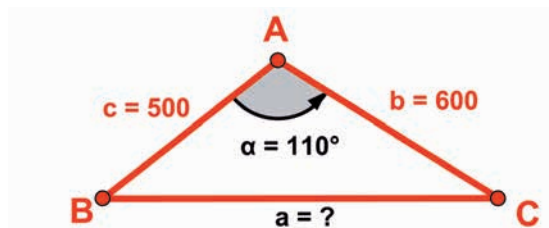


Figura 46

En el triángulo ABC tenemos:

$a = ?$	$b = 600$	$c = 500$
$\alpha = 110^\circ$	$\beta = ?$	$\gamma = ?$

Como se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos, podemos usar la ley de cosenos; tomamos la primera ecuación para hallar el valor de a , ya que conocemos b , c y α .

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$a^2 = 600^2 + 500^2 - 2 \cdot 600 \cdot 500 \cos 110^\circ$$

$$a = 902.9 \text{ km}$$

Por tanto, después de 2 horas de vuelo, el avión B se encuentra a 902.9 km del avión C.

PROBLEMAS

- 1) Dos automóviles salen de una ciudad al mismo tiempo y circulan en carreteras rectas que forman un ángulo de 82° . Si viajan a 60 y 50 km/h respectivamente, ¿a qué distancia se encuentran a los 12 minutos?
- 2) Un terreno tiene forma triangular con lados de 410, 320 y 160 metros de longitud. ¿Cuál es el ángulo más pequeño del terreno?
- 3) Un barco sale de un puerto a las 11 a.m. y navega en dirección S 34° E, a una velocidad de 40 km/h. Otro barco sale del mismo puerto a las 11:30 a.m. y navega en dirección S 23° O a 35 km/h. ¿a qué distancia se encuentran entre sí a las 12 m.?
- 4) Las dimensiones de una caja rectangular son 16, 12 y 8 cm. ¿Cuánto mide el ángulo formado por una diagonal de la base y una diagonal del lado?
- 5) Los lados de un rombo miden 16 cm y el ángulo en uno de los vértices es de 64° . Halle las longitudes de las diagonales.
- 6) Un bote zarpa desde un puerto P hacia un puerto Q el cual se encuentra ubicado a 120 millas en dirección N 47° E. Después de navegar 70 millas el capitán observa el rumbo en el que se encuentra navegando, N 57° E; lo corrige para continuar hacia su destino, el puerto Q. ¿En que dirección debe continuar el viaje? ¿Cuántas millas le faltan para arribar al puerto de destino?

EJERCICIOS FINALES DE LA UNIDAD 4

- 1) La gráfica de dos funciones periódicas se muestran en la figura 1:

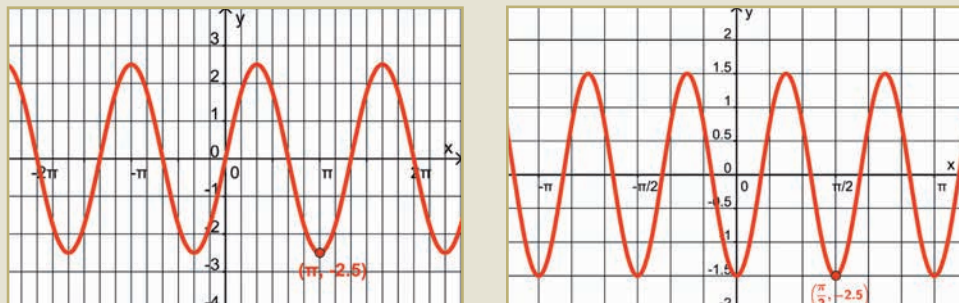


Figura 1

- Halle la amplitud y el período de cada una.
 - Expresa cada función en la forma $y = a \operatorname{sen}(bx)$.
- 2) La profundidad del agua en una parte de una bahía durante un día, varía como se muestra en la figura (debido a las mareas). El tiempo está dado en horas y la profundidad en metros.

