

MODELADO Y SIMULACIÓN de sistemas naturales

Favio Cala Vitery
Editor académico

Autores

Carlos Ricardo Bojacá Aldana
Diana Cristina Díaz Guevara
Favio Cala Vitery
Francisco de Paula Gutiérrez Bonilla
Gabriel Villalobos Camargo
Javier Riascos Ochoa
Juanita Burgos Bedout
Rodrigo Gil Castañeda

MODELADO Y SIMULACIÓN

de sistemas naturales



UTADEO

UNIVERSIDAD DE BOGOTÁ JORGE TADEO LOZANO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES E INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

Modelado y simulación de sistemas naturales / Favio Cala Vitery editor académico ; autores Carlos Ricardo Bojaca Aldana ... [et al.]. – Bogotá : Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano. Facultad de Ciencias Naturales e Ingeniería. Departamento de Ciencias Básicas, 2017.
222 p. : il., mapas, gráficas ; 24 cm.

ISBN: 978-958-725-201-9

1. MODELOS MATEMÁTICOS. 2. MÉTODOS DE SIMULACIÓN. 3. SIMULACIÓN POR COMPUTADOR. 4. CIENCIAS NATURALES - MÉTODOS DE SIMULACIÓN.

I. Cala Vitery, Favio, ed. ; Bojacá Aldana, Carlos Ricardo.

CDD511.8

© Fundación Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano
Carrera 4 No 22-61 –PBX: 2427030 –www.utadeo.edu.co

Modelado y simulación de sistemas naturales

ISBN: 978-958-725-201-9

Primera edición: 2017

Rectora: Cecilia María Vélez White

Vicerrectora Académica: Margarita María Peña Borrero

Decano de la facultad de Ciencias Naturales e Ingeniería: Isaac Dyner Rezonzew

Director de Investigación, Creación y Extensión: Leonardo Pineda Serna

Director del Departamento de Ciencias Básicas: Favio Ernesto Cala Vitery

Jefe de Publicaciones: Daniel Mauricio Blanco Betancourt

Coordinador editorial: Jaime Melo Castiblanco

Corrección de estilo: Hernando García Bustos

Coordinación gráfica y diseño: Luis Carlos Celis Calderón

Diseño y diagramación: Francisco Jiménez Montero

Diseño carátula: Claudia Rodríguez

Revisión editorial: Mary Lidia Molina

Impresión Digital: Xpress Estudio Gráfico y Digital

El presente libro es resultado investigación.

Hace parte de la línea de investigación Modelado y simulación de sistemas,
del Departamento de Ciencias Básicas de la Facultad de Ciencias Naturales e Ingeniería

Prohibida la reproducción total o parcial por cualquier medio sin
autorización escrita de la Universidad.

IMPRESO EN COLOMBIA - PRINTED IN COLOMBIA

MODELADO Y SIMULACIÓN de sistemas naturales

Favio Cala Vitery
Editor académico

Autores

Carlos Ricardo Bojacá Aldana
Diana Cristina Díaz Guevara
Favio Cala Vitery
Francisco de Paula Gutiérrez Bonilla
Gabriel Villalobos Camargo
Javier Riascos Ochoa
Juanita Burgos Bedout
Rodrigo Gil Castañeda



UTADEO

UNIVERSIDAD DE BOGOTÁ JORGE TADEO LOZANO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES E INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

Contenido

Prefacio	7
1. Modelado y simulación de sistemas climáticos: desde la escala global hasta los microclimas	11
Diana Cristina Díaz Guevara	
2. Modelos espaciales en cultivos	41
Rodrigo Gil Castañeda y Carlos Ricardo Bojacá Aldana	
3. Modelado del crecimiento de cultivos: experiencias locales para el tomate bajo invernadero	73
Carlos Ricardo Bojacá Aldana y Rodrigo Gil Castañeda	
4. Aspectos merísticos, biométricos y tróficos como indicadores del establecimiento poblacional de <i>Oreochromis niloticus</i>, L. 1758 (<i>Pisces: Cichlidae</i>) en la cuenca hidrográfica del río Sinú, Colombia	101
Francisco de Paula Gutiérrez Bonilla y Juanita Burgos Bedout	
5. Modelos estocásticos en dinámica de poblaciones: introducción y comparación con los modelos determinísticos	137
Javier Riascos Ochoa	
6. Introducción a los modelos mesoscópicos: los modelos estadísticos de fractura y los métodos de agregación en materia suave	165
Gabriel Villalobos Camargo	
7. El modelo de Bohm de la mecánica cuántica	199
Favio Cala Vitery	

Prefacio

El modelado y simulación (M&S) es una disciplina científica transversal que permite obtener un nivel de comprensión difícilmente alcanzable utilizando otro enfoque disciplinar. Al integrar técnicas matemáticas, formales, conceptuales y computacionales, el M&S permite el estudio e investigación en casi cualquier campo del conocimiento. Este libro compendia algunos trabajos y resultados de investigación especialmente orientados hacia el estudio de sistemas naturales. Estos han sido realizados por el grupo de investigación de Modelado y Simulación de Sistemas, de la Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano. Un modelo puede entenderse como una representación, bien sea abstracta, análoga, fenomenológica o idealizada, de un objeto o sistema. Mediante el modelado se busca mejorar el conocimiento y la comprensión de un fenómeno o proceso y ello involucra el estudio de la interacción entre las partes de un sistema y el sistema como un todo. La simulación, por su parte, debe permitir la operación o manipulación matemática y/o computacional del modelo con el fin de representar la sucesión temporal de su comportamiento. El M&S ha revolucionado la ciencia ya que los modelos no son propiamente teorías científicas y las simulaciones no son tampoco propiamente experimentos científicos; pero permiten pulir, calibrar o mejorar las teorías y, si se quiere, mejorar el diseño de experimentos y en muchos casos anticipar los resultados de estos.

Las teorías, en general, están integradas por dos grandes elementos conceptuales no del todo separables: a) un formalismo, es decir,

un aparato matemático con unas reglas operativas para calcular, y b) una interpretación, es decir, una ontología que cuenta, en correspondencia con el formalismo, cuál es la imagen de los fenómenos, de los procesos y del mundo que la teoría pretende describir o explicar conforme al registro experimental. El modelado permite, al nivel de la teoría, acercar el formalismo científico a su interpretación con el fin de lograr una mejor comprensión, explicación y descripción de los sistemas estudiados. La simulación (por computador), con ciertas restricciones, permite representar la evolución del sistema modelado, y en este sentido se ha convertido en una especie de enlace con la experiencia; de experimentación en un laboratorio artificial.

Ejemplos de lo anterior se presentan en los capítulos de este libro. En el primero, se describe el proceso general para modelar sistemas climáticos y se refieren las características de algunos modelos atmosféricos, oceánicos y de microclima. Al final del capítulo se presenta también un ejemplo de modelado y predicción climática usando técnicas estadísticas. En el segundo capítulo se integran dos tipos de modelos aparentemente no relacionados, la geoestadística y el modelado de cultivos, para llevar a cabo un ejercicio de simulación que permite cuantificar el efecto de la variación espacial de la temperatura dentro de invernaderos en el crecimiento de cultivos de tomate. El capítulo tercero recopila los resultados de investigaciones propias en las que se ha utilizado un modelo de simulación del tomate cultivado bajo condiciones de invernadero y calibrado para las condiciones locales con el fin de evaluar diferentes alternativas de climatización en la Sabana de Bogotá. De igual manera se presenta el impacto ambiental que ocasionarían dichas alternativas técnicas en caso de llegar a establecerse en la realidad. En el cuarto, se utilizaron técnicas de modelado matemático con el fin de determinar cuáles de las variables morfológicas, tróficas y reproductivas propias de *O. niloticus* (tilapia) –especie alóctona, procedente de África, e introducida en Colombia con fines de piscicultura comercial en 1977– son las que mayor peso tienen en el comportamiento de la especie, su establecimiento poblacional en la cuenca del río Sinú y las consecuencias biológicas de este. El quinto capítulo introduce al lector en la teoría de los procesos estocásticos,

con énfasis en los procesos conocidos como Cadenas de Markov de Tiempo Continuo (CMTC) e ilustra su aplicación a problemas de dinámica de poblaciones. Allí se muestra que el formalismo por CMTC permite modelar la naturaleza discreta de las variables de estado, es decir, del número de individuos, y la aleatoriedad inherente al fenómeno. En el sexto capítulo se presentan modelos que buscan establecer relaciones cuantitativas entre parámetros a escala nanoscópica y escala mesoscópica mediante el uso de elementos discretos individuales; contrastándolos con métodos como el de los elementos finitos, que usualmente toman promedios macroscópicos de los materiales. Para ello se resaltan las similitudes entre dos aplicaciones específicas: los métodos de agregación para materia suave y los modelos estadísticos de fractura. Estos modelos se han utilizado en campos tan diversos como los medios granulares, el fluido de los líquidos complejos, y la aparición y propagación de fracturas. Finalmente, en el último capítulo se contrastan dos versiones, o modelos, de la mecánica cuántica: el modelo estándar Copenhague, incluido en prácticamente todos los libros de texto, y el modelo de Bohm. Allí se argumenta que el modelo de Bohm, al implicar una representación inteligible del micromundo cuántico, debería considerarse como aquel que permite una ontología, una interpretación, más adecuada de los fenómenos cuánticos no relativistas.

1 ● **Modelado y simulación de sistemas climáticos: desde la escala global hasta los microclimas**

Diana Cristina Díaz Guevara

1.1 Introducción

La obra *Meteorológica*, de Aristóteles, así como *Les meteoros* de Descartes, los escritos de Lavoisier, los experimentos de Benjamín Franklin y más recientemente los estudios de Edward Lorenz son algunas de las evidencias que muestran la pretensión del hombre por comprender el clima y el estado del tiempo. Desde la antigüedad el ser humano ha planteado hipótesis para explicar la dinámica atmosférica debido al papel determinante que tiene para la continuidad de la vida en el planeta. La observación constante y el registro de datos meteorológicos fueron el punto de partida para erigir el conocimiento empírico sobre el comportamiento de la atmósfera que hoy día continúa siendo difundido. Sin embargo, con el avance de la Teoría General de Sistemas (TGS), ciencias como la climatología y la meteorología han adoptado el enfoque sistémico para abordar sus objetos de estudio, que van desde el clima y el tiempo del planeta Tierra hasta el microclima en un invernadero (Pasini, 2009).

En particular, el modelado y simulación del sistema climático de la Tierra es un problema de interés actual, dada la necesidad de predecir su posible comportamiento en las décadas siguientes. Teniendo en cuenta la TGS el sistema climático de la Tierra se define como el

conjunto conformado por cinco componentes principales: la atmósfera, la hidrosfera, la criósfera, la superficie terrestre y la biósfera, los cuales interactúan entre sí a través de procesos físicos, químicos, biológicos y geológicos (IPCC, 2001). El vocabulario aportado por la TGS facilitó e incentivó la formulación de modelos matemáticos para representar y simular la dinámica del clima terrestre considerándolo como un sistema en el cual las relaciones existentes entre todas sus partes se basan en el intercambio de momentum, masa y energía (McGuffie, 2005).

En la actualidad existe gran variedad de modelos del sistema climático de la Tierra, desde lo más sencillos que se centran en el comportamiento de la atmósfera y el océano considerándolos como fluidos ideales, hasta los más complejos que demandan mayor capacidad de cómputo porque incorporan procesos como la turbulencia, la interacción Tierra-atmósfera en la capa límite planetaria, la formación de las capas de hielo, la microfísica de nubes, el uso del suelo, y el ciclo del carbono, entre otros. Los modelos pueden utilizarse para la predicción climática y meteorológica y abarcan desde la escala planetaria hasta la microescala (OMM, 2008; 2011).

Por otra parte, los sistemas climáticos de menor dimensión espacial que son objeto de modelado son aquellos que ocupan un área local caracterizada porque su clima difiere del medio que lo rodea. Las islas de calor que se crean en las ciudades, una vivienda o los invernaderos utilizados para la producción de cultivos son ejemplos canónicos de este tipo de sistemas. Independientemente de la escala espacio-temporal, los modelos dinámicos de sistemas climáticos comparten en general la misma estructura básica; las variables por considerar son las mismas y al igual que cualquier sistema natural, se rigen por los mismos principios físicos de conservación de la masa, la energía y el momentum. En este capítulo se describe en forma sucinta el proceso general para modelar sistemas climáticos. A manera de ejemplo, se mencionan las características de algunos modelos matemáticos determinísticos utilizados para hacer simulaciones computacionales de la atmósfera, el océano o un microclima, y también de modelos matemáticos probabilísticos cuyo objetivo es predecir con cierto grado de confiabilidad las relaciones entre las variables de un sistema climático.

1.2 Modelado de sistemas climáticos

El modelo tiene como objetivo describir el comportamiento temporal y/o espacial de las variables de estado de los elementos que conforman el sistema que se desea representar. El proceso general sugerido para modelar y simular un Sistema Climático (SC) se presenta en la figura 1.

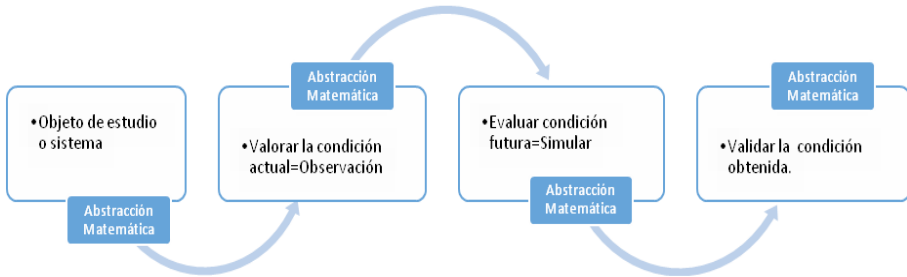


Figura 1. Proceso general para modelar un sistema climático. Los dos primeros cuadros corresponden a la modelación, la cual se representa con funciones matemáticas; el tercer cuadro se refiere a la simulación, y el cuarto a la contrastación teórica o experimental que reporta la literatura.

El objeto de estudio puede ser la atmósfera, el océano o el microclima de un invernadero. El punto de partida para la abstracción matemática son los procesos físicos relacionados con la transferencia de momentum, energía y masa. Estos intercambios suceden entre las partes del sistema y de ellos con el medio externo (McGuffie, 2005; Pasini, 2009).

Valorar la condición actual significa reunir la información disponible de las variables asociadas al sistema, como lo son la radiación solar, temperatura, presión, viento, humedad y precipitación, radiación ultravioleta, dirección de los vientos, pluviometría. El ejercicio se realiza mediante la observación y la medición con estaciones meteorológicas; pueden incluirse tantas variables como el investigador considere apropiado o como la capacidad de cómputo y la disponibilidad de datos lo permitan (Stocker, 2011). Estos registros son la primera aproximación al SC; con ellos se conocen los rangos entre los cuales oscilan

las variables y se identifican los parámetros, condiciones iniciales y de frontera que serán necesarios para plantear el modelo.

Posteriormente se plantea el conjunto de ecuaciones que permiten describir la evolución del sistema en el tiempo y/o en el espacio. Las expresiones matemáticas pueden ser funciones integrables y logarítmicas, de probabilidad, o ecuaciones diferenciales (Pasini, 2009). En esta etapa también se estudia el método para resolver las ecuaciones, que puede ser analítico, estadístico o numérico, y dependiendo del caso se eligen además las coordenadas y el tipo de grilla por utilizar.

En la siguiente etapa el objetivo es evaluar la condición futura y es cuando inicia el proceso de simulación del comportamiento del sistema. Los resultados obtenidos se someten luego a un proceso de validación que al ser superado convierten el modelo en una representación confiable para simular la evolución del sistema y así pronosticar su estado en un tiempo dado (Laurence, 1988; McGuffie, 2005). Al concluir el proceso general para modelar y simular un sistema climático el resultado será un modelo cuya estructura básica pueda resumirse como lo indica la figura 2.

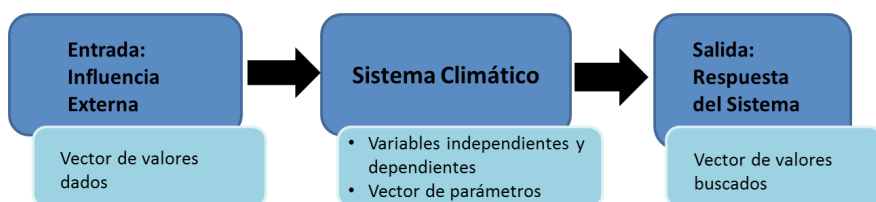


Figura 2. Estructura básica de un modelo para simular la dinámica de un sistema climático.

En las siguientes secciones se exponen diferentes tipos de modelos que han sido planteados de acuerdo con el proceso y estructura de las figuras 1 y 2. Para empezar, se presenta una descripción de los modelos del sistema climático terrestre indicando cuáles son las características generales, las aproximaciones utilizadas, las ecuaciones,

entradas, salidas y métodos numéricos que utilizan. Se completa la sección con ejemplos de modelos atmosféricos y oceánicos. Posteriormente se muestra un modelo que simula un microclima para observar que el procedimiento continúa siendo similar, y finalmente se relata otro tipo de modelado utilizado en climatología que se fundamenta en técnicas estadísticas de correlación.

1.2.1 Modelos del Sistema Climático Terrestre

Los Modelos del Sistema Climático Terrestre (MSCT) tienen como objetivo pronosticar el tiempo, predecir el clima o generar escenarios de cambio climático. El objeto de estudio es el sistema conformado por la atmósfera, los océanos, la superficie de la Tierra, los seres vivos y el hielo marino (Stocker, 2011).

Los MSCT contemplan una escala espacial tan grande como las mismas dimensiones del globo terráqueo y deben, por ello, ser capaces de simular fenómenos como los mostrados en la figura 3, pertenecientes a la escala espacial planetaria y a la de predicción para un período amplio. Otros MSCT se especializan en representar los fenómenos que están entre la gran escala, la mesoescala y la topoescala. En la gran escala se encuentran, por ejemplo, las fluctuaciones en la circulación asociadas a grandes sistemas de baja presión, con longitudes de onda de miles de kilómetros y períodos de días (figura 3). En la mesoescala se ubican, por ejemplo, sistemas convectivos del orden de kilómetros o cientos de kilómetros y con duraciones de horas a días; también se hallan las oscilaciones locales en la circulación producto de la interacción entre calentamientos diferenciales provocados por el ciclo diurno y cambios en la topografía de la superficie. En la figura 3 se presentan más ejemplos de algunos de los fenómenos físicos que los MSCT ayudan a analizar en las diferentes escalas espacial y temporal. Los nombres y límites de cada escala varían según el autor, en este caso se muestran en la figura 3 las escalas más difundidas, que son las de Orlanski (1975) y de la Organización Meteorológica Mundial (OMM, 2008, 2011).