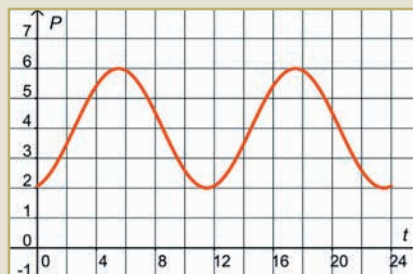


Figura 2

Halle una función sinusoidal que modele la profundidad P en el tiempo t .

3) Determine amplitud y período y trace la gráfica de cada función:

a) $y = \frac{2}{3} \operatorname{sen} x$

b) $y = 4 \cos x$

c) $y = -\frac{1}{2} \cos\left(\frac{1}{3}x\right)$

d) $y = 2 \operatorname{sen}\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$

e) $y = -4 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

f) $y = -3 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}\right)$

4) Un envase cónico se construye quitando un sector de un círculo con radio 10 cm, como se muestra en la figura 3:

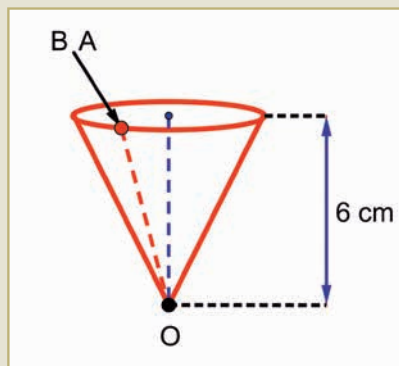
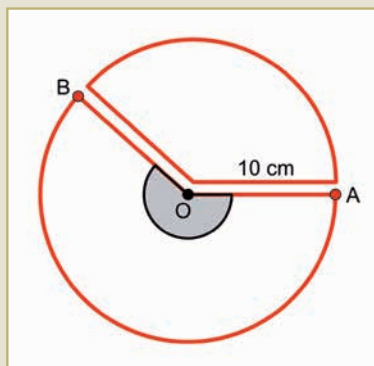


Figura 3

Determine el ángulo AOB para que el envase tenga una profundidad de 6 cm.

5) Determine el número de soluciones de la ecuación:

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x = \pi$$

- 6) Halle los valores de x y de y :

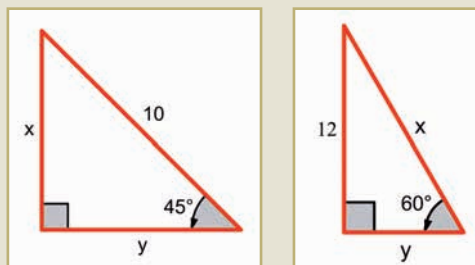


Figura 4

- 7) Cuando la parte más alta de una montaña se ve desde un punto P, como el de la figura 5, el ángulo de elevación es α . Desde un punto Q, situado d kilómetros más cerca, el ángulo de elevación aumenta siendo ahora β :

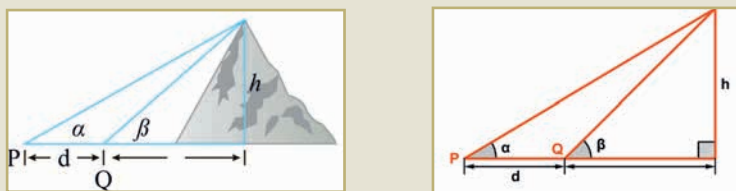


Figura 5

- a) Muestre que la altura h de la montaña está dada por $h = \frac{d}{\cot \alpha - \cot \beta}$
 b) Si $d = 2$ km, $\alpha = 15^\circ$ y $\beta = 20^\circ$, halle la altura de la montaña.
- 8) Halle los valores de los lados y ángulos que faltan, en cada caso, correspondientes a la figura básica:

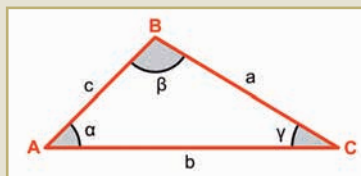


Figura 6

- a) $a = 12$, $\beta = 40^\circ$, $\gamma = 80^\circ$
- b) $a = 12$, $\beta = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$, $\gamma = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$
- c) $a = 8$, $b = 5$, $\gamma = 30^\circ$
- d) $a = 7$, $b = 13$, $c = 8$

9) El triángulo siguiente es isósceles:

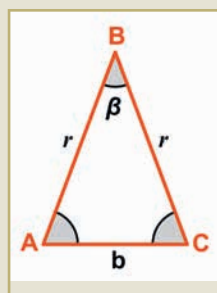


Figura 7

Utilice la ley de los cosenos para demostrar que $b^2 = 4r^2 \left(\frac{1 - \cos \beta}{2} \right)$.

10) Demuestre que el perímetro P de un polígono regular de n lados, inscrito en un círculo de radio r , está dado por la expresión: $P = 2nr \operatorname{sen} \left(\frac{180^\circ}{n} \right)$.

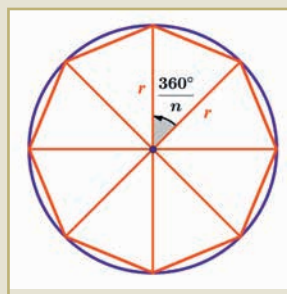


Figura 8

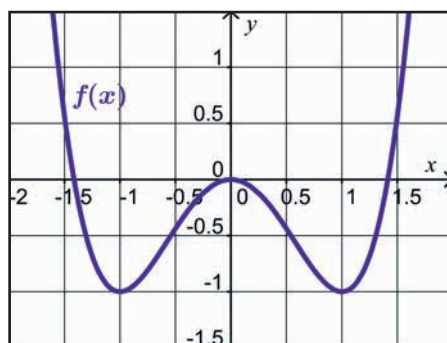
ANEXO**FUNCIONES PARES - FUNCIONES IMPARES**

Figura 1

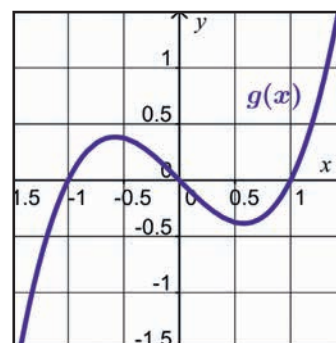


Figura 2

En la sección 1.5 se estudió la reflexión en el eje y , que en algunos casos conduce a una simetría con respecto a dicho eje. En la figura 1 se tiene el caso de una función que al aplicarle una reflexión en el eje y , $f(-x)$, se obtiene la misma gráfica, es decir, la misma función $f(x)$; por tanto se tiene que:

$$f(-x) = f(x)$$

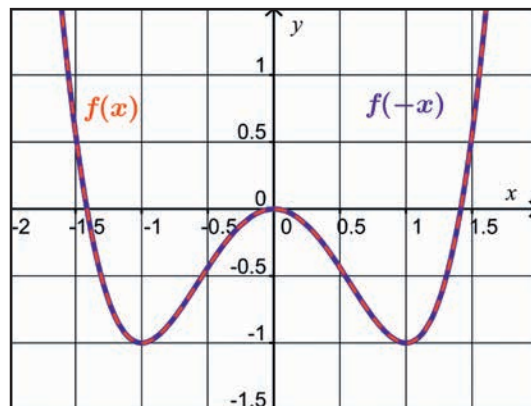


Figura 3

Cuando esto ocurre se dice que la función es *par*.

En la gráfica de g , figura 2, al hacer la misma consideración se obtiene otra gráfica diferente, es decir $g(-x) \neq g(x)$.

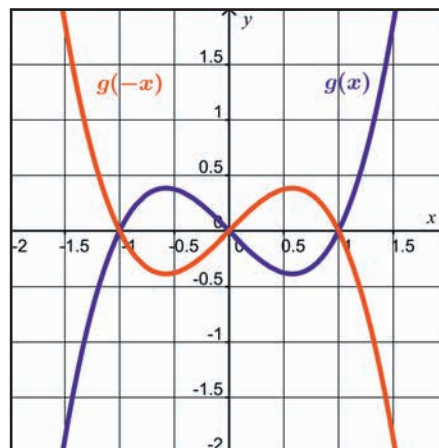


Figura 4

A la gráfica de la figura 2, le hacemos ahora una reflexión en el eje x y obtenemos la gráfica que se muestra en la figura 6, $-g(x)$. Si comparamos esta gráfica con la obtenida en la figura 4, reflexión en el eje y , encontramos que coinciden, es decir $g(-x) = -g(x)$, figura 5 y 6. En este caso la función g es un ejemplo de una función *impar*.