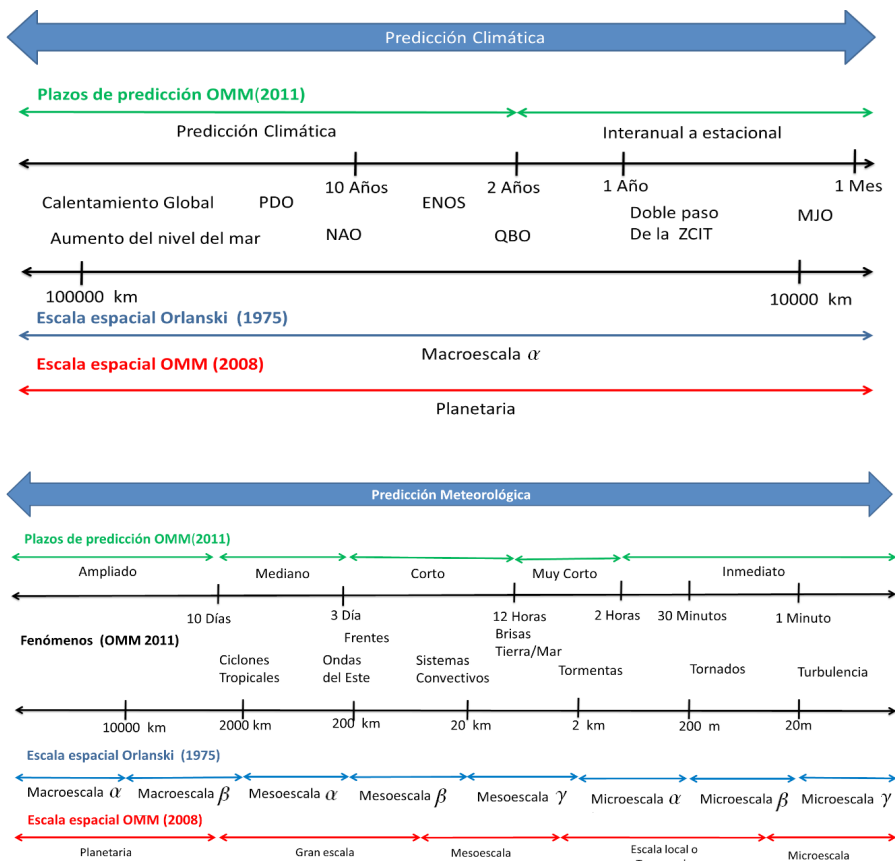


Figura 3. Escalas de predicción climática (arriba) y meteorológica (abajo) a las cuales pertenecen algunos fenómenos de relevancia para Colombia.

Fuente: Diagrama elaborado con base en la información de los documentos OMM (2008, 2011). PDO: Pacific Decadal Oscillation, NAO: North Atlantic Oscillation, ENOS: El Niño Oscilación Sur, QBO: Quasi-biennial oscillation, ZCIT: Zona de Convergencia Intertropical, MJO: Madden-Julian Oscillation.

Los MSCT consideran la Tierra como una esfera en rotación rodeada por una capa de agua que representa el océano, o por un fluido compuesto de gases y agua en sus tres fases que representa la atmósfera. Estos fluidos están bajo la influencia del campo gravitacional de la Tierra y sus movimientos se describen mediante la ecuación de estado de los gases, la ecuación hidrostática y las ecuaciones primitivas que son las que representan los principios de conservación del momentum, la energía y la masa. En coordenadas rectangulares las ecuaciones primitivas son:

Conservación del momentum:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \vec{V}) = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho \vec{f}_x \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho \vec{f}_y \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho w \vec{V}) = \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho \vec{f}_z \quad (3)$$

El primer término corresponde a la derivada temporal del flujo; ρu ; u , v , w son las componentes del vector velocidad $\vec{V}$ y ρ es la densidad del fluido. El segundo término representa la advección, el tercero el gradiente de presión p ; los tres siguientes corresponden a la difusión, con τ_{ij} el tensor de esfuerzo superficial y el último término a otras fuerzas presentes según la dirección, como, por ejemplo, la gravedad y la fuerza aparente de Coriolis. Este conjunto de ecuaciones, más conocidas como ecuaciones de Navier-Stokes, describen el movimiento de cualquier fluido newtoniano en un punto y un tiempo específico, en este caso el de la atmósfera. Estas ecuaciones describen el flujo sobre la esfera asumiendo que el movimiento vertical es mucho menor que el horizontal y que el espesor de la capa o fluido es pequeño en comparación con el radio de la esfera.

Conservación de la energía:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \vec{V} \right] = \rho \dot{q} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \\ \frac{\partial (up)}{\partial x} - \frac{\partial (vp)}{\partial y} - \frac{\partial (wp)}{\partial z} + \frac{\partial (u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial (u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial (u\tau_{zx})}{\partial z} + \frac{\partial (v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial (v\tau_{yy})}{\partial y} + \\ \frac{\partial (v\tau_{zy})}{\partial z} + \frac{\partial (w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial (w\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial (w\tau_{zz})}{\partial z} + \rho \vec{f} \cdot \vec{V} \end{aligned} \quad (4)$$

Donde e es la energía interna por unidad de masa para el fluido y $\rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right)$ es la energía total por unidad de volumen. La forma de la ecuación es similar a la del momentum, aunque en este caso describe una cantidad escalar. La ecuación relaciona los gradientes de temperatura global con la existencia de fuentes o sumideros de energía $\dot{q}$.

Conservación de la masa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (5)$$

Es la ecuación de continuidad en representación de la conservación de la masa. Dependiendo del sistema de coordenadas verticales, las ecuaciones primitivas pueden variar su forma. Además las componentes de la velocidad, la temperatura y variables geopotenciales suelen expresarse como su valor promedio más una perturbación, siguiendo el método de descomposición de Reynolds (Pasini, 2009).

Los MSCT comprenden, además de las ecuaciones mencionadas, esquemas de parametrización de los procesos físicos que no pueden ser resueltos de manera explícita en la misma escala que se utiliza en los modelos, por ejemplo, que ocurren en la capa límite planetaria como radiación, turbulencia, y flujos de calor latente. Aunque estos procesos no están contemplados dentro del compendio de ecuaciones base, los esquemas de parametrización permiten incluirlos ya que se vuelven relevantes en escalas espacialmente por debajo de las decenas de kilómetros.

Los MSCT planteados en coordenadas rectangulares acuden a técnicas de elementos finitos. Por el contrario, los que usan coordenadas esféricas optan por técnicas espectrales que consisten en la proposición de un número finito de armónicos esféricos como solución de las ecuaciones. Los MSCT que se resuelven por métodos numéricos utilizan una malla de 4 dimensiones, tres espaciales y una temporal. Por otra parte, para resolver el conjunto de ecuaciones no lineales se requiere efectuar aproximaciones para simplificar la solución y evitar inestabilidades numéricas; la más común es considerar la atmósfera en equilibrio hidrostático, es decir, que las fuerzas del gradiente vertical de presión y la gravedad están en equilibrio y, por tanto, no hay aceleración vertical neta.

Los MSCT se pueden clasificar en modelos globales o de circulación general, modelos regionales y modelos de mesoescala. Los globales en general utilizan coordenadas esféricas y el número de modos esféricos considerados determina la resolución horizontal y vertical. Los regionales son MSCT que simulan las condiciones atmosféricas de zonas geográficas limitadas y requieren, por tanto, condiciones iniciales y de contorno bien definidas en las fronteras del dominio. Finalmente, los mesoescalares son aquellos de mayor resolución especializados en simular fenómenos de escala local como tormentas; suelen utilizar coordenadas rectangulares y como representan procesos que ocurren en escalas menores de 10 kilómetros no utilizan la aproximación hidrostática por carecer de validez en esas dimensiones.

Los MSCT más complejos son aquellos que acoplan varios modelos, donde cada uno representa una de las partes del sistema; por ejemplo, la atmósfera, el océano y la litosfera. Estos modelos son los más completos y con mayor requerimiento de máquina, razón por la cual son compilados en supercomputadores. Esto no significa que no sea posible hacer modelado y simulación del sistema climático terrestre en un computador estándar; por el contrario, cualquier investigador en esta área puede implementar modelos atmosféricos u oceánicos en su computador personal y analizar cuáles son las aproximaciones y esquemas de parametrización de los procesos físicos que mejor representarían el clima en su región de estudio. Los resultados obtenidos se convierten

así en insumos para la optimización de los modelos acoplados y globales. La ventaja actual es que muchos MSCT están disponibles en internet y, por ser de código abierto, la comunidad científica está llamada a hacer uso de estos modelos, mejorar su configuración y publicar sus resultados. A continuación se mencionan algunos de los modelos de acceso libre para realizar simulaciones del tiempo y el clima en nuestras latitudes.

1.2.2 Modelos atmosféricos

En la categoría de modelos atmosféricos se encuentran todos los modelos que representan procesos físicos que tienen lugar en la atmósfera. Pertenecen a este grupo desde los modelos de calidad del aire, hasta los exclusivamente climáticos. Algunos modelos atmosféricos globales que se han utilizado en Colombia para hacer estudios y pronóstico del clima son el Global Forecast System (GFS) desarrollado por la National Oceanic and Atmospheric Administration (NOAA), el ECHAM del Instituto Max Planck de Meteorología, el Community Climate Model (CCM3) del National Center of Atmospheric Research, entre otros. En cuanto a modelos atmosféricos regionales, se han implementado el Regional Atmospheric Modeling System (RAMS) desarrollado por la Universidad de Colorado, el Providing Regional Climates for Impacts Studies (PRECIS) de la Met Office Hadley Centre de Reino Unido y el Weather Research and Forecasting Model (WRF) del National Centers for Environmental Prediction. Este último es el modelo que utiliza el Instituto de Estudios Ambientales de Colombia (IDEAM) para realizar el pronóstico del estado del tiempo. En la figura 4 se presenta, por ejemplo, la predicción de lluvia para el 31 de octubre de 2014. Hasta el momento los resultados obtenidos son satisfactorios pero se requieren más estudios que conduzcan hacia una mejor parametrización de los procesos atmosféricos que ocurren en la región. El WRF es una opción viable para trabajar en el campo del modelado y la simulación del clima y el tiempo en Colombia, por esta razón se presentan a continuación las características principales del WRF.

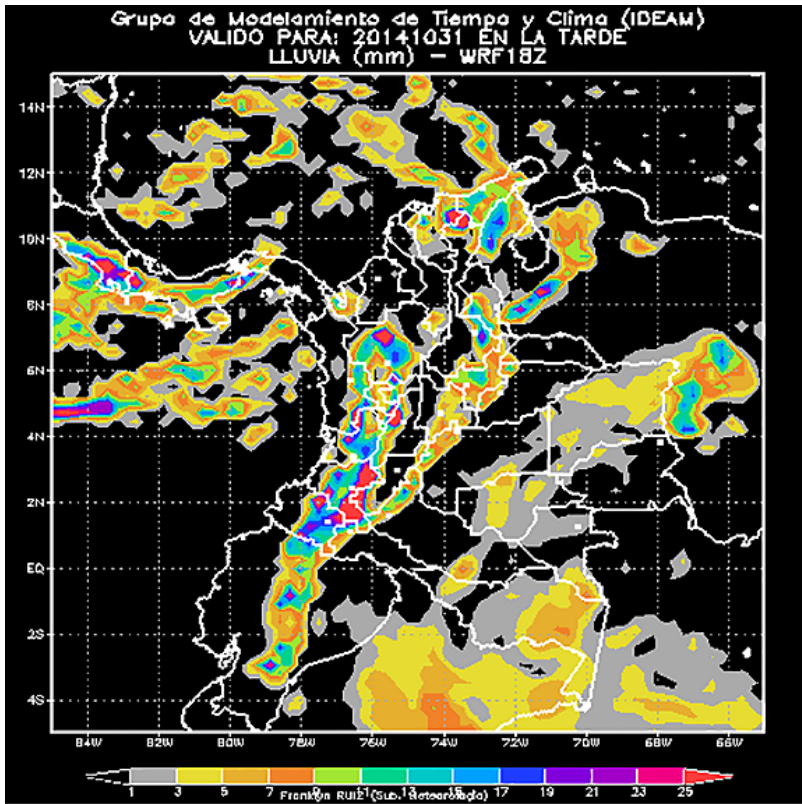


Figura 4. Pronóstico de lluvia para el 31 de octubre de 2014 realizado con el WRF. Los tonos indican la cantidad de lluvia en milímetros, en este caso la escala de color inicia en 1 mm (gris) hasta 25 mm (rojo).

Fuente: IDEAM. <http://bart.ideam.gov.co/wrfideam/wrf/semanal18/h07.html>.

Ejemplo: WRF

El WRF es un modelo de mesoescala cuyo objeto de estudio es la atmósfera, la cual se considera un fluido compresible no viscoso. Las variables meteorológicas de entrada que requiere WRF son las componentes de velocidad del viento, la temperatura, humedad relativa y la altura geopotencial en los niveles de presión: 1000, 850, 500, 400, 300, 250, 200, 150, y 100 mb. También necesita información sobre la topografía, humedad, temperatura y uso del suelo. Puede incluir opcionalmente la temperatura superficial del mar, el espesor de la nieve, las categorías

de uso del suelo, entre muchas otras variables, pero esto depende de la disponibilidad de los datos y el propósito de la simulación.

Las condiciones iniciales y de frontera son tomadas del Climate Forecast System Reanalysis 2 con una resolución espacial horizontal de $0,5^\circ$ en 38 niveles de resolución vertical y una separación espacial de 6 horas por archivo de entrada. Los datos de uso del suelo son adquiridos de las imágenes de los satélites Terra y Aqua, que usan el sensor MODIS (Moderate Resolution Imaging Spectroradiometer), o pueden ser datos medidos específicamente para el territorio nacional por las autoridades ambientales correspondientes.

Las principales variables de salida son las componentes del viento, la velocidad vertical, la perturbación en la temperatura potencial, la perturbación en el geopotencial y la perturbación en la presión de aire seco en superficie. Aunque son más de 90 variables las que pueden estimarse con el WRF.

WRF usa las ecuaciones de Euler que se obtienen al despreciar los términos disipativos en las ecuaciones de Navier-Stokes. Puede emplearse con la aproximación hidrostática o la no hidrostática. Las ecuaciones son planteadas en coordenadas verticales de presión, las cuales tienen la ventaja de seguir la forma del terreno. El método numérico que utiliza WRF para solucionar el conjunto de ecuaciones es el de Runge-Kutta de segundo y tercer orden. El tipo de grilla que usa se denomina Arakawa C y usa pasos de tiempo cortos, de modo que puedan resolverse las ondas de gravedad y ondas acústicas (Wang, 2014).

Los esquemas de parametrización que contienen el WRF son la radiación de onda corta y larga, la formación de cúmulos, la difusión, la advección, la capa límite planetaria, y los procesos de formación de hielo y nieve. El esquema usual para representar la radiación de onda larga se denomina modelo de transferencia rápida radiativa (RRTM por sus siglas en inglés). El RRTM de onda larga en condiciones de cielo despejado incluye los efectos radiativos del ozono (O_3), del dióxido de carbono (CO_2), del vapor de agua (H_2O), del freón (los CFC), del formaldehído (CCl_4), del metano (CH_4) y del óxido nitroso (N_2O). Además del RRTM hay más opciones como el Eta Geophysical Fluid Dynamics Laboratory Longwave (GFDL) o el CAM Longwave. En cuanto

a la radiación de onda corta, el esquema usual es el de Duhia que tiene en cuenta la presencia de nubes y la absorción en aire claro, y existen también otras opciones como el Goddard Shortwave o el Eta (Wang, 2014). Para la capa superficial el más utilizado es el esquema de Mo-nin-Obukhov, que está basado en la teoría de la similaridad. Para la capa límite planetaria se ha utilizado el esquema Yonsei-University. Por último, para la formación de nubes se ha evaluado el esquema de Kain-Fritsch, el cual genera convección profunda o somera en función de la cantidad de energía potencial convectiva disponible.

El WRF es uno de los modelos atmosféricos más utilizados en Colombia por diferentes instituciones, pero aún son pocos los trabajos publicados sobre los resultados logrados hasta ahora. Es oportuno, por tanto, incrementar las investigaciones en el ámbito del modelado y la simulación del tiempo y el clima con su correspondiente difusión. Una situación similar ocurre con los modelos oceánicos. En la siguiente sección se muestran las características principales de este tipo de modelos y se mencionan los que han sido explorados para el caso colombiano.

1.2.3 Modelos oceánicos

Los modelos oceánicos (MO) describen la dinámica y termodinámica del océano y facilitan el estudio de la circulación y problemas costeros. Los MO simulan las condiciones de temperatura, corrientes y salinidad a lo largo de áreas costeras como mares semicerrados, puertos, bahías y estuarios (Miller, 1993; Griffies, 2003). En el área ambiental se utilizan, por ejemplo, para modelar la trayectoria de los derrames de contaminantes y así predecir la calidad del agua o la afectación sobre especies marinas.

Los MO hacen parte de los MSCT; por tanto, también se basan en la conservación del momentum, energía y masa expresados por las ecuaciones primitivas escritas previamente, e incluyen una ecuación para el cambio de la salinidad con el tiempo y otra para calcular la densidad del agua a partir de la temperatura y la salinidad (Sarkisyan, 2009). Los MO utilizan aproximaciones al flujo turbulento que en principio no presenta más dificultades que las asociadas a los problemas no

newtonianos, pero al no existir expresiones explícitas generales para determinar los coeficientes de viscosidad turbulenta, estimar dichos valores es uno de los problemas por resolver cuando se está formulando o implementando un MO.

Plantear un modelo de circulación de los océanos requiere una comprensión de los procesos físicos de los océanos; sin embargo, la principal limitante para estudiar el océano ha sido la recolección de información en campo. Históricamente ha sido más difícil tomar datos en el océano que en la atmósfera, no solo por las limitaciones de los instrumentos a grandes profundidades, sino también por los costos operacionales de los buques oceanográficos; en consecuencia, los MO han evolucionado más lentamente que los modelos atmosféricos (Miller, 1993). Hoy día es un campo en pleno desarrollo gracias al uso de imágenes satelitales y mejores equipos de medición que proporcionan la información para alimentar los modelos. Ahora el mayor desafío es mejorar los esquemas de parametrización que representan la vorticidad y la difusividad en el océano (Sarkisyan, 2009).

Los MO más completos permiten simular procesos de circulación y mezcla en ríos, estuarios, plataforma y talud continental, lagos y mares semicerrados y abiertos y el océano global. Un ejemplo de este tipo de MO es el Princeton Ocean Model (POM), que es un modelo de la circulación general del océano, utilizado para simular y predecir las corrientes oceánicas, la temperatura, salinidad y otras propiedades del agua. El código fue desarrollado originalmente en la Universidad de Princeton. El modelo incorpora el sistema de turbulencia Mellor-Yamada. Este sub-modelo de turbulencia es ampliamente utilizado por modelos oceánicos y atmosféricos. Hace décadas los modelos estaban dirigidos principalmente a simulaciones de gran escala de la circulación del océano, así que no había necesidad de un modelo numérico para manejar los procesos de alta resolución de la costa del océano. El modelo POM incluye características como la superficie libre para manejar las mareas, coordenadas sigma verticales para manejar las topografías complejas y las regiones poco profundas, una rejilla curvilínea para manejar mejor las costas, y un régimen de turbulencia para manejar la mezcla vertical. En la década de 1990 el uso de POM amplió las simulaciones a todo el

océano Atlántico para la investigación del clima. En el año 2000 se añaden otras características numéricas y mejoras de parametrización. Varios modelos oceánicos son descendientes directos de POM, como la versión comercial del POM para estuarios y zonas costeras del océano (ECOM). Actualizaciones recientes del POM incluyen un sistema de coordenadas y mejoras en la estimación de la turbulencia (Mellor, 2004).

El Max Planck Ocean Model (MPI-OM) es otro de los más completos, es el modelo desarrollado por el Instituto Max Planck de Meteorología para simular la circulación general del océano y es capaz de simular la circulación oceánica de pequeña escala. El modelo considera que el principal papel del océano en el sistema terrestre es el transporte de calor. Se basa en las ecuaciones de movimiento, teniendo en cuenta todos los términos: el del cambio local de la aceleración más los términos de advección, coriolis, el gradiente de presión, la gravedad, el régimen de mareas, y las fuerzas de fricción. Hace uso de las aproximaciones de Boussinesq para las ecuaciones de movimiento en la coordenada horizontal mas no en la vertical, y la aproximación hidrostática; sin embargo, para resolver procesos de pequeña escala como convección, el modelo debe estar en modo no hidrostático. MPI-OM diferencia subsistemas barotrópicos y baroclínicos, procesos de mezcla horizontal y vertical, y al igual que otros utiliza parametrización de Eddy, diferencias finitas para los diferentes cálculos y una grilla ortogonal curvilínea (Jungclauss, 2006).

En Colombia se ha trabajado en la implementación de modelos oceánicos tanto para el Océano Pacífico como para el Mar Caribe. El principal obstáculo ha sido la poca disponibilidad de datos oceanográficos; sin embargo, cada día se cuenta con mayor información tanto *in situ* como obtenida de boyas y programas internacionales para el apoyo a la investigación del océano. Uno de los modelos explorados en Colombia es el Regional Ocean Modeling System (ROMS), que es un modelo oceánico regional de superficie libre, hidrostático, que utiliza también las ecuaciones de los principios de conservación de masa, momentum y energía. ROMS se acopla a un modelo de oleaje y a un modelo atmosférico, y puede compilarse en modo barotrópico o baroclínico. Las variables de entrada de ROMS son, como mínimo,

los perfiles verticales de temperatura y salinidad, y viento zonal y meridional en la superficie. Las coordenadas horizontales son ortogonales curvilíneas y las verticales siguen la forma del terreno. El tipo de grilla al igual que el WRF es la llamada Arakawa C. Contiene varios esquemas de parametrización para la advección y los procesos de mezcla. Las salidas del modelo son las componentes de la advección, la viscosidad y la aceleración del fluido (Shchepetkin, 2005).

Además del modelo regional ROMS, se ha trabajado un MO para estudiar la estructura vertical de las aguas del territorio marítimo colombiano en la región conocida como Panama Bight (PB) (Villegas, 2006; 2008). El área de estudio donde se implementó el modelo comprende entre los meridianos $-77^{\circ}40'$ W y -84° W y los paralelos $1^{\circ}30'$ N y $7^{\circ}10'$ N. Este MO es un modelo termodinámico tridimensional (MTT) que simula las variables fundamentales para la visualización de las características dinámicas y termohalinas del agua; está basado en las ecuaciones completas de movimiento de un líquido viscoso no compresible en coordenadas esféricas en la aproximación de Boussinesq e hidrostática, en las ecuaciones de transporte de calor y sal y en la ecuación internacional de estado del agua del mar. Las siguientes son las ecuaciones utilizadas en el MTT:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{g}{R \sin \theta} \frac{\partial \xi}{\partial \lambda} - \frac{g}{\rho_o R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_{-z}^{\theta} \rho dz + l v + \frac{\partial}{\partial z} v \frac{\partial u}{\partial z} + \mu \Delta u \quad (6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{g}{R} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} - \frac{g}{\rho_o R} \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{-z}^{\theta} \rho dz - l u + \frac{\partial}{\partial z} v \frac{\partial v}{\partial z} + \mu \Delta v \quad (7)$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial v \sin \theta}{\partial \theta} \right] \frac{1}{R \sin \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial(T,S)}{\partial t} + \frac{1}{R \sin \theta} \left[\frac{\partial u(T,S)}{\partial \lambda} + \frac{\partial v(T,S) \sin \theta}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial w(T,S)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} v_{T,S} \frac{\partial(T,S)}{\partial z} + \mu_{T,S} \Delta(T,S) \quad (9)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g ; \quad \rho = f(T, S, P) \quad (10)$$

Donde: λ es la longitud; θ es la latitud; z es la coordenada vertical dirigida hacia arriba con inicio en la superficie del océano; t es el tiempo; ζ es la superficie libre; u, v, w son las componentes de velocidad proyectadas en los ejes λ, θ, z respectivamente; g es la aceleración de la gravedad; R es el radio del planeta Tierra; T, S, ρ, P son la temperatura, salinidad, densidad y presión del mar, respectivamente; $l=2\Omega\cos\theta$ es el parámetro de Coriolis; Ω es la velocidad angular de la rotación terrestre; $\Delta u = \frac{1}{R^2 \sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \lambda^2} \right]$ es para u el operador Laplace; v, μ son los coeficientes vertical y horizontal de turbulencia, respectivamente. El modelo necesita como entrada información meteorológica correspondiente a los campos de presión, temperatura superficial del mar y salinidad, los cuales se obtienen de bases de datos atmosféricos globales para un período de 30 años.

Asociado al MTT está el modelo de diagnóstico que se basa en la ecuación de continuidad transcrita en coordenadas esféricas, la cual es integrada verticalmente y después solucionada teniendo en cuenta las condiciones de frontera cinemática y superficie libre mediante diferencias finitas. Una de las aplicaciones que han tenido estos dos modelos en conjunto ha sido el cálculo de la velocidad vertical de surgencia V_z en la región del Panama Bight. V_z es estimada como la suma de los términos asociados a los tres principales factores que influyen en la circulación vertical, un componente de gradiente, uno baroclínico y otro eólico:

$$\begin{aligned} \frac{dV_z}{dz} = & -\frac{\Delta p}{2f\rho\alpha''R^2} + \frac{\sin\theta}{2f\rho\alpha R^2 \cos\theta} \left(-\frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right) + \\ & \frac{gz}{fR^2 \cos\theta} \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} - \frac{z}{f\rho R^2 \omega \cos\theta} \int (Z - \mathcal{E}) \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (11)$$

donde p es la presión, f el parámetro de Coriolis, R es radio de la Tierra, ρ la densidad media del mar, α'' y α los parámetros de Ekman en el océano y la atmósfera, respectivamente, θ la latitud, φ la longitud, z la coordenada vertical, ε la profundidad a integrar y ϑ la superficie libre.

Con los datos de la simulación se calcula el promedio mensual multianual de V_z a diferentes profundidades. En la figura 5 se observa, por ejemplo, la velocidad V_z para la capa de 0-10 m durante el mes de febrero (izquierda). Los resultados de la simulación han permitido realizar análisis de correlación con el campo de vientos y la concentración de clorofila mostrados también en la figura 5 en el centro y a la derecha, respectivamente (Díaz y Villegas, 2009; Díaz, 2011).

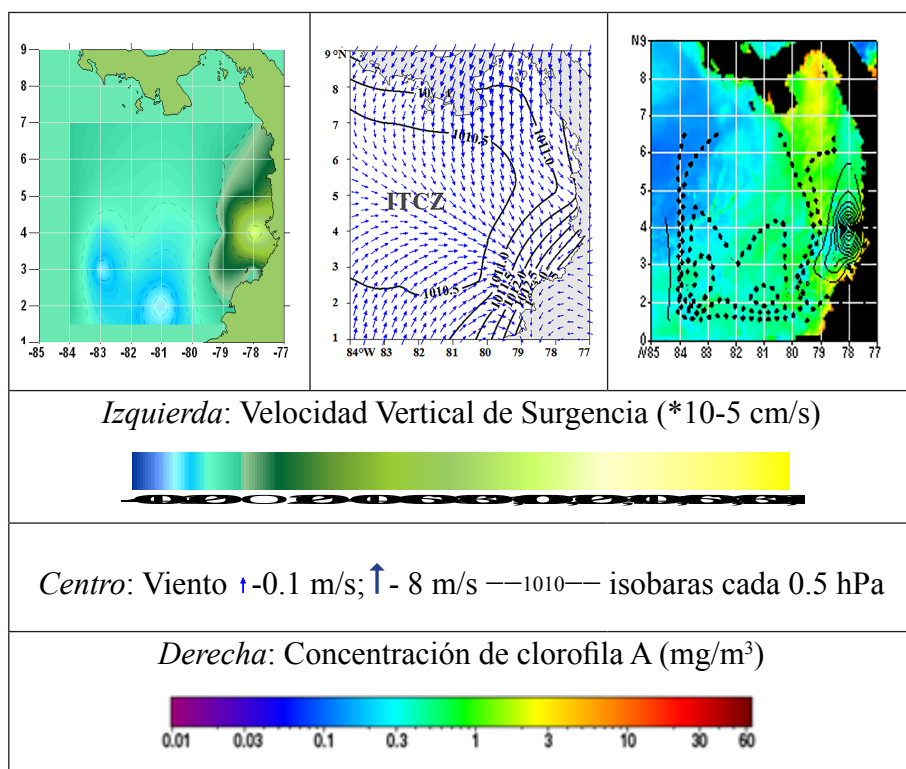


Figura 5. *Izquierda:* Velocidad Vertical de Surgencia. *Centro:* isobaras cada 0.5 hPa. *Derecha:* Concentración de clorofila A.

Fuente: Díaz y Villegas (2009).

La formulación e implementación de estos modelos han aportado un conocimiento sobre el comportamiento de la cuenca del Pacífico colombiano adicional al que antes solo podían aportar los datos de los cruceros oceanográficos de la Armada Nacional. Con este ejemplo concluye esta sección en la que se mencionaron ejemplos de modelos y simulaciones relacionados con el sistema climático terrestre que tienen en común el hecho de estar basados en los principios de conservación del momentum, la energía y la masa. A continuación se esboza otro tipo de modelado utilizado en climatología. A diferencia de los anteriores, los modelos se basan en técnicas estadísticas para intentar predecir el estado del sistema en un tiempo futuro.

1.2.4 Modelado de microclima

Un microclima es un área atmosférica local caracterizada porque su clima difiere de la zona que lo rodea. El término se utiliza para denominar el clima de áreas desde varios kilómetros hasta unos pocos metros cuadrados; ejemplos típicos de modelo de microclima son los realizados para las islas de calor en las grandes ciudades, los utilizados para analizar el confort climático de una vivienda o los empleados para hacer control climático en un invernadero (Littlefair, 2000; Brown, 2010; Jones, 2014).

En los modelos del microclima (MM) los objetos de estudio pueden ser sistemas abiertos que intercambian masa, momentum y energía con el medio que les rodea, como es el caso de un invernadero con ventilación natural o forzada, o por el contrario, sistemas cerrados que solo intercambian energía con su entorno a través de las paredes que lo separan del medio exterior, como en el caso de las viviendas. Los MM al igual que los modelos atmosféricos y oceánicos se basan en los procesos naturales de intercambio de masa y energía. A continuación se muestran las entradas, parámetros y flujos usuales que se consideran en un modelo de microclima. La diferencia entre uno u otro modelo radica en la cantidad de elementos que lo conforman y los flujos de masa y energía considerados en las ecuaciones de balance. El siguiente es un ejemplo en donde el objeto de estudio es un invernadero.

Ejemplo modelo del microclima en un invernadero

Para empezar el planteamiento se identifican los elementos que conforman el sistema físico a modelar. En el caso de un invernadero como el que se presenta en la figura 6 los elementos básicos son: el suelo (s), el follaje (fo), el aire interior (ai) el aire superior (as), y la cubierta externa (ce) y cubierta interna (ci) (Bot, 1983). En casos más completos se deberá incluir también los dispositivos de calefacción, pantallas térmicas (pt), refrigeradores, ventiladores y nebulizadores, entre otros.

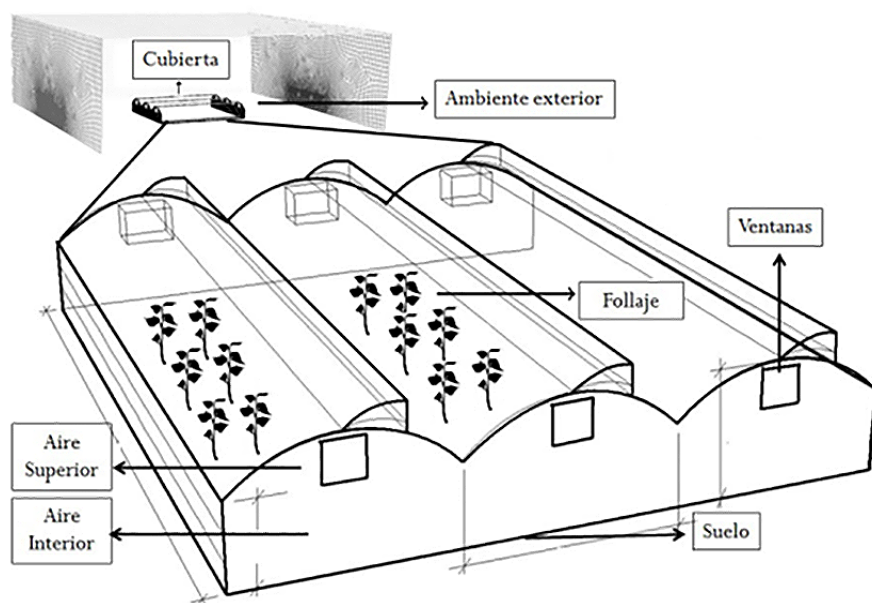


Figura 6. Elementos básicos en un invernadero para la producción de cultivos.

Fuente: Díaz (2016).

Las principales variables de estado que se simulan con un modelo de microclima son la temperatura de los elementos considerados, la concentración de CO_2 y la presión de vapor del aire en el interior del sistema. Las condiciones de entrada mínimas que se requieren son las variables que describen el estado del entorno, como son la radiación solar, la temperatura del aire exterior, la presión de vapor del aire exterior,

la velocidad del viento, la temperatura del suelo exterior y la concentración de CO_2 , además del cultivo también se necesita el valor del índice de área foliar (Vanthoor *et al.*, 2011).

En la figura 7 se ilustran los flujos de calor sensible (S), latente (L), radiación (R), vapor de agua (MV) y de CO_2 (MC) presentes en un invernadero básico. Los subíndices identifican los elementos entre los cuales ocurre la transferencia, el término *ex* hace referencia al aire externo y *cin*, *cex* a las caras interna y externa de la cubierta. Los recuadros R solar y R cielo son la radiación solar directa y difusa que incide sobre el invernadero.

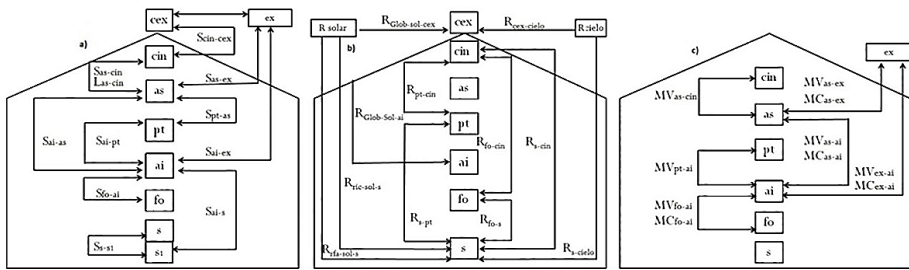


Figura 7. Flujos de calor sensible (S), latente (L), radiación infrarroja (R_{ric}), radiación fotosintéticamente activa (R_{rfa}), vapor de agua (MV) y de CO_2 (MC) presentes en un invernadero.

Fuente: Díaz (2016).

Los flujos de calor sensible, latente y de radiación infrarroja representan procesos de transferencia de energía entre los elementos del invernadero; por su parte, los intercambios de vapor de agua y CO_2 corresponden a los procesos de transferencia de masa. Los subíndices identifican los elementos entre los cuales ocurre la transferencia y los recuadros R solar y R cielo son la radiación solar directa y difusa que incide sobre el invernadero. Los flujos se estiman en función de las variables de estado con las siguientes expresiones matemáticas de la tabla 1.

Tabla 1. Flujos relacionados en un modelo del microclima de un invernadero.

Flujos	Expresión para estimarlo
Calor sensible por convección y conducción -H-	$S_{ij} = CIC_{ij}(T_i - T_j)$
Calor latente -L-	$L_{ij} = \Delta H MV_{ij}$
Vapor de H ₂ O -MV-	$MV_{ij} = 6.4 * CIC_{ij}(VP_i - VP_j)$
Energía por radiación infrarroja -FIR-	$FIR_{ij} = A_{ij}\epsilon_i\epsilon_jF_{ij}\sigma(T_i^4 - T_j^4)$

Los términos CIC_{ij} son los coeficientes de intercambio de calor entre el objeto i y el j , ΔH es el calor de evaporación, A_{ij} es la superficie del objeto por metro cuadrado de suelo bajo el invernadero, i y j son los coeficientes de emisión infrarroja, y FIR_{ij} es el área efectiva o factor de visión entre i y j . La deducción y la metodología detallada para calcular los CIC_{ij} puede consultarse en Bot (1983), Stanghellini (1987), van Henten (1994), Zwart (1996) y Vanthoor (2011); el procedimiento tiene en cuenta las propiedades físicas del suelo, la estructura, el cultivo, las propiedades ópticas de la cubierta y la cantidad de mecanismos adicionales que contenga el invernadero. Con la estimación de los flujos se plantean luego las ecuaciones de balance para describir la dinámica de las variables de estado. Para ello se utilizan las expresiones:

$$cap_i \frac{dT_i}{dt} = \sum Q_{ij} \quad (12)$$

$$cap_{VP_i} \frac{dPV_i}{dt} = \sum MV_{ij} \quad (13)$$

$$cap_{MC_i} \frac{dCO_i}{dt} = \sum MC_{ij} \quad (14)$$

Donde cap_i es la capacidad calorífica del elemento i , Q representa todos los flujos de energía entre el elemento i y su entorno, cap_{VPi} y cap_{MCi} son las capacidades del aire de almacenar vapor de agua y CO_2 y MV_{ij} y MC_{ij} los flujos respectivos de cada gas. En la figura 8 se presentan los resultados parciales alcanzados en la simulación de la temperatura en el interior de un invernadero localizado en la Sabana de Bogotá y su comparación con datos medidos.

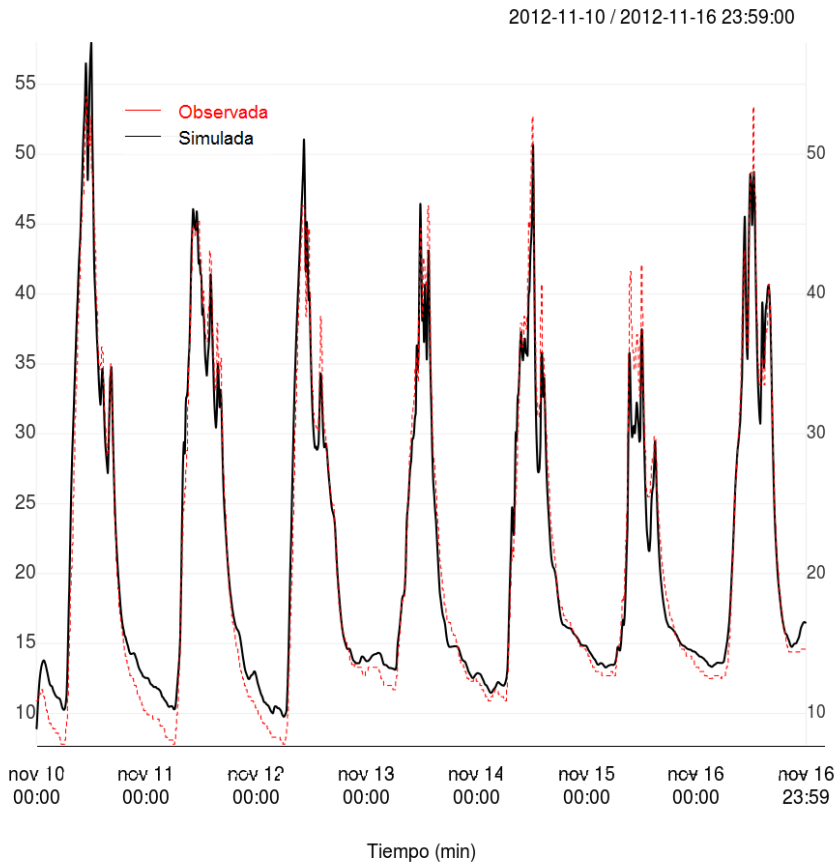


Figura 8. Comparación de la temperatura del aire simulada con la real.

Fuente: Díaz (2016).

Los modelos de microclima son una herramienta que facilita el proceso de control de temperatura y humedad en forma automática en el caso de los invernaderos, pero también de otros entornos como el confort climático de una oficina.

1.2.5 Modelado y predicción climática con técnicas estadísticas

En meteorología y climatología los métodos estadísticos se emplean principalmente para la exploración de datos; sin embargo, hay técnicas estadísticas que ayudan también a crear modelos lineales de pronóstico que se basan en el análisis de la variabilidad y tendencias de las series de tiempo de las variables de estado del sistema (Katz, 2003). El siguiente es un ejemplo de una de estas técnicas.

Ejemplo: Correlación canónica

El análisis de correlación canónica es una técnica estadística que se utiliza principalmente para el estudio de la relación entre grupos de variables (Díaz *et al.*, 2009). En meteorología y climatología se usa también para plantear modelos lineales de predicción de la variabilidad meteorológica de superficie en función de oscilaciones climáticas de gran escala como El Niño Oscilación Sur (ENSO), la Oscilación del Atlántico Norte (NAO), o la Oscilación Cuasibienal (QBO) (Fonseca *et al.*, 2012; Giuntoli *et al.*, 2013).

El Análisis de Correlación Canónica (ACC) es un método multivariado lineal utilizado para comparar dos conjuntos de datos, uno independiente X y otro dependiente Y, compuestos de un número p de variables x_i y q variables y_j . En el ACC se crean combinaciones lineales x^* y y^* con al menos dos de las variables de cada conjunto; estas combinaciones se denominan variables canónicas (VC):

$$x^* = X\alpha = \sum_{i=1}^p \alpha_i x_i \quad y^* = Y\beta = \sum_{j=1}^q \beta_j y_j \quad (15)$$

Las VC cumplen tres condiciones: primero los vectores α y β deben maximizar la correlación entre x^* e y^* ($Corr[x_M^* y_M^*] \geq 0$), además cada VC debe tener varianza 1 ($Var[x^*] = Var[y^*] = 1$) y tercero, no estar correlacionada con otras VC, esto es:

$$Corr[x_k^* y_M^*] = \begin{cases} r_c, k = M \\ 0, k \neq M \end{cases} \quad (16)$$

Donde r_c es la correlación canónica. El procedimiento habitual para explicar el conjunto de variables dependientes Y mediante las independientes X es construir un indicador de las variables dependientes y relacionarlo con las independientes mediante una regresión múltiple. Este procedimiento es razonable cuando existe solo una dimensión en la relación, pero puede ser engañoso si existen varias. El ACC en cambio permite determinar cuántas dimensiones relevantes tiene la relación entre ambos conjuntos de variables (Hair, 1998; Wilks, 2006).

El cálculo de las VC se hace a partir de las matrices de varianza y covarianza $[S_c]$ de las variables iniciales X y Y:

$$[S_c] = \begin{bmatrix} [S_{XX}] & [S_{XY}] \\ [S_{YX}] & [S_{YY}] \end{bmatrix} \quad (17)$$

$\begin{matrix} (pxp) & (pxq) \\ (qxp) & (qxq) \end{matrix}$

$[S_{XX}]$ y $[S_{YY}]$ son las matrices de varianza y covarianza de las p variables en X y las q variables en Y, $[S_{XY}]$ $[S_{YX}]$ son las matrices de covarianza entre los elementos de X y los de Y. Las correlaciones canónicas r_c entre las diferentes VC que se determinen están dadas por la raíz cuadrada de los valores propios diferentes de cero de las matrices:

$$[M_x] = [S_{XX}]^{-1} [S_{XY}] [S_{YY}] [S_{YX}] \quad (18)$$

$$[M_y] = [S_{YY}]^{-1} [S_{YX}] [S_{XX}] [S_{XY}] \quad (19)$$

y los vectores canónicos α y β serán los respectivos vectores propios de las matrices que satisfacen:

$$\begin{aligned} [M_x]\alpha &= r_c^2 \alpha \\ [M_y]\beta &= r_c^2 \beta \end{aligned} \quad (20)$$

Los valores de α y β son importantes en el análisis porque a partir de ellos se revela cuáles variables tienen la mayor fuerza explicativa dentro de la correlación y son importantes cuando se está construyendo un modelo predictivo. Además de α y β en el ACC se calculan también las cargas canónicas y las cargas canónicas cruzadas. Las cargas canónicas dependientes (independientes) son las correlaciones lineales entre cada una de las variables dependientes (independientes) observadas x_i (y_i) y la nueva VC x^* (y^*), y permiten conocer la contribución de cada variable a su respectiva VC. Las cargas canónicas cruzadas independientes (dependientes) son las correlaciones lineales entre cada una de las variables independientes (dependientes) observadas y_i (x_i) y la nueva VC x^* (y^*), y proveen una información más significativa de la relación entre los conjuntos de variables originales.

Finalmente, en el ACC se examina el coeficiente de redundancia que permite establecer el porcentaje de varianza explicada en el conjunto de variables dependientes por parte del conjunto de variables independientes. Además de establecerse el nivel de asociación entre las variables, las variables canónicas calculadas se constituyen también como un modelo lineal para pronosticar el comportamiento de variables dependientes como la precipitación o la temperatura en función de las independientes, como los índices macroclimáticos. Este enfoque se ha utilizado, por ejemplo, para predecir el Monzón de Verano de India (Singh, 2009), los niveles de precipitación en Suramérica (Fonseca *et al.*, 2012) y Francia (Giuntoli *et al.*, 2013).

Este tipo de técnicas se han utilizado en Colombia para relacionar variables oceánicas con variables atmosféricas (Díaz *et al.*, 2009) y también para explorar la dependencia entre la variabilidad meteorológica de superficie y oscilaciones climáticas de gran escala. En la

figura 9 se presentan los resultados de un ACC entre la precipitación y la temperatura máxima de tres municipios colombianos para el trimestre diciembre-febrero (DEF) con índices climáticos como la NAO y el ONI asociados con la oscilación del Atlántico norte y el fenómeno de El Niño, respectivamente (Poveda, 2002; 2011). El propósito de estos trabajos ha sido, además de encontrar el grado de relación entre las variables involucradas, evaluar la posibilidad de plantear modelos lineales que permitan predecir el comportamiento de variables meteorológicas a partir de su posible dependencia con variables oceánicas y fenómenos macroclimáticos.

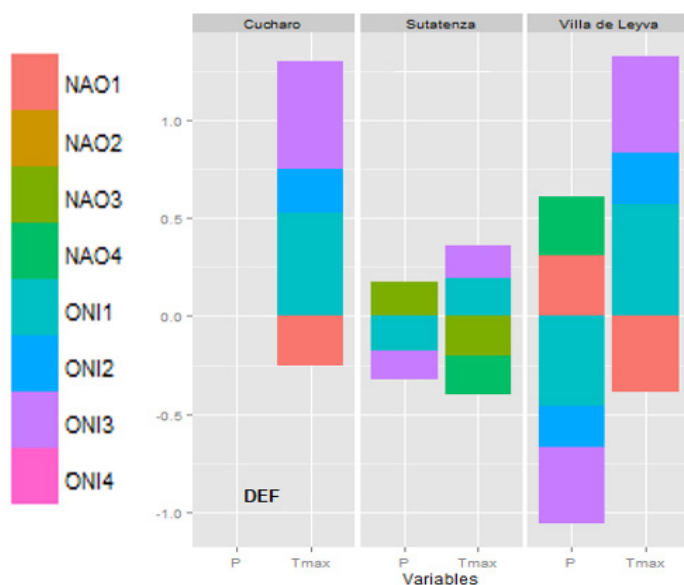


Figura 9. Cargas canónicas entre la precipitación y temperatura máxima de tres municipios colombianos en el trimestre DEF y los índices macroclimáticos ONI y NAO de los 4 trimestres DEF, MAM, JJA y SON.

Fuente: El autor.

Referencias bibliográficas

- Bot, G. (1983). Greenhouse Climate: from physical processes to a dynamic model, PhD Thesis, Wageningen Agr. Univ.
- Brown, R. (2010). *Design With Microclimate: The Secret to Comfortable Outdoor Space*. Island Press.
- Díaz, D., Villegas, N. y Malikov, I. (2009). Características de las zonas de surgencia de la Cuenca del Pacífico Colombiano y su relación con la Zona de Convergencia Intertropical. *Boletín Científico CIOH* 26(1): 59-71.
- Díaz, D. (2016). *Modelado y simulación del microclima en un invernadero para el estudio de métodos de calefacción pasivos adaptables a las zonas climáticas de Colombia*. Tesis de doctorado en Geociencias. Universidad Nacional de Colombia.
- Díaz, D. y Villegas, N. (2009). Valores mínimos de radiación de onda larga asociados a la posición de la Zona de Convergencia Intertropical y su relación con focos de surgencia en la Cuenca del Pacífico colombiano. *Revista Meteorología Colombiana* 13: 25-29.
- Díaz, D., Villegas, N y Málikov, I. (2011). Análisis de la convergencia y la divergencia de Ekman en el Pacífico colombiano. *Revista Colombiana de Física* 43(3): 653-658.
- Fonseca, I. y Cavalcanti, A. (2012). Large scale and synoptic features associated with extreme precipitation over South America: A review and case studies for the first decade of the 21st century. *Atmospheric Research* 118: 27-40.
- Giuntoli, I., Renard, B., Vidal, J.P. y Bard, A. (2013). Low flows in France and their relationship to large-scale climate indices. *Journal of Hydrology* 482: 105-118.
- Griffies, S. M. (2003). *Fundamentals of ocean climate Models*. Princeton University Press.
- Hair, J.F., Anderson, R.E., Tatham, R.L. y Black, W.C. (1998). *Multivariate Data Analysis*. 5th. New York: Prentice Hall International.
- IPCC (2001). *Climate Change 2001: The Scientific Basis*. Contribution of Working Group I to the Third Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change. New York: Cambridge University Press.

- Jones, H.G. (2014). *Plants and Microclimate: A Quantitative Approach to Environmental Plant Physiology*. New York: Cambridge University Press.
- Jungclaus, J. H., Keenlyside, N., Botzet, M., Haak, H., Luo, J.-J., Latif, M., Marotzke, J., Mikolajewicz, U. Roeckner, E. (2006). Ocean Circulation and Tropical Variability in the Coupled Model ECHAM5/MPI-OM. *J. Climate* 19(16): 3952-3972, doi: <http://dx.doi.org/10.1175/JCLI3827.1>
- Katz, R.W., Parlange, M.B. y Tebaldi, C. (2003). Stochastic modelling of the effects of large-scale circulation on daily weather in the southeastern US. *Clim. Change* 60(1-2): 189-216.
- Lawrence, W. (1998). *Physically-Based Modelling and Simulation of Climate and Climatic Change: Part I*. Springer Science & Business Media. Netherlands.
- Littlefair, P.J. (2000). *Environmental Site Layout Planning: Solar Access, Microclimate and Passive Cooling in Urban Areas*. IHS – BRE Press Vietnam.
- Mellor, G. L. (1998). Three-dimensional, primitive equation, numerical ocean model. User's Guide. Disponible en: <http://www.aos.princeton.edu/WWWPUBLIC/htdocs.pom>.
- Miller, M. J. (1993). *Modelling Oceanic Climate Interactions*. Springer Science & Business Media. Netherlands.
- McGuffie, K. y Henderson-Sellers, A. (2005). *A Climate Modelling Primer*. John Wiley & Sons.
- OMM (2011). *Guide to Climatological Practices*. Geneva: World Meteorological Organization.
- Pasini, A. (2005). *From Observations to Simulations: A Conceptual Introduction to Weather and Climate Modelling*. World Scientific.
- Poveda, G., Vélez, J., Mesa, O., Hoyos, C., Salazar, L., Mejía, J., Barco O. y Correa, P. (2002). Influencia de fenómenos macroclimáticos sobre el ciclo anual de la hidrología colombiana: cuantificación lineal, no lineal y percentiles probabilísticos. *Meteorol. Colombia* 6: 121-130.
- Poveda, G., Álvarez, D.M. y Rueda, O.A. (2011). Hydro-climatic variability over the Andes of Colombia associated with ENSO: A review of climatic processes and their impact on one of the Earth's most important biodiversity hotspots. *Climate Dynamics*, 36(11-12): 2233-2249.

- Sarkisyan, A.S. y Sündermann, J. (2009). *Modelling Ocean Climate Variability*. Springer Science & Business Media.
- Shchepetkin, A. F. y McWilliams, J. C. (2005). The regional oceanic modeling system (ROMS): a split-explicit, free-surface, topography-following-coordinate oceanic model. *Ocean Modelling* 9(4): 347-404.
- Singh, A., Acharya, N., Mohanty, U. C. y Mishra, G. (2009). Performance of Multi Model Canonical Correlation Analysis (MMCCA) for prediction of Indian summer monsoon rainfall using GCMs output. *Comptes Rendus Geoscience*. 345(2): 62-72.
- Stocker, T. (2011). *Introduction to climate modeling*. Springer Science & Business Media
- Vanthoor, B.H.E., Stanghellini, C., van Henten, E.J. y de Visser, P.H.B. (2011a). A methodology for model-based greenhouse design: Part 1, greenhouse climate model for a broad range of designs and climates. *Biosystems Engineering*, 110(4): 363-377.
- Villegas, N. y Málikov. I. (2006). Modelación de la estructura dinámica de las aguas de la Cuenca del Pacífico Colombiano. *Boletín Científico CCCP* 13: 97-114.
- Villegas, N. y Málikov (2008). Software aplicativo para el cálculo de corrientes verticales de la Cuenca del Pacífico Colombiano: Estructura Vertical de las Aguas EVA V.2. Universidad Nacional de Colombia y Colciencias, N.º 118, 2007. Certificado de Registro de Soporte Lógico de la Dirección Nacional de Derecho de Autor, Libro 13, Tomo 20, Partida 210.
- Wang, W., Bruyère, C., Duda, M., Dudhia, J., Gill, D., Kavulich, M., Keene, K., Lin, H-C., Michalakes, J., Rizvi S.; Zhang, X.; Berner, J. y Smith, K. (2014). *ARW Version 3 Modeling System User's Guide*.
- Wilks, D.S. (2006). *Statistical Methods in the Atmospheric Sciences* 100, Academic Press.
- WMO. (2008). *Guide to Meteorological Instruments and Methods of Observation* (WMO-no. 8). World Meteorological Organisation: Geneva, Switzerland.

2. Modelos espaciales en cultivos

Rodrigo Gil Castañeda y Carlos Ricardo Bojacá Aldana

2.1 Introducción

En el presente capítulo se desarrolla el uso integrado de modelos espaciales y modelos de cultivos para cuantificar el efecto de la variabilidad espacial de la temperatura en el desarrollo y rendimiento de plantas de tomate cultivadas bajo invernadero. La geoestadística y los modelos de crecimiento de cultivos se combinan para llevar a cabo un ejercicio de simulación con el fin de cuantificar el efecto de la variación espacial de la temperatura dentro de invernaderos en el crecimiento de un cultivo de tomate.

Las variaciones espaciales de condiciones climáticas dentro de invernaderos han sido estudiadas y analizadas extensamente en la literatura científica, pero hasta ahora no se ha establecido la relación entre esas variaciones espaciales y su efecto directo sobre el rendimiento de un cultivo. Aquí mostramos cómo la integración de dos tipos de modelos aparentemente no relacionados, la geoestadística y el modelado de cultivos, permite obtener una representación más completa de la realidad. Los resultados evidencian que existen variaciones espaciales de la temperatura que afectan el desarrollo de las plantas cultivadas en el invernadero. Al final del capítulo se propone el uso de este enfoque para determinar el efecto de la variación espacial en otros casos de estudio.

Al inicio del capítulo se presentarán de manera introductoria algunos aspectos relevantes de la producción bajo invernadero en el trópico alto-andino; además, se introducirán los fundamentos del análisis geoestadístico. Posteriormente se presentarán los resultados de trabajos de investigación desarrollados por el grupo de modelado y simulación tendientes a determinar la variabilidad espacial de temperatura dentro de invernaderos y su efecto sobre el crecimiento y desarrollo del cultivo. Para simular el crecimiento y desarrollo de plantas de tomate se emplea el modelo Tomgro, cuyos fundamentos y uso se explican en el capítulo Modelado de cultivos.

2.2 Sistemas de producción bajo invernadero

Un invernadero es un ambiente cerrado en el cual se produce un incremento de la temperatura por la presencia de una cubierta que retiene la radiación en su interior (El-Ghoumari, 2003). La cubierta empleada en los invernaderos protege los cultivos frente a condiciones bióticas y abióticas extremas (Impron *et al.*, 2007). En el trópico alto-andino los invernaderos protegen los cultivos frente a los efectos negativos de lluvias, granizo y bajas temperaturas, lo que mejora las condiciones para el desarrollo de los cultivos (Bojacá *et al.*, 2009a). Sin embargo, la cubierta también disminuye el flujo de aire en el interior del invernadero (El-Ghoumari, 2003). Este flujo de aire se conoce generalmente como ventilación natural, y es un factor que influye directamente en el clima dentro del invernadero, y debe tenerse en cuenta desde la etapa de diseño de la estructura (Villagrán *et al.*, 2012). Un sistema de ventilación bien diseñado permite un adecuado control del clima en el interior del invernadero, lo cual no solo permite optimizar el uso de energía (De Jong y Bot, 1992) sino que también permite acercarse a valores óptimos de variables climáticas que determinan el desarrollo del cultivo como, por ejemplo, la temperatura, la humedad relativa y la concentración de CO₂ (Bot, 1983; Castilla, 1994; Kittas *et al.*, 1997).

En Colombia la optimización del diseño de los invernaderos ha sido bastante limitada y con excepción de unas pocas experiencias

(Villagrán *et al.*, 2012), se siguen usando estructuras muy similares a las que se establecieron en la sabana hace ya 40 años (Bojacá *et al.*, 2011). Estas estructuras se caracterizan por efectuar la ventilación natural a través de cortinas móviles en los cuatro costados del invernadero (que permiten una apertura de alrededor de 1.5 m) y unas aperturas fijas en las cumbreras (techos) de 0.5 m (Bojacá *et al.*, 2009b).

La ventilación natural de un invernadero es un método pasivo en el cual el movimiento del aire depende de dos fuerzas; la primera es convección forzada, causada por la entrada del aire externo, y la segunda, la convección libre, que es generada por el diferencial de temperatura entre el interior y el exterior (Boulard *et al.*, 1994). La eficiencia de la ventilación natural depende de factores como la velocidad y dirección del viento, el diferencial de temperatura entre el exterior y el interior del invernadero, el diseño y la orientación de la estructura, la presencia o ausencia de cultivos (Ould-Khaoua *et al.*, 2006) y características propias de este como la densidad de siembra y la altura de las plantas. Esto último debido a que el cultivo dentro del invernadero actúa como una barrera rompe-vientos que puede llegar a limitar la ventilación en las zonas centrales de la estructura. La ventilación de las zonas centrales del invernadero es importante ya que permite evacuar los excesos de humedad, previniendo así su acumulación. La condensación de agua sobre las superficies de la planta (por ejemplo, sobre las hojas) durante prolongados períodos de tiempo es uno de los principales factores que favorecen la aparición de enfermedades (Gil *et al.*, 2011). El aire que ingresa al invernadero como consecuencia de la ventilación natural también permite un incremento en las concentraciones de CO₂ (Lorenzo *et al.*, 1990; Lorenzo, 1994). Esto se debe a que el aire externo es la principal fuente de CO₂ en invernaderos naturalmente ventilados que no cuentan con un sistema de inyección de carbono.

La ventilación también determina en gran medida la temperatura dentro de un invernadero. En un escenario ideal, durante las horas de alta radiación solar la circulación constante de aire desde el exterior hacia el interior del invernadero debería eliminar los excesos de calor y mantener la temperatura cerca de un valor óptimo. Por el contrario, cuando la ventilación es insuficiente se generan incrementos de la temperatura, algunas

veces por encima del máximo que las plantas toleran, lo que ocasiona una excesiva transpiración que ocasiona problemas como estrés hídrico y desórdenes fisiológicos como el aborto de flores y frutos, y el agrietamiento o rajado de los frutos (Villagrán *et al.*, 2012). El presente capítulo se centra en el estudio de las variaciones espaciales de la temperatura dentro de invernaderos ventilados de manera natural y su efecto sobre el crecimiento y rendimiento en cultivos de tomate. Esto debido a que la tasa de desarrollo de muchos procesos biológicos se ve afectada por la temperatura (Trudgill *et al.*, 2005), y dentro de un invernadero la distribución de la temperatura es uno de los factores que influyen la uniformidad en el crecimiento y desarrollo de un cultivo (Zhao *et al.*, 2001).

En la agricultura que se lleva a cabo bajo invernadero, el estudio de la heterogeneidad de factores bióticos y abióticos se ha convertido en un aspecto importante debido al impacto que tiene en la calidad y cantidad de los bienes agrícolas que se producen (Boulard *et al.*, 2002). La determinación de la magnitud de la heterogeneidad espacial, sus efectos y la comprensión de sus causas permite plantearse objetivos tendientes a optimizar ciertas condiciones para mejorar el sistema (Kempes y van den Braak, 2000). Sin embargo, la mayoría de las investigaciones han estudiado solo los patrones verticales de la variación de la temperatura, especialmente como respuesta a la incorporación de barreras a la ventilación, como, por ejemplo, mallas anti-insectos. Bajo estas circunstancias y en invernaderos sin cultivo se han determinado gradientes del orden de 4.5 a 5 °C entre la parte superior del invernadero y las áreas cercanas al suelo (Soni *et al.*, 2005). En este mismo trabajo reportan que estos gradientes se pueden incrementar hasta en 14% con la presencia de cultivos adultos. Majdoubi *et al.* (2009) encontraron que las variaciones de temperatura dentro del invernadero son mayores cuando la temperatura exterior es alta; encontraron también que cuando la temperatura exterior es de 30 °C la temperatura en el interior del invernadero cerca de la cubierta superior es de 38 °C y por debajo del canopi de las plantas es de 32 °C.

Aun así, la mayoría de los trabajos realizados bajo invernadero suponen que los factores climáticos son homogéneos (Kindelan, 1980; Lamruni *et al.*, 2001). Sin embargo, como se verá a lo largo de este capítulo, esta

condición no se presenta; y por el contrario, se mostrará, mediante el modelado y la simulación, que se presentan variaciones espaciales de la temperatura dentro de un invernadero, que a pesar de parecer pequeñas, afectan procesos como el crecimiento de las plantas y su rendimiento.

2.2.1 Estudio de la variabilidad espacial por medio de la geoestadística

Con el propósito de detectar, evaluar y visualizar patrones de distribución de la temperatura dentro de invernaderos se emplean métodos de análisis de variables continuas en el espacio, específicamente métodos geoestadísticos. El uso adecuado de la geoestadística permite predecir valores en lugares no muestreados a partir de un conjunto de mediciones realizadas en ubicaciones espaciales conocidas (proceso espacial). De esta manera se logra determinar si existe un gradiente espacial de la temperatura dentro de un invernadero cultivado, así como cuantificar su magnitud y distribución en el espacio.

Un proceso espacial se define como el conjunto de valores que puede tomar una variable de interés denotada como Z (la temperatura) en cualquier ubicación espacial (s) dentro de un espacio definido. El dominio, D , puede ser un conjunto discreto o continuo, fijo o aleatorio. En el presente trabajo D corresponde a un conjunto fijo y continuo en dos dimensiones (un perfil horizontal dentro del invernadero, $d = 2$). De manera formal, la temperatura (Z) dentro de un invernadero (D) es un proceso estocástico (Cressie, 1992), definido de la siguiente manera:

$$\{Z(s), s \in D \subset \mathbb{R}^d\},$$

donde D corresponde al subconjunto índice formado por todas las ubicaciones (s) dentro de un espacio euclidiano $\mathbb{R}^d$, en este caso $d = 2$. La metodología para el estudio de la variabilidad espacial de la temperatura, bajo el enfoque de la geoestadística, consta de tres fases: el análisis exploratorio, la estimación y modelado de la dependencia espacial y la predicción en sitios no muestreados con su correspondiente validación (Isaaks y Srivastava, 1989).

El análisis exploratorio permite aproximarse de manera marginal a la función de distribución de la variable, para lo cual generalmente se usa la prueba de normalidad de Kolmogorov-Smirnov. Además se determina si los datos presentan alguna tendencia como consecuencia de su ubicación espacial. Para esto se usan dispersogramas de la variable contra cada uno de los ejes.

Los parámetros de dependencia de un proceso espacial se definen a partir de la estimación del semivariograma, el covariograma o el correlograma. Sin embargo, el más general es el semivariograma ($\gamma(h)$) que existe bajo el supuesto de estacionariedad intrínseca (Cressie, 1992) y que se define como:

$$2\gamma(h) = \text{Var}(Z(s+h) - Z(s)).$$

La segunda fase del análisis consiste en estimar dicha dependencia espacial. $\gamma(h)$ comúnmente se estima a través del método de momentos (Matheron, 1973):,

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{t=1}^{N(h)} [z(s_i) - z(s_i + h)]^2,$$

donde $\hat{\gamma}(h)$ es la semivarianza empírica; $z(s_i)$ es el valor de la temperatura en cada uno de los lugares donde se midió; $z(s_i) + h$ es el valor de la temperatura pero en una ubicación separada de la anterior por una distancia h llamada rezago espacial, y $N(h)$ es el número de parejas que se encuentran separadas por esa misma distancia.

Cuando los sitios de medición están irregularmente espaciados es necesario fijar tolerancias para las distancias h . El semivariograma muestra el grado de dependencia espacial de la variable; generalmente esta dependencia decrece como consecuencia de un incremento en la distancia de separación entre los puntos.

En esta fase también se procede a ajustar un modelo teórico con base en el semivariograma empírico a través de métodos de ajuste como mínimos cuadrados o máxima verosimilitud. Los modelos teóricos empleados deben ser válidos, para lo cual deben garantizar que la varianza del error de predicción sea positiva.

Los semivariogramas empíricos calculados a partir de las mediciones de la temperatura se han ajustado bien a distintos modelos; sin embargo, el que ha mostrado mejor ajuste en la mayoría de los casos ha sido el esférico, cuya fórmula es (Cressie, 1993):

$$\gamma(h | \theta) = C_0 + C_1 \left(\left(\frac{3}{2} \right) \left(\frac{h}{a} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{a} \right)^3 \right),$$

donde a (en metros, m) es el rango de máxima influencia; C_0 representa el efecto nugget o pepita. El efecto pepita es la consecuencia de dos errores: de muestreo y de la variabilidad espacial que puede ocurrir en distancias muy pequeñas. C_1 es el componente estructural de la varianza y corresponde a la variabilidad explicada por el modelo; $C_0 + C_1$ es el valor de la silla de la semivarianza, la cual representa la varianza ordinaria de la muestra; y h es el rezago, que corresponde a la distancia entre pares de datos que representan mediciones de la temperatura en diferentes ubicaciones dentro del invernadero. Los parámetros del modelo teórico del semivariograma ($\theta = C_0, C_1$ y a) se estimaron mediante el método de máxima verosimilitud restringida, el cual ha sido empleado satisfactoriamente para este fin en otros trabajos (Farrington y Manning, 1990; Diggle y Ribeiro, 2007).

La tercera fase corresponde a la predicción y la validación. La predicción espacial permite determinar el valor de la variable Z en cualquier ubicación de interés s_0 dentro de la zona de estudio, para lo cual se utiliza el método conocido como Kriging, que es un predictor lineal óptimo, esto es, insesgado y de mínima varianza (Cressie, 1992):

$$\hat{Z}(s_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(x_i),$$

Donde los λ_i son los pesos (ponderaciones) que se asignan a cada valor de la variable en las posiciones observadas $Z(s)$ con base en los parámetros del semivariograma teórico previamente ajustado (Cressie, 1992). Cuando la media del proceso es desconocida es necesario imponer ciertas restricciones para mantener el insesgamiento; por ejemplo, cuando la media es constante pero desconocida la restricción es $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Con el fin de evaluar la calidad de la predicción se emplean dos procedimientos. El primero es comúnmente conocido como validación cruzada y consiste en retirar, uno por uno, los valores de la temperatura medidos y calcular nuevamente su valor empleando el modelo propuesto a partir de los datos restantes. Cuando el método logra capturar y representar la variabilidad espacial, la diferencia entre los valores estimados y los medidos debe ser mínima. El segundo es a través de la raíz cuadrada media del error (RMSE) calculada para la predicción espacial realizada con el Kriging; esto es posible debido a que además de estimarse el valor de la temperatura en ubicaciones no muestreadas también es posible estimar la varianza de esas predicciones.

2.2.2 Determinación de la variabilidad espacial de la temperatura dentro de invernaderos y su efecto sobre el crecimiento y rendimiento de cultivos

El trabajo efectuado por el grupo de investigación en Modelado y Simulación de Sistemas tendiente a determinar la variabilidad de la temperatura dentro de invernaderos y su efecto sobre el crecimiento y rendimiento de cultivos se llevó a cabo en dos fases. En la primera se determinó cómo es la variación espacial de la temperatura hora a hora dentro de invernaderos con distintos tipos de ventilación natural (Bojacá *et al.*, 2009b). En la segunda se estableció el efecto que podrían tener estas variaciones sobre el crecimiento y rendimiento de un cultivo de tomate bajo invernadero (Bojacá, *et al.*, 2009a).

2.2.3 Fluctuación horaria de la variación espacial de la temperatura dentro de un invernadero

El objetivo de este estudio fue establecer la variabilidad espacial aplicando métodos geoestadísticos para detectar, evaluar y representar patrones de distribución de la temperatura en zonas relativamente pequeñas, como los invernaderos.

Materiales y métodos

Para establecer la variación espacial de la temperatura se seleccionaron dos invernaderos en la Sabana de Bogotá dedicados a la producción de rosas. Los invernaderos se seleccionaron por tener diseños y grados de control del clima diferentes.

El primer invernadero, ubicado en el municipio de Suesca (6.033° N – 74.233° O), tiene un área de 5.100 m^2 y cuenta con un diseño tradicional (Figuras 1A y 1B), por lo que se llamará invernadero tradicional (IT). Este invernadero está compuesto de 15 naves, cada una de 6.8 m de ancho y orientadas en sentido norte-sur; tiene una sección lateral de 50 m orientada en sentido oriente-occidente. La altura de las canales y las cumbreras es de 3.7 y 7.8 m, respectivamente. Este tipo de diseño es el más utilizado en la producción bajo invernadero en Colombia, cuenta con cortinas móviles en sus cuatro costados, una apertura fija en el techo de cada nave y un sistema de ductos inflables, el cual es utilizado durante las horas de la noche para cerrar la apertura y reducir las pérdidas de calor. Generalmente, en este tipo de invernaderos las cortinas laterales y la cumbrera se abren en las mañanas ($\approx 7:30 \text{ a.m.}$) y se cierran en la tarde ($\approx 4:00 \text{ p.m.}$) Durante el desarrollo del presente trabajo las cortinas móviles se mantuvieron abiertas (1.5 m) durante las horas del día, y en la noche permanecieron cerradas.

El segundo invernadero está situado en el municipio de Tenjo (5.517° N – 74.317° O), ocupa un área total de 9.792 m^2 y la ventilación se realiza por medio de aperturas cenitales (Figuras 1C y 1D). Este invernadero está compuesto de 18 naves, cada una de 8 m de ancho orientadas en dirección norte-sur y una sección lateral de 68 m. La altura de las canales y las cumbreras es de 3.0 y 5.3 m, respectivamente. Este invernadero cenital (IC) cuenta con un sistema de apertura y cierre de la ventilación cenital que se logra enrollando el plástico que sirve de cubierta sobre tubos dispuestos a lo largo de las naves del invernadero; el sistema se encuentra automatizado y es controlado por un computador. Durante el período de adquisición de datos el sistema estaba programado para que la ventilación se realizara cuando se registraran temperaturas internas superiores a 20°C y se cerrara con temperaturas inferiores a 14°C .



Figura 1. Vista general de un invernadero cenital IC (A y B) y tradicional IT (C y D). En las figuras A (IC) y C (IT) se puede observar la ventilación lateral desde el exterior del invernadero; y en las figuras B (IC) y D (IT) la ventilación cenital desde el interior del invernadero.

Durante el tiempo en que se hicieron las mediciones, ambos invernaderos se encontraban sembrados con rosas a una densidad de 6 plantas m^{-2} . Los sensores de temperatura se instalaron dentro de una cuadrícula regular y como resultado se obtuvieron montajes con 30 y 35 puntos de medición que fueron ubicados a una altura de 1.5 m de la superficie del suelo en el IT e IC, respectivamente. La temperatura se registró usando termocuplas tipo T (Cobre-constantan), las cuales se situaron dentro de cápsulas ventiladas para evitar el efecto de la radiación directa del Sol. Antes de iniciar las mediciones todos los sensores se calibraron contra el punto de congelación del agua, de acuerdo con el procedimiento sugerido por el fabricante del sensor (Escort DLS, 2008). Los sensores se conectaron a registradores de datos

que almacenaron la temperatura cada 10 minutos durante un período de 28 días consecutivos entre el 14 de diciembre 2007 y el 10 de enero de 2008 en el IC. El período de recolección de datos para IT comenzó el 2 de abril de 2008 y terminó el 30 de abril de 2008.

Teniendo en cuenta los reportes previos que indicaban que la variación espacial de la temperatura depende de la temperatura externa y considerando que esta varía a lo largo del día, los datos originales se promediaron para cada hora y se realizó un análisis por separado para cada una de ellas. El análisis de los datos se llevó a cabo siguiendo las fases descritas anteriormente para el método geoestadístico: análisis exploratorio, estimación y modelado de la dependencia espacial y predicción espacial. Estos análisis se llevaron a cabo empleando lenguaje de programación R (R Development Core Team, 2012), específicamente la librería geoR (Ribeiro y Diggle, 2001).

Resultados y discusión

Los resultados indican que dentro de los invernaderos se presenta un gradiente de temperatura en el plano horizontal, el cual es más intenso durante las horas del día. Los semivariogramas ajustados se presentan en las figuras 2 y 3 para el invernadero tradicional y cenital, respectivamente.

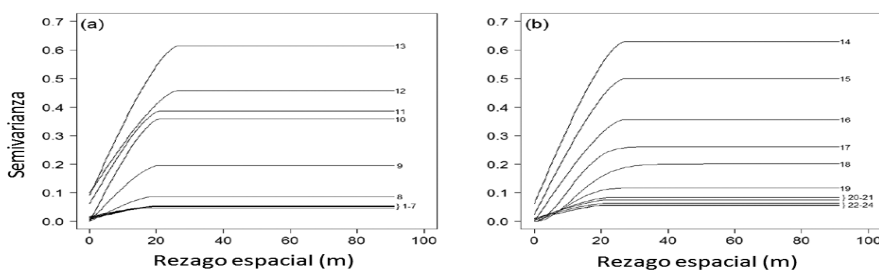


Figura 2. Semivariogramas ajustados para representar la dependencia espacial de temperatura dentro del invernadero tradicional, (a) para las horas de la 1 a las 13, y (b) de 14 a 24 horas. La semivarianza representa la variación entre dos puntos en el espacio separados por una distancia, rezago espacial (m).

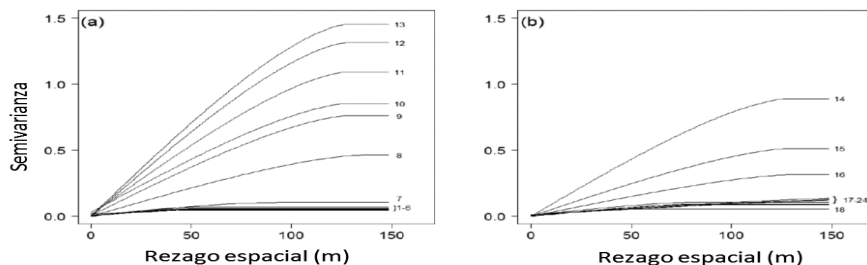


Figura 3. Semivariogramas ajustados para representar la dependencia espacial de temperatura dentro del invernadero con ventilación cenital, (a) para las horas de la 1 a las 13 y (b) de 14 a 24 horas.

Los valores estimados para la silla mediante el semivariograma indican que la existencia de variación espacial de temperatura dentro de los invernaderos es diferente, dependiendo de la hora del día. En ambos invernaderos durante las horas de la noche, cuando la temperatura dentro de los invernaderos es baja, los modelos estimaron bajos valores para la silla, lo cual indica una mayor homogeneidad espacial. Contrario a lo que ocurre durante la noche, en las horas del día los valores de la silla se incrementan hasta alcanzar su valor máximo en las horas del mediodía. La mayor magnitud de la silla en las horas del mediodía indica mayores variaciones espaciales de la temperatura entre diferentes localizaciones dentro del invernadero. Los valores del rango (a) mostraron valores similares para la mayoría de las horas. Sin embargo, durante la tarde el valor de rango se incrementó y presentó valores entre 16.4 y 33.2 m. La máxima distancia de separación entre dos puntos del invernadero, en el plano horizontal, es de 114 m. El valor bajo del rango con respecto a la máxima separación entre los puntos hace suponer una dependencia espacial a cortas distancias para la temperatura dentro de este invernadero. Como consecuencia, es de esperarse la aparición de parches cuando se visualice el resultado de la predicción de la temperatura dentro del invernadero.

En el invernadero cenital el valor estimado del rango varió entre 79.6 y 134.5 m en el período de tiempo entre las 07:00 y 16:00 h. La proximidad entre los valores del rango y la máxima separación entre

dos puntos dentro del invernadero (159 m) indica que la mayor parte del área dentro del invernadero tiene temperaturas muy similares. Seguramente, como se puede inferir a partir del trabajo de Boulard *et al.* (2002), el diseño de este invernadero en lo que respecta a la ventilación, logra reducir las variaciones espaciales de la temperatura dentro del invernadero. De acuerdo con estos resultados, la ventilación natural a través de aperturas cenitales operadas automáticamente permite un control más efectivo de la temperatura. En un invernadero tradicional ventilado a través de aperturas fijas en la cumbrera, el área para el intercambio de aire puede ser insuficiente para permitir un apropiado flujo. Adicionalmente, las aperturas laterales, las cuales son enrolladas hacia arriba, solo permiten un intercambio de aire en las áreas cercanas al perímetro del invernadero, donde las plantas, en este caso rosas, actúan como una barrera rompevientos.

La distribución de temperatura hora a hora fue predicha ajustando un modelo teórico para cada una. Como se mencionó anteriormente el modelo que mejor se ajustó para las diferentes horas fue el esférico. Se seleccionaron los mapas de la distribución de la temperatura para algunas horas del día, para ilustrar las variaciones espaciales y temporales de la temperatura en cada invernadero (Figuras 4 y 5). En ambos, el gradiente de temperatura en el plano horizontal fue mayor durante las horas del día. Esto se refleja en el incremento de la magnitud de la semivarianza durante las horas del día, las cuales fueron modeladas y visualizadas usando las predicciones generadas por el método de Kriging. Dentro del IC, el promedio de las diferencias de temperatura entre las localizaciones con el valor máximo y mínimo predicho fue de 1.7 °C para un período de 24 h. Durante el día, las diferencias de temperatura fueron de 2.3 °C, con una diferencia máxima de 3.2 °C, la cual se presentó a las 14:00 h. Las diferencias durante las horas de la noche fueron de 1.1 °C, encontrándose las menores diferencias en el período entre las 04:00 y las 07:00 h. Los mapas de distribución de temperatura (Figura 4) muestran varias áreas con temperaturas altas (con respecto a otras áreas dentro del invernadero) dentro el invernadero, lo cual es consecuencia del bajo valor del rango al que se hizo mención anteriormente.

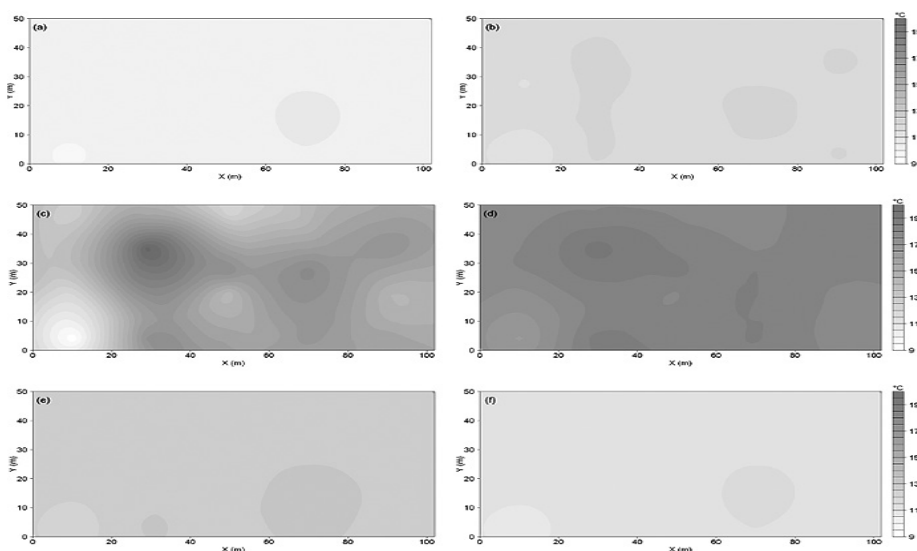


Figura 4. Visualización de la distribución de temperatura dentro del invernadero tradicional. La predicción en lugares no muestreados se realizó mediante la técnica de Kriging ordinario en bloques. Se usa la distribución de temperatura a las 4:00 (a), 8:00 (b), 12:00 (c), 16:00 (d), 20:00 (e) y 24:00 (f) para ilustrar la variación espacial de la temperatura durante diferentes horas del día.

Los mapas de la distribución espacial de temperatura para el IC indican un gradiente mínimo de la temperatura durante todas las horas del día. Las zonas calientes del invernadero se localizaron cerca del centro con un pequeño desplazamiento hacia el oriente. En promedio, la diferencia entre la temperatura del centro del invernadero y la predicha en los bordes fue de 1.5°C para un período de 24 horas. Durante las horas de la noche, esta diferencia promedio fue de 0.7°C , mientras que durante el día estas diferencias fueron de 2.2°C . La máxima diferencia predicha para este invernadero se halló a las 12:00 h con un valor de 3.5°C . Durante las horas de la mañana, los mapas de distribución de la temperatura describen un comportamiento particular, como se aprecia en la figura 5b. La parte oriental de los invernaderos es el área que presenta temperaturas más altas, probablemente debido

a la exposición directa al Sol. A medida que avanza el día y el Sol continúa su trayectoria de oriente a occidente el parche de altas temperaturas se desplaza hacia el centro del invernadero.

Es bien conocido el hecho de que los patrones de temperatura siguen los patrones de circulación del aire; en consecuencia los “parches calientes” se asocian con zonas en donde la velocidad del aire es baja (Ould-Khaoua *et al.*, 2006). Los resultados obtenidos en el presente trabajo mostraron que dentro del invernadero con ventilación cenital las temperaturas altas están presentes cerca del centro. Estos resultados coinciden con los reportados por Ould-Khaoua *et al.* (2006), quienes encontraron que las temperaturas dentro de las naves exteriores son menores que las que se presentan en el centro del invernadero. Las diferencias entre la temperatura interna y la externa en las naves del perímetro del invernadero son de solo 2 °C, mientras que en las camas centrales esta diferencia puede alcanzar valores entre 3.5 y 5 °C. Sin embargo, esos resultados no coinciden con las predicciones espaciales obtenidas para el invernadero tradicional. En este caso, el invernadero está rodeado por otros invernaderos a distancias inferiores a 5 m por 3 de las 4 caras laterales del invernadero; y frente a la otra cara se encuentra una cerca de árboles de 3.5 m de alto a una distancia de 4 m de la pared del invernadero. Esas barreras limitan el flujo de aire a través de las respectivas aperturas laterales, generando un perfil irregular de la temperatura, especialmente en aquellas horas del día en que la diferencia entre la temperatura interna y la externa son mayores (Figuras 5c y 5d).

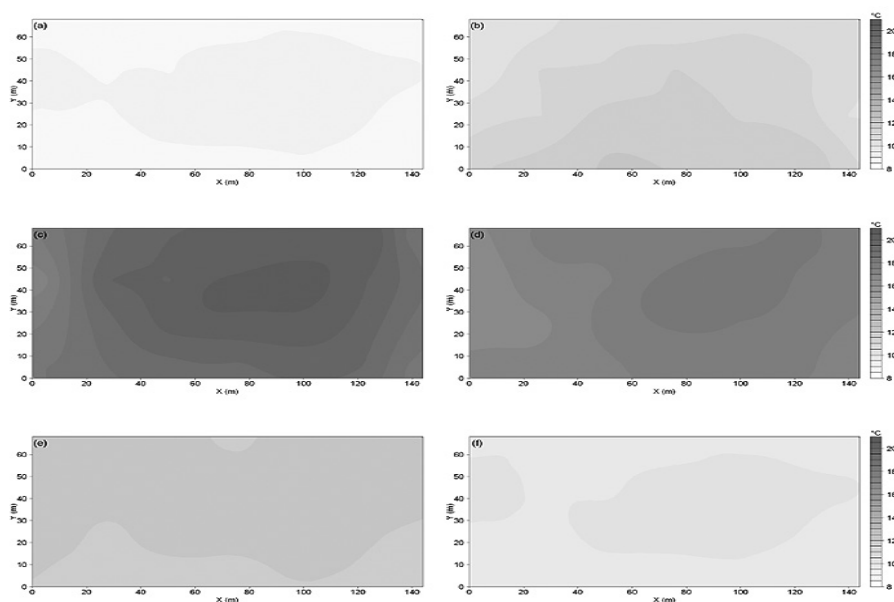


Figura 5. Visualización de la distribución de temperatura dentro del invernadero tradicional. La predicción en lugares no muestreados se hizo mediante la técnica de Kriging ordinario en bloques. Se usa la distribución de temperatura a las 4:00 (a), 8:00 (b), 12:00 (c), 16:00 (d), 20:00 (e) y 24:00 (f) para ilustrar la variación espacial de la temperatura durante diferentes horas del día.

2.2.4 Efecto de las variaciones espaciales de la temperatura en el desarrollo y crecimiento de cultivos

El siguiente paso es determinar qué efecto puede tener esta variación espacial de temperatura en el crecimiento y la producción de un cultivo bajo invernadero. Los modelos empleados para simular el crecimiento de cultivos se han usado de manera exitosa para representar el crecimiento, el desarrollo y el rendimiento de una amplia variedad de cultivos. En algunos de esos modelos se ha reconocido como una importante fuente de incertidumbre la variación espacial y temporal de variables climáticas, especialmente cuando los modelos se aplican para simular el comportamiento en grandes áreas (De Wit y Van Diepen, 2008). Por esto las investigaciones más recientes buscan incorporar en los modelos

de cultivos la variabilidad espacial de factores climáticos (Yun, 2003; De Wit *et al.*, 2005; Mo *et al.*, 2005). Estos estudios están basados en evidencias, como las presentadas en las páginas anteriores, que demuestran que en los agroecosistemas las propiedades físicas, químicas y biológicas varían en el espacio, aun en distancias pequeñas (Sparovek y Schnug, 2001). El estudio y la comprensión de esta variabilidad ha sido esencial para el desarrollo y puesta en práctica de conceptos como la agricultura de precisión (Wong y Asseng, 2006). Como ya se mencionó, no es apropiado considerar uniforme el clima dentro de un invernadero, y la geoestadística surge como un método para mejorar la comprensión de la incertidumbre de esta variable a través del modelado de su variación espacial.

En las siguientes páginas se presenta el resultado de unir métodos geoestadísticos con modelos dinámicos de crecimiento del cultivo con el fin de establecer la variabilidad en el crecimiento de los cultivos de tomate en condiciones de invernadero debidas a variaciones espaciales de la temperatura.

Materiales y métodos

Para determinar el efecto de la distribución espacial de la temperatura en el crecimiento y desarrollo de la planta se empleó la segunda versión del modelo Tomgro (Bertin, 1995; Gary *et al.*, 1995), el cual fue previamente calibrado para zonas alto-andinas tropicales por Cooman (2002). Una explicación detallada del modelo y la calibración y validación de este modelo para las condiciones del trópico alto-andino se puede consultar en el capítulo de Modelado de Cultivos y en Cooman (2002). Cooman y Schrevers (2007) analizaron el efecto de las variaciones en la temperatura del aire, la concentración de dióxido de carbono y la intensidad de la radiación solar sobre las salidas del modelo Tomgro. Este estudio determinó un efecto importante de la temperatura del aire en la expansión del área foliar y la distribución de la materia seca en los diferentes órganos. Esta sensibilidad del modelo a la temperatura es la condición que permite su uso para evaluar el efecto de las variaciones espaciales de esta variable sobre el desarrollo y la producción de plantas de tomate.

Las mediciones espaciales de la temperatura fueron las mismas que se hicieron para el invernadero cenital, cuyo método de medición se describió en la sección anterior de este capítulo. Como ya se mencionó, el invernadero tenía establecido un cultivo de rosas. La decisión de utilizar mediciones de temperatura efectuadas sobre un cultivo de rosas para determinar el rendimiento de un cultivo de tomate se debió a la disponibilidad que se tenía de emplear el Tomgro, un modelo de simulación calibrado para las condiciones de la Sabana de Bogotá y a las similitudes que existen entre los sistemas de cultivo de tomate y rosas bajo invernadero. Estas similitudes hacen referencia a que ambos están sembrados en hileras; las plantas adultas alcanzan alturas similares y ambas especies se cultivan en invernaderos en la Sabana de Bogotá. Pero también existen particularidades al comparar el efecto de cada uno de los cultivos sobre el clima dentro del invernadero. Las posibles diferencias en el índice de área foliar (IAF, m^2 lámina de la hoja m^{-2} de suelo) pueden afectar el nivel de transpiración y, por tanto, el efecto de cada cultivo sobre la temperatura del aire en el invernadero (Katsoulas *et al.*, 2002; Impron *et al.*, 2008).

Para los cultivos de tomate plenamente establecidos cultivados en invernaderos con diferentes grados de control del clima en la Sabana de Bogotá, Cooman (2002) encontró un IAF entre 3.6 y 4.8 en el momento de la floración del primer racimo. En un cultivo de rosas adultas sembradas a una densidad de 6 plantas m^{-2} el IAF tiene valores entre 3.5 y 4.2. Debido a que los valores de IAF son similares para ambos cultivos, el efecto de la transpiración sobre la temperatura puede suponerse similar y las posibles diferencias en el clima causadas por estas especies se suponen insignificantes para el objetivo del presente trabajo.

Las condiciones en el exterior del invernadero se registraron mediante una estación climática automática. En este caso el conjunto de datos obtenido se dividió en cinco subconjuntos. Esto se hizo con base en el rango de los valores de la radiación global (W m^{-2}), el cual fue dividido en cinco segmentos de igual longitud. Posteriormente, los datos de temperatura promediados por hora se clasificaron en uno de los subconjuntos, de acuerdo con la radiación global por hora en el momento de la medición. Por último, todos los valores registrados por hora de cada punto en particular se promediaron por subconjunto de acuerdo con la radiación

global. Como resultado, se obtuvieron cinco subconjuntos de datos de distribución de la temperatura en el invernadero, con un valor promedio para cada uno de los 28 puntos de la malla espacial. Esto permite establecer la variación espacial en función de la radiación global.

Para poder ejecutar el Tomgro se requiere un archivo de variables climáticas, específicamente con valores horarios de la intensidad global de la radiación solar (W m^{-2}), temperatura del aire dentro del invernadero (T , $^{\circ}\text{C}$), déficit de presión de vapor (DPV, kPa) y la concentración de dióxido de carbono en el ambiente (Ca , ppm). El archivo climático requerido se construyó con los registros obtenidos en uno de los sensores situados cerca al centro del invernadero; los datos de radiación solar global se tomaron de la estación meteorológica que se instaló en el exterior del invernadero.

Para evaluar el efecto de la variación de temperatura dentro de un invernadero, se construyó un archivo de clima particular para cada metro cuadrado dentro de un invernadero experimental. Para cada metro cuadrado se predijo mediante Kriging el valor de la temperatura y su diferencia con relación a la temperatura registrada en una localización de referencia en el centro del invernadero. A continuación, cada observación de temperatura entre las 7 y 17 h del archivo de clima de referencia se clasificó en uno de los cinco niveles predefinidos para el análisis geoestadístico, de acuerdo con la radiación solar. Se construyeron, seguidamente, los archivos de clima incluyendo la variación de temperatura por cada metro cuadrado dentro del invernadero. Los parámetros climáticos restantes no se variaron en función de la posición en el invernadero.

Se realizaron en total 9.792 simulaciones por medio del Tomgro teniendo en cuenta las siguientes prácticas de manejo del cultivo: 224 días correspondientes a la duración del ciclo de crecimiento del cultivo, una densidad de cultivo de $2.7 \text{ plantas m}^{-2}$, plantas con 10 nudos al inicio de la simulación, un índice de área foliar de 0.473 m^2 , todos los racimos podados para tener cinco frutos, y una transmisión de luz del plástico de 80%. La salida generada por el Tomgro incluye un conjunto de parámetros e índices fisiológicos de las plantas; sin embargo, para el presente trabajo solo se presentan y discuten el número de nudos, que representa la edad de la planta, y el rendimiento del cultivo.

Resultados y discusión

En la figura 6 se compara la temperatura del exterior con la registrada en el interior del invernadero para un período de 24 horas. Como se puede observar, la temperatura dentro del invernadero es mayor que la que se registra en el exterior; esta tendencia se observa tanto en la noche como en el día, aunque la magnitud de la diferencia es mayor en las horas del día. Durante el día (7-17 h), la temperatura media dentro del invernadero fue de $16.5\text{ }^{\circ}\text{C}$, lo que representa un incremento de $1.3\text{ }^{\circ}\text{C}$ en comparación con la condición registrada en el exterior. Durante la noche, el invernadero es solo $0.7\text{ }^{\circ}\text{C}$ más caliente que el exterior. El promedio de radiación global durante las horas del día en el período de adquisición de datos varió entre 78.6 y 235.2 W m^{-2} , con un promedio de 148.6 W m^{-2} . Este rango de variación indica diferentes condiciones climáticas entre días (días soleados y nublados) y se puede definir como un período de medición representativo para la zona de estudio. Además, la velocidad media del viento fue de 0.52 m s^{-1} , la humedad relativa media de 84.4% , y la precipitación total durante el período de medición fue de 37 mm .

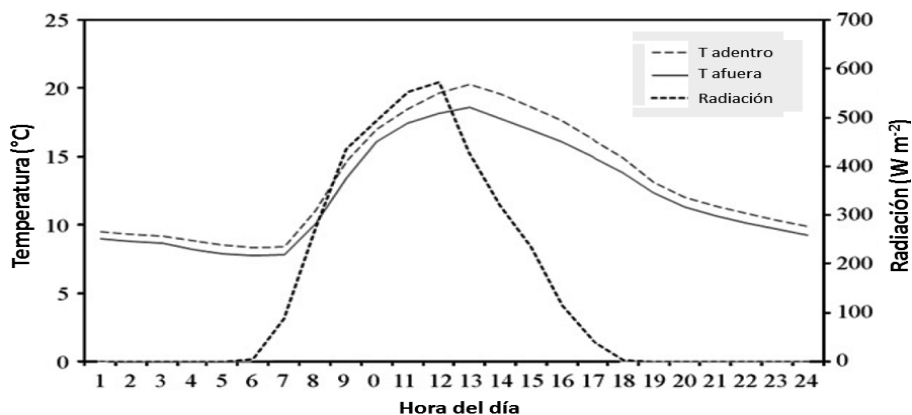


Figura 6. Variación horaria del promedio de la temperatura en el interior (T_{adentro}) y fuera del invernadero (T_{afuera}), y la intensidad de la radiación solar global durante el período de adquisición de datos.

2.2.5 Análisis geoestadístico

En la Tabla 1 se muestran los parámetros de los semivariogramas teóricos correspondientes a un modelo esférico que se calcularon para cada uno de los cinco segmentos. El modelo mostró un buen ajuste para todos los segmentos y el efecto pepita fue insignificante, lo que indica que solo una pequeña parte de la dependencia espacial de temperatura se debe a errores experimentales. Este resultado es más evidente cuando se determina el porcentaje de variación por efecto pepita con relación al valor total de la variación, que corresponde a la silla. Esta relación, expresada en porcentaje, se puede utilizar para clasificar la dependencia espacial de la variable estudiada (Chien *et al.*, 1997). Porcentajes entre 0 y 25 revelan una fuerte estructura de dependencia espacial (Cambar-della *et al.*, 1994) y de acuerdo con los resultados obtenidos es claro que la radiación global es el factor que más determina la magnitud de la dependencia espacial de la temperatura dentro de un invernadero.

Tabla 1. Parámetros de los semivariogramas ajustados al modelo esférico en función de la radiación global.

Radiación (W/m ²)	Efecto pepita (c0)	Silla (c, °C)	Rango (a, m)	c0/c (%)
< 177.2	0.001	0.095	105.7	1.2
177.2–380.9	0.016	0.198	120.2	8.2
380.9–566.8	0.020	0.514	126.5	3.9
566.8–752.8	0.010	0.935	131.2	1.0
> 752.8	0.052	1.344	133.4	3.9

También se observó un incremento del valor de la silla asociado a incrementos en la intensidad de la radiación global. Los valores altos de la silla están asociados con una mayor variabilidad espacial de la temperatura, como se puede ver en los semivariogramas ajustados (Figura 7). Los niveles de radiación globales bajos están relacionados con una mayor homogeneidad de la temperatura del aire dentro del invernadero.

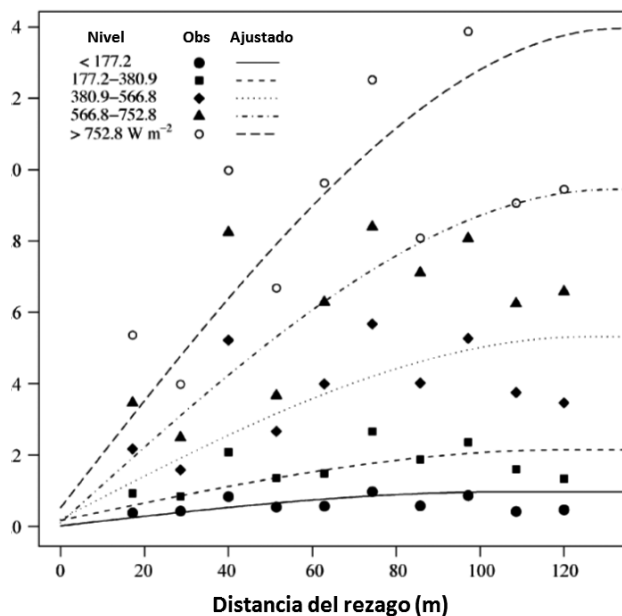


Figura 7. Semivarianzas empíricas (Obs) ajustadas (ajustado) para la temperatura del aire dentro de un invernadero en función de la radiación global. La semivarianza representa la variación entre dos puntos en el espacio separados por una distancia (rezago).

Las variaciones espaciales de la temperatura dentro del invernadero, estimadas con el uso del Kriging, se pueden visualizar en la figura 8. Se puede observar que las diferencias promedio de la temperatura, cuando la intensidad de la radiación es inferior a 170 W m^{-2} , no son de más de 1°C (Figura 8a), pero cuando la radiación global alcanzó niveles superiores a 752.8 W m^{-2} , las variaciones de temperatura promedio son de hasta 2.2°C , como se representa en la figura 8e. Las temperaturas más altas se predijeron cerca al centro del invernadero, con un leve desplazamiento hacia las áreas situadas en la zona superior izquierda. Las zonas más frías se ubicaron cerca de las paredes laterales de la estructura. Aunque las diferencias de temperatura entre las zonas del invernadero con el valor máximo y mínimo sean de solo un 1°C , esta puede generar comportamientos diferenciales en el crecimiento y desarrollo del tomate. Las predicciones de la temperatura realizadas mediante Kriging

en ubicaciones no muestreadas se consideran satisfactorias con base en las validaciones efectuadas. En promedio, la diferencia entre los datos medidos y los predichos fue de $0.3\text{ }^{\circ}\text{C}$.

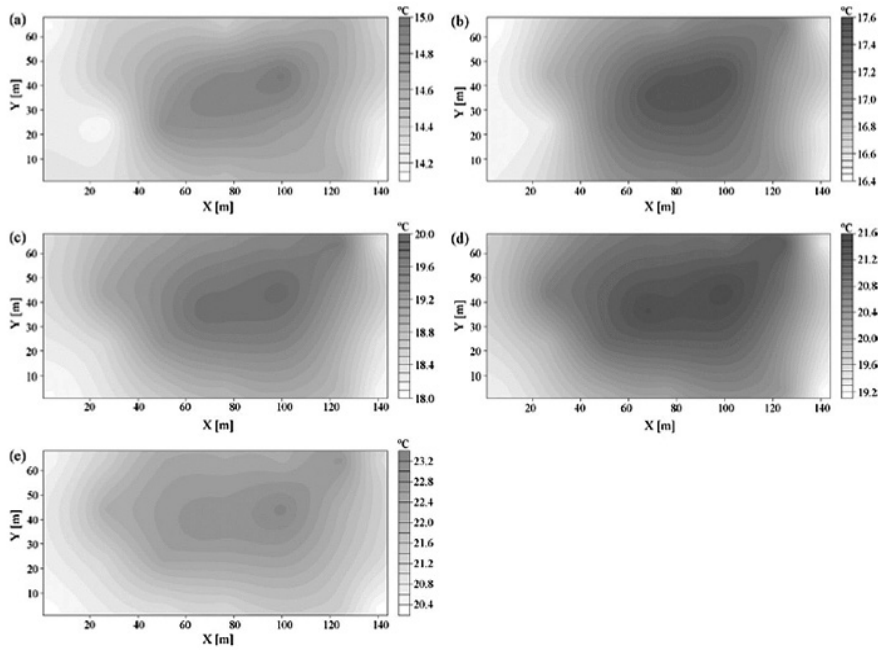


Figura 8. Visualización de la distribución de la temperatura dentro del invernadero en función de los niveles de radiación global: (a) < 177.2 , (b) 177.2 a 380.9 , (c) 380.9 a 566.8 , (d) 566.8 a 752.8 y (e) $> 752.8\text{ W m}^{-2}$. Las predicciones son para la distribución horizontal de la temperatura a 1.5 m de altura sobre la superficie del suelo, y se obtuvieron con base en los semivariogramas ajustados al modelo esférico.

El efecto de la variabilidad espacial de temperatura en el invernadero sobre el desarrollo de la planta se determinó a través del número de nudos del tallo principal al final del período de simulación. En la figura 9a se puede visualizar la distribución espacial del número de nudos al final del período considerado para el crecimiento y desarrollo del cultivo (224 días). El mayor número de nudos por plantas, según la simulación, se presenta en el centro del invernadero, en donde las temperaturas son

mayores, en comparación con las áreas laterales; la diferencia en términos de número de nudos fue de 3.6 nudos planta⁻¹. En un cultivo ideal de tomate, cada unidad simpodial consiste en un segmento de tallo con tres hojas y un racimo floral (Cooman, 2002). Según los resultados, las plantas situadas en las zonas más cálidas fueron capaces de producir una unidad simpodial adicional en comparación con las zonas laterales del invernadero. En términos de productividad esto significa que las plantas situadas en zonas más cálidas pueden desarrollar un racimo adicional, con sus correspondientes frutos. La media final del número de nudos para el área del invernadero fue de 76.7 nudos por planta⁻¹, mientras que la simulación de referencia, que empleó los datos del sensor ubicado en el centro del invernadero, estimó en 78.0 el número de nudos por planta. Este resultado indica que los datos de un solo sensor situado en el centro del invernadero no son representativos para determinar la temperatura media y su efecto sobre el crecimiento y desarrollo del cultivo de tomate.

La distribución del rendimiento, en términos de peso fresco de los frutos en el interior del invernadero se representa en la figura 9b. Al igual que para el desarrollo de los nudos, la zona más caliente del invernadero registró los rendimientos más altos con un máximo de 9.7 kg/m²; lo que representa un incremento de 3.3 kg/m² en comparación con las zonas más frías. Las diferencias aparentemente pequeñas en la temperatura del aire causan diferencias apreciables en el desarrollo de la planta, evaluadas en el presente trabajo en términos del número de nudos y el número de frutos cosechados.

Los resultados concuerdan con lo reportado por Cooman y Schrevens (2007) en relación a la influencia que tiene la temperatura sobre un mayor peso de los frutos y la sensibilidad global del modelo Tomgro a las variaciones climáticas, específicamente a la temperatura. El rendimiento final obtenido en la simulación usando el conjunto de datos climáticos de referencia fue de 9.6 kg/m², el cual es un valor bastante cercano al rendimiento máximo simulado en el centro del invernadero. El rendimiento promedio al final de la simulación para todo el invernadero fue de 8.3 kg/m², lo que representa una diferencia de 1.3 kg/m² (13.5%) en comparación con los resultados obtenidos usando el archivo climático de referencia. En este trabajo, los sensores

situados cerca del centro del invernadero sobreestimaron la temperatura de todo el invernadero y, en consecuencia, la simulación produjo una mayor tasa de desarrollo de la planta y un mayor rendimiento.

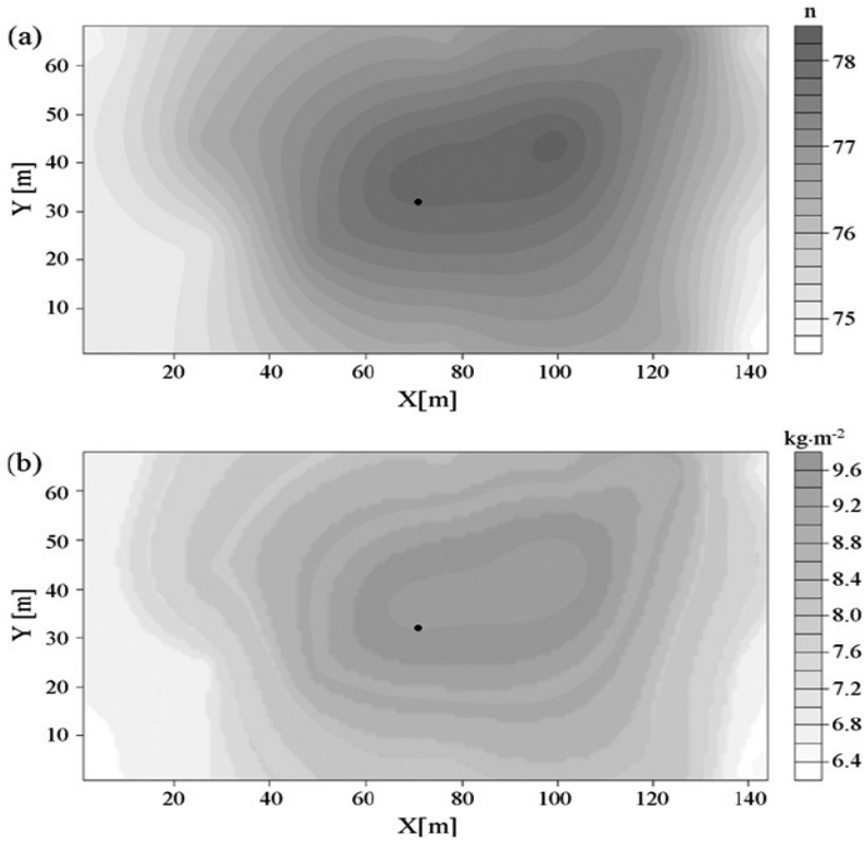


Figura 9. Número de nudos simulados por planta al final del ciclo (a) y visualización de la distribución del peso fresco de los frutos (b). El círculo sólido representa la ubicación del sensor del cual se obtuvieron los datos del archivo de clima de referencia.

En condiciones tropicales el diseño de invernaderos debe tomar en cuenta parámetros como la radiación solar (incrementar la interceptación), la ventilación natural (eliminar excesos de calor y humedad) con el fin de reducir la variabilidad espacial. En estas zonas, los estudios relacionados con el clima dentro del invernadero se han centrado en la comprensión y el manejo de las diferencias entre las temperaturas

externa e interna del invernadero, que pueden llegar a ser hasta de 5 °C, para reducir el estrés de las plantas a condiciones como las altas (Impron *et al.*, 2008) o bajas temperaturas.

La variabilidad espacial en crecimiento y producción de un cultivo se da como consecuencia de la suma de las variaciones de los distintos factores bióticos y abióticos (Di Virgilio *et al.*, 2007). Factores como la variabilidad espacial de propiedades fisicoquímicas del suelo contribuyen a la heterogeneidad que se presenta en el rendimiento de los cultivos. Sin embargo, los resultados presentados en este capítulo constituyen uno de los primeros enfoques para cuantificar el efecto de la variabilidad espacial de un factor climático sobre la productividad de un cultivo en invernadero. Aunque el trabajo solo prueba que el rendimiento de tomate en un invernadero está fuertemente influenciado por la variabilidad espacial de la temperatura, estas mismas variaciones pueden estar afectando el desarrollo y crecimiento de otros organismos vivos, como insectos y patógenos.

El trabajo presenta algunas limitaciones. La más importante es el hecho de haber utilizado datos de temperatura registrados en un invernadero sembrado con plantas de rosa en vez de tomate. En trabajos futuros se pretende evaluar la variabilidad de la productividad de un cultivo de rosa usando el conjunto de datos de temperatura ya existente. La aplicación de este enfoque a cultivos de rosas cultivadas en la Sabana de Bogotá, en donde el control del clima del invernadero es limitado, es fundamental para determinar la duración del período de crecimiento con el fin de maximizar la obtención de flores en las fechas específicas en que se presentan picos de demanda. La variabilidad espacial de la temperatura dentro de un invernadero cultivado con rosas puede causar variaciones en la duración del período de crecimiento de los brotes florales. Se podrían usar modelos como el propuesto por Pasian y Lieth (1996), basados en el concepto de unidades de calor, para medir el tiempo desde la aparición del brote hasta la apertura de la flor en distintas ubicaciones dentro del invernadero.

2.3 Conclusiones

La unión de diferentes tipos de modelos permite obtener una representación mucho más completa de la realidad. La geoestadística es un enfoque estocástico mientras que el Tomgro es un modelo determinístico, por lo que a primera vista parece que son enfoques incompatibles. Sin embargo, en el presente trabajo se emplean de manera complementaria; los resultados obtenidos mediante la geoestadística se emplean como entrada para efectuar simulaciones usando el Tomgro.

La heterogeneidad espacial de variables físicas y/o químicas, en este caso la temperatura, determinan el desarrollo diferencial de organismos vivos aun en áreas pequeñas como los invernaderos. Los resultados de ambos trabajos muestran cómo los gradientes espaciales de la temperatura dentro de los invernaderos, aunque son aparentemente pequeños, causan un efecto importante en el desarrollo y el rendimiento simulado de plantas que crecen bajo esas condiciones.

Finamente, los resultados referidos en el presente trabajo muestran que la radiación solar determina no solo la temperatura dentro del clima invernadero sino también la magnitud de los gradientes espaciales. Por tanto, en un invernadero cultivado es durante las horas del mediodía, en condiciones de cielo despejado, cuando se presentan las mayores variaciones espaciales de la temperatura. Las temperaturas más altas se presentan cerca del centro del invernadero, por lo cual se concluye que las estimaciones basadas en mediciones realizadas en esta área llevan a sobreestimaciones.

Referencias bibliográficas

- Bertin, N. (1995). Competition for assimilates and fruit position affect fruit set in indeterminate greenhouse tomato. *Annals of Botany* 75(1): 55-65.
- Bojacá, C. R., Gil, R., y Cooman, A. (2009a). Use of geostatistical and crop growth modelling to assess the variability of greenhouse tomato yield caused by spatial temperature variations. *Computers and Electronics in Agriculture* 65(2): 219-227.
- Bojacá, C. R., Gil, R., y Schrevers, E. (2011). The greenhouse effect in the high tropics of Colombia: a modeling approach. International Symposium on High Technology for Greenhouse Systems: GreenSys2009: 791-796, doi: [http:// 10.17660/ActaHortic.2011.893.86](http://10.17660/ActaHortic.2011.893.86)
- Bojacá, C. R., Gil, R., Gomez, S., Cooman, A., y Schrevers, E. (2009b). Analysis of greenhouse air temperature distribution using geostatistical methods. *Transactions of the ASABE* 52(3): 1-12.
- Bot, G. P. (1983). Greenhouse climate: from physical processes to a dynamic model (Doctoral dissertation, Landbouwhogeschool te Wageningen).
- Boulard, T., Kittas, C., Roy, J. C., y Wang, S. (2002). SE—Structures and Environment: Convective and Ventilation Transfers in Greenhouses, Part 2: Determination of the Distributed Greenhouse Climate. *Biosystems Engineering* 83(2): 129-147.
- Boulard, T., Meneses, J. F., Mermier, M., y Papadakis, G. (1994). Characterization of the mechanisms involved in the natural ventilation of greenhouses. In *IIIFAC/ISHS Workshop: Mathematical & Control Applications in Agriculture & Horticulture*, 406: 383-398.
- Cambardella, C. A., Moorman, T. B., Parkin, T. B., Karlen, D. L., Novak, J. M., Turco, R. F., y Konopka, A. E. (1994). Field-scale variability of soil properties in central Iowa soils. *Soil Science Society of America Journal* 58(5): 1501-1511.
- Castilla, N. (1993). Greenhouses in the Mediterranean area: Technological level and strategic management. In *International Symposium on New Cultivation Systems in Greenhouse*, 361: 44-56.

- Chien, Y. J., Lee, D. Y., Guo, H. Y., y Houn, K. H. (1997). Geostatistical analysis of soil properties of mid-west Taiwan soils. *Soil Science* 162(4): 291-298.
- Cooman, A. (2002). Feasibility of protected tomato cropping in the high altitude tropics using statistical and system dynamic models for plant growth and development. Doctoral dissertation. Katholieke Universiteit Leuven.
- Cooman, A., y Schrevens, E. (2007). Sensitivity of the Tomgro model to solar radiation intensity, air temperature and carbon dioxide concentration. *Biosystems Engineering* 96(2): 249-255.
- Cressie, N. (1992). Statistics for spatial data. *Terra Nova* 4(5): 613-617.
- Di Virgilio, N., Monti, A., y Venturi, G. (2007). Spatial variability of switchgrass (*Panicum virgatum* L.) yield as related to soil parameters in a small field. *Field Crops Research* 101(2): 232-239.
- Diggle, P. J., Tawn, J. A., y Moyeed, R. A. (1998). Model-based geostatistics. *Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)*, 47(3): 299-350.
- El-Ghoumari, M.Y. (2003). Optimización de la producción de un invernadero mediante control predictivo no lineal. Tesis para Ph.D. Universidad Autónoma de Barcelona.
- Escort DLS (2008). User Technical Guide. The Ice Point. Disponible en: [http://www.escortdls.com/pdfs/UserGuide Technical IcePoint. pdf](http://www.escortdls.com/pdfs/UserGuide%20Technical%20IcePoint.pdf).
- Farrington, C. P., y Manning, G. (1990). Test statistics and sample size formulae for comparative binomial trials with null hypothesis of non-zero risk difference or non-unity relative risk. *Statistics in Medicine*, 9(12): 1447-1454.
- Gary, C., Barczy, J. F., Bertin, N., y Tchamitchian, M. (1994). Simulation of individual organ growth and development on a tomato plant: a model and a user-friendly interface. *Greenhouse Environment Control and Automation* 399: 199-206.
- Gil, R., Bojacá, C. R., y Schrevens, E. (2011). Suitability evaluation of four methods to estimate leaf wetness duration in a greenhouse rose crop. In International Symposium on High Technology for Greenhouse Systems: GreenSys2009: 797-804, doi: <http://10.17660/ActaHortic.2011.893.87>

- Impron, I., Hemming, S., y Bot, G. P. A. (2007). Simple greenhouse climate model as a design tool for greenhouses in tropical lowland. *Biosystems Engineering* 98(1): 79-89.
- Isaaks, E. H., y Srivastava, R. M. (1989). An introduction to applied geostatistics. Oxford University Press, New York, 561 p. ISBN 0-19-505012-6.
- Jong, T., y Bot, G. P. A. (1992). Air exchange caused by wind effects through (window) openings distributed evenly on a quasi-infinite surface. *Energy and Buildings* 19(2): 93-103.
- Katsoulas, N., Baille, A., y Kittas, C. (2002). SE—Structures and Environment: Influence of Leaf Area Index on Canopy Energy Partitioning and Greenhouse Cooling Requirements. *Biosystems Engineering* 83(3): 349-359.
- Kempkes, F. L. K., y Van de Braak, N. J. (2000). Heating system position and vertical microclimate distribution in chrysanthemum greenhouse. *Agricultural and Forest Meteorology* 104(2): 133-142.
- Kindelan, M. (1980). Dynamic modeling of greenhouse environment. *Transactions of the ASAE* 23(5): 1232-1239.
- Kittas, C., Boulard, T., y Papadakis, G. (1997). Natural ventilation of a greenhouse with ridge and side openings: sensitivity to temperature and wind effects. *Transactions of the ASAE* 40(2): 415-425.
- Lamrani, M. A., Boulard, T., Roy, J. C., y Jaffrin, A. (2001). SE—Structures and Environment: AirFlows and Temperature Patterns induced in a Confined Greenhouse. *Journal of Agricultural Engineering Research* 78(1): 75-88.
- Lorenzo, P., Maroto, C., y Castilla, N. (1990). CO₂ in plastic greenhouse in Almeria (Spain). *Acta Horticulturae* 268: 165-169.
- Majdoubi, H., Boulard, T., Fatnassi, H., y Bouirden, L. (2009). Airflow and microclimate patterns in a one-hectare Canary type greenhouse: an experimental and CFD assisted study. *Agricultural and Forest Meteorology* 149(6): 1050-1062.
- Matheron, G. (1973). The intrinsic random functions and their applications. *Advances in Applied Probability*, pp. 439-468.
- Mo, X., Liu, S., Lin, Z., Xu, Y., Xiang, Y., y McVicar, T. R. (2005). Prediction of crop yield, water consumption and water use

- efficiency with a SVAT-crop growth model using remotely sensed data on the North China Plain. *Ecological Modelling* 183(2): 301-322.
- Ould Khaoua, S. A., Bournet, P. E., Migeon, C., Boulard, T., y Chassériaux, G. (2006). Analysis of greenhouse ventilation efficiency based on computational fluid dynamics. *Biosystems Engineering* 95(1): 83-98.
- Pasian, C. C., y Lieth, J. H. (1996). Prediction of rose shoot development: model validation for the cultivar ‘Cara Mia’ and extension to the cultivars ‘Royalty’ and ‘Sonia’. *Scientia Horticulturae* 66(1): 117-124.
- R Development Core Team (2011). R: A Language and Environment for Statistical Computing. Vienna, Austria : the R Foundation for Statistical Computing. Disponible en: <http://www.R-project.org/>
- Ribeiro Jr., P. J., y Diggle, P. J. (2001). geoR: A package for geostatistical analysis. *R News* 1(2): 14-18.
- Soni, P., Salokhe, V. M., y Tantau, H. J. (2005). Effect of screen mesh size on vertical temperature distribution in naturally ventilated tropical greenhouses. *Biosystems Engineering* 92(4): 469-482.
- Sparovek, G., y Schnug, E. (2001). Soil tillage and precision agriculture: A theoretical case study for soil erosion control in Brazilian sugar cane production. *Soil and Tillage Research* 61(1): 47-54.
- Trudgill, D. L., Honek, A., Li, D., y Straalen, N. M. V. (2005). Thermal time—concepts and utility. *Annals of Applied Biology* 146(1): 1-14.
- Villagrán, E. A., Gil, R., Acuña, J. F., y Bojacá, C. R. (2012). Optimization of ventilation and its effect on the microclimate of a Colombian multispan greenhouse. *Agronomía Colombiana* 30(2): 282-288.
- Wit, A. D., Boogaard, H. L., y Van Diepen, C. A. (2005). Spatial resolution of precipitation and radiation: the effect on regional crop yield forecasts. *Agricultural and Forest Meteorology* 135(1): 156-168.
- Wit, A. J., y Van Diepen, C. A. (2008). Crop growth modelling and crop yield forecasting using satellite-derived meteorological inputs. *International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation* 10(4): 414-425.

- Wong, M. T. F., y Asseng, S. (2006). Determining the causes of spatial and temporal variability of wheat yields at sub-field scale using a new method of upscaling a crop model. *Plant and Soil* 283(1-2): 203-215.
- Yun, J. I. (2003). Predicting regional rice production in South Korea using spatial data and crop-growth modeling. *Agricultural Systems* 77(1): 23-38.
- Zhao, Y., Teitel, M., y Barak, M. (2001). SE—Structures and Environment: Vertical Temperature and Humidity Gradients in a Naturally Ventilated Greenhouse. *Journal of Agricultural Engineering Research* 78(4): 431-436.

3

Modelado del crecimiento de cultivos: experiencias locales para el tomate bajo invernadero

Carlos Ricardo Bojacá Aldana y Rodrigo Gil Castañeda

3.1 Introducción

El uso del modelado y la simulación en agricultura se ha orientado principalmente a estimar el rendimiento de los cultivos con base en la acumulación de materia seca dadas unas condiciones climáticas y biofísicas del sitio en consideración. El mayor grado de desarrollo de estos modelos se ha alcanzado en los cultivos de cereales debido a su importancia en cuanto a área sembrada y consumo a nivel mundial. Sin embargo, también se han adelantado esfuerzos de investigación para desarrollar modelos que describan el crecimiento y el desarrollo de cultivos igualmente importantes como el tomate.

El presente capítulo recopila los resultados de investigaciones efectuadas por el grupo de Modelado y Simulación de Sistemas en las que se ha utilizado un modelo de simulación del tomate cultivado bajo condiciones de invernadero y calibrado para las condiciones locales con el fin de evaluar diferentes alternativas de climatización en la Sabana de Bogotá. De igual manera, se presenta el impacto ambiental que ocasionarían dichas alternativas técnicas en caso de llegar a establecerse en la práctica. La aplicación del modelado y la simulación en este contexto demuestra una vez más sus beneficios en términos de

ahorro en tiempo y recursos para el análisis de problemáticas en las que el establecimiento y evaluación de prototipos no son una alternativa viable.

Durante las últimas tres décadas se ha incrementado de manera significativa el desarrollo, uso y publicación de modelos de crecimiento de cultivos. El rápido incremento del poder computacional ha permitido el estudio de sistemas naturales o artificiales complejos (Jones *et al.*, 2006). Los modelos de crecimiento de cultivos han sido desarrollados a partir del conocimiento que se tiene de los procesos fisiológicos de crecimiento de una planta para predecir el crecimiento del cultivo y su respuesta en rendimiento ante variadas condiciones de clima, suelo y prácticas de manejo agronómico.

El crecimiento, dentro del contexto del modelado y la simulación de plantas cultivadas, se entiende como la tasa de incremento en materia seca total de una planta, ya sea para un solo individuo o para una determinada área de cultivo. El crecimiento de un cultivo se considera potencial en la medida en que las condiciones del suelo sean óptimas y no exista presencia de factores que limiten dicho crecimiento. En este caso, serán las condiciones meteorológicas las que determinen la tasa de crecimiento (Goudriaan y Van Laar, 1994).

Los cultivos en los que más recursos se han invertido para el desarrollo de modelos de crecimiento han sido los cultivos industriales (trigo, maíz, soya, algodón, arroz y sorgo, entre otros) tanto en regiones templadas como tropicales. Las razones del interés en estos cultivos radica en su importancia a nivel mundial dadas las grandes áreas de cultivo establecidas y el hecho de que estos cultivos son compatibles con simplificaciones del sistema, así como las limitadas condiciones ambientales artificiales bajo las cuales crecen (Brisson *et al.*, 2006).

Los desarrollos en el campo del modelado y la simulación de estos cultivos han permitido la generación de sistemas de soporte a la decisión, que permiten estimar el efecto de diversas prácticas de manejo o condiciones biofísicas sobre la productividad de un determinado cultivo. El manejo del recurso suelo ha recibido especial atención dentro del desarrollo de los sistemas de soporte a la decisión. Desde los años 90 ya se venían incorporando en los sistemas de soporte a la

decisión herramientas como los sistemas de información geográfica para evaluar la contaminación ocasionada por procesos agrícolas.

El sistema de soporte a la decisión en agricultura más desarrollado y con mayor nivel de reconocimiento mundial es el Decision Support System for Agrotechnology Transfer (DSSAT), el cual comprende modelos de simulación para el crecimiento de 28 cultivos, incluido el tomate; siendo soportado por bases de datos de suelo, clima, manejo del cultivo y datos experimentales. Los modelos de cultivo en DSSAT simulan el crecimiento, desarrollo y rendimiento en función de la dinámica del continuo suelo-planta-atmósfera y se han utilizado en una amplia cantidad de aplicaciones, desde prácticas de manejo en finca hasta evaluaciones regionales del impacto de la variabilidad climática y el cambio climático.

A pesar de la evolución del modelado del crecimiento de cultivos todavía existen limitantes importantes para la aplicación masiva del uso de este tipo de modelos. Y a pesar de los grandes avances en los campos científico y computacional, que han permitido la optimización de las predicciones hechas por estos modelos, su principal falencia está relacionada con el hecho de que estos modelos no están siendo utilizados por la población objetivo, es decir, los agricultores (Keating y Mc Cown, 2001). Hoy día el uso de modelos de crecimiento de cultivos sigue siendo limitado y principalmente orientado a propósitos científicos o académicos y en algunos casos se emplean como herramientas accesorias en la definición de políticas.

Especialmente en muchas regiones del mundo en desarrollo es necesario recolectar información básica acerca de las condiciones ambientales para poder modelar el comportamiento de los cultivos en función de las condiciones locales. Sin embargo, también se requieren adaptaciones y calibraciones de modelos existentes de manera que se pueda considerar el funcionamiento de esquemas de producción normalmente aplicados en estas regiones, tales como agricultura de subsistencia o sistemas de producción de pequeños agricultores (Pfister *et al.*, 2005).

En ese sentido, el presente capítulo realiza un compendio de diferentes investigaciones efectuadas por el grupo de investigación

en Modelado y Simulación de Sistemas, en las que se han utilizado herramientas de modelado y simulación de crecimiento de cultivos, principalmente para el análisis del cultivo de tomate bajo invernadero en el contexto nacional. Las particularidades de las condiciones climáticas en las que se desarrolla este cultivo en el país, así como las características del sistema productivo, derivaron en la calibración del modelo de crecimiento para el tomate denominado Tomgro. Una vez calibrado este modelo, en particular para las condiciones de la Sabana de Bogotá, ha sido posible la exploración de diversas alternativas de control climático para los invernaderos en los que se desarrolla este sistema productivo. A partir de la exploración de alternativas de optimización técnica del sistema productivo mediante el uso del modelo Tomgro también ha sido posible cuantificar el impacto ambiental de estas alternativas mediante el empleo de herramientas bien establecidas para este fin, como el Análisis de Ciclo de Vida.

3.2 El modelo de crecimiento del cultivo de tomate – Tomgro

Tomgro es un modelo determinístico que no considera la variabilidad presente en sistemas reales, utilizado para simular el crecimiento y desarrollo de la planta de tomate cultivada bajo condiciones de invernadero. Tomgro describe el desarrollo fenológico y la acumulación de materia seca en los diferentes órganos de la planta desde el momento del trasplante hasta el final del ciclo de cultivo, en respuesta a variaciones de variables climáticas como radiación, temperatura del aire, concentración de CO_2 y déficit de presión de vapor. Se trata de un modelo basado en el proceso de fotosíntesis y tanto la organogénesis como la senescencia de los órganos son función de la temperatura, tal como ocurre en la mayoría de modelos de crecimiento de cultivos (Gary *et al.*, 1998).

Sin embargo, el modelo también incluye interacciones con otros factores como la edad de la planta y la relación fuente/vertedero. En Tomgro, la acumulación y distribución de materia seca se considera potencial dado que el modelo asume que la planta crece bajo condi-

ciones óptimas, es decir, sin ninguna limitante debida a la presencia de plagas o enfermedades, deficiencias de nutrientes o de agua. La distribución de materia seca está basada en la tasa potencial de incremento de peso seco de cada componente de la planta (Jones *et al.*, 1991).

Cooman y Schrevens (2007) analizaron el efecto de variaciones en la temperatura del aire, la concentración del dióxido de carbono y la intensidad de radiación sobre la sensibilidad del modelo Tomgro. Como resultado de este trabajo, los autores concluyeron que la temperatura es la principal variable climática que afecta el área foliar total, el peso de los órganos vegetativos y el peso seco de los frutos.

La planta en Tomgro consta de un único tallo principal compuesto por segmentos de tallo unidos mediante nudos. Uno de los supuestos del modelo establece que los brotes laterales son podados, lo cual es una práctica regular de manejo del cultivo. En cada nudo se puede generar una hoja o una inflorescencia. El modelo presupone que en los primeros nudos solamente se generan hojas y solo cuando la planta alcanza un determinado número de nudos inicia la formación de inflorescencias. Luego de formada la primera inflorescencia, la planta va a generar una nueva inflorescencia cada cuarto nudo mientras que los nudos intermedios serán hojas (Cooman, 2002).

El área foliar así como el peso seco de hojas son modelados por cohorte o unidad simpodial. La primera unidad consta de todas las hojas desde el primer nudo de la planta hasta el primer nudo situado por encima de la primera inflorescencia. Posteriormente, todas las unidades simpodiales comprenden las dos hojas localizadas por debajo de cada inflorescencia más la primera hoja situada por encima de dicha inflorescencia (Cooman, 2002).

La planta de tomate en el modelo se encuentra representada por las siguientes variables de estado: el número de nudos en la planta, la edad relativa o estado de desarrollo, el área y peso de las hojas en la unidad i , el peso del *pool* de asimilados, el peso seco del tallo en la unidad i , el número de inflorescencias en la planta, el número de inflorescencias con frutos, el número de frutos que aparecen en el racimo i , y el estado de desarrollo del fruto en la posición j dentro del

racimo i (Cooman, 2002). Otras variables como el peso total de frutos, el número y peso de frutos maduros, el pesos total de la planta y el área foliar total activa se calculan a partir de estas variables de estado.

Tomgro funciona a partir de dos bucles en el tiempo. El bucle principal se incrementa diariamente mientras que el segundo bucle se incrementa de manera horaria. Dentro del bucle secundario, la información climática es actualizada, se integra el efecto de la temperatura sobre la tasa de desarrollo de la planta y sobre