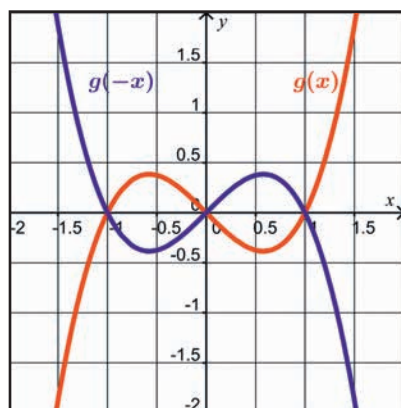


Figura 5

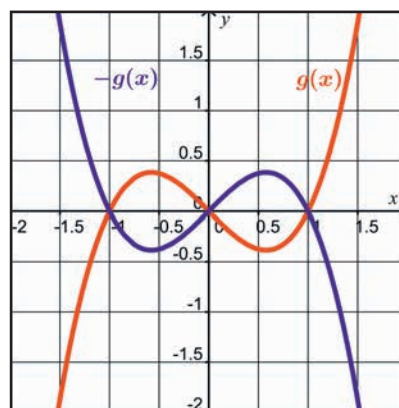


Figura 6

Las funciones impares son simétricas con respecto al origen:

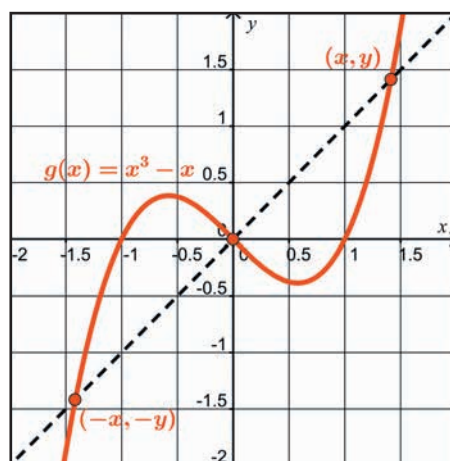


Figura 7

Una función $y = f(x)$ es **par** si, para cada x del dominio de f ,

$$f(-x) = f(x).$$

Una función $y = g(x)$ es **impar** si, para cada x del dominio de g ,

$$g(-x) = -g(x).$$

Veamos algebraicamente por qué la función $f(x) = x^4 - 2x^2$ es una función par.
 Verifiquemos que:

$$\begin{aligned} f(-x) &= f(x) \\ (-x)^4 - 2(-x)^2 &= x^4 - 2x^2 \\ x^4 - 2x^2 &= x^4 - 2x^2 \end{aligned}$$

luego f es una función par.

Ahora por qué $g(x) = x^3 - x$ es una función *impar*.
 Verifiquemos que:

$$\begin{aligned} g(-x) &= -g(x) \\ (-x)^3 - (-x) &= -(x^3 - x) \\ -x^3 + x &= -x^3 + x \end{aligned}$$

luego g es una función impar.

Ejemplo

Determine si la función $h(x) = x^4 - 3x^3 + x - 1$ es una función par o impar.

Solución

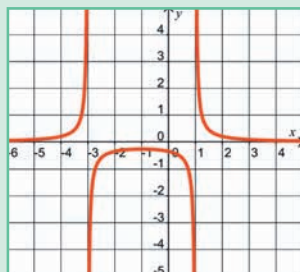
$$h(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^3 + (-x) - 1 = x^4 + 3x^3 - x - 1$$

La función que se obtiene es diferente de $h(x)$ y de $-h(x) = -x^4 + 3x^3 - x + 1$.
 En este caso se dice que la función h no es par ni impar.

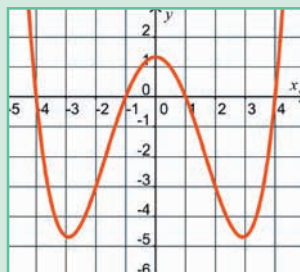
EJERCICIOS

I. Determine si las gráficas de las funciones que se muestran a continuación, representan una función par, impar o ninguna de las dos:

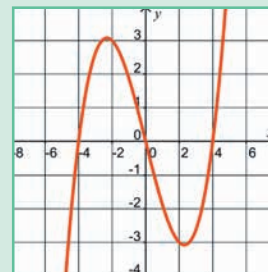
1)



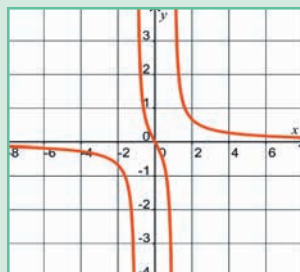
2)



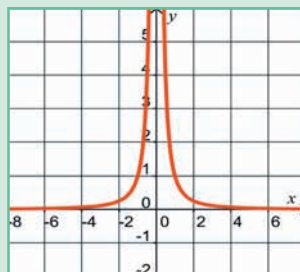
3)



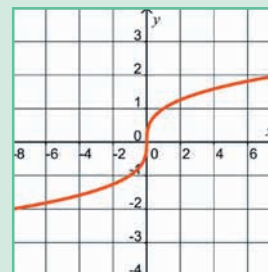
4)



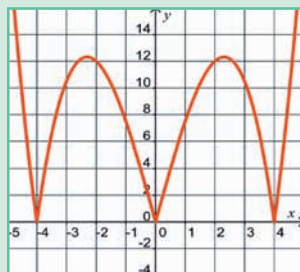
5)



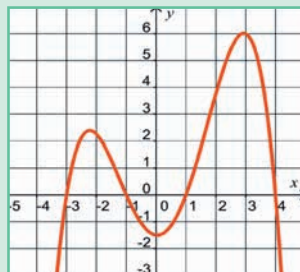
6)



7)



8)



9)

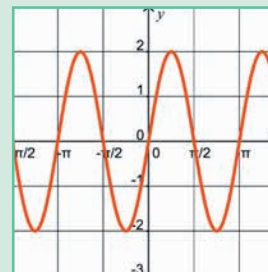


Figura 8

II. Verifique si las siguientes funciones son pares, impares o ninguna de las dos:

1) $f(x) = 3x^6 - 5x^2 - 7$

2) $g(t) = t^5 - 3t^2 + 5t$

3) $p(t) = -2|t| - 3$

4) $m(x) = \sqrt{x+2}$

5) $h(r) = \frac{1+2x}{x}$

6) $r(x) = -2x^3 + 4x$

7) $h(r) = -2r^6 - 3r^4 + r^3 - 6$

8) $r(x) = \frac{x}{x-2}$

III. Muestre que si g es una función, entonces la función P definida por:

$$P(x) = \frac{g(x) + g(-x)}{2}$$

es par.

IV. Muestre que si g es una función, entonces la función Q definida por:

$$Q(x) = \frac{g(x) - g(-x)}{2}$$

es impar.

V. Considere las funciones P y Q para mostrar que:

$$g(x) = P(x) + Q(x)$$

Esto significa que toda función g puede ser expresada como la suma de una función par y una función impar.

BIBLIOGRAFÍA

DEMANA, F.; WAITS, B.; GREGORY, F. y KENNEDY. (2007). *Precálculo, gráfico, numérico, algebraico*. México: Pearson Educación.

LARSON, R. y HOSTETLER, R. (2008). *Precálculo*. México: Reverté Ediciones.

MILLER, C.; HEEREN, V. y HORNSBY, J. (2006). *Matemática: razonamiento y aplicaciones*. México: Pearson Educación.

OCAÑA, A. y PÉREZ, M. (2011). *Matemáticas Básicas*. Bogotá: Universidad Jorge Tadeo Lozano.

PRADO, C.; SANTIAGO, R.; AGUILAR, G.; RODRÍGUEZ, G.; QUEZADA, M. y GÓMEZ, J. (2006). *Precálculo: Enfoque de resolución de problemas*. México: Pearson Educación.

RECAMÁN, B. (2008). *Los números: Una historia para contar*. México D.F.: Taurus.

STEWART, J.; REDIN, L. y SALEEM, W. (2005). *Precálculo*. México: Thomson Learning.



UNIVERSIDAD DE BOGOTÁ
JORGE TADEO LOZANO

www.utadeo.edu.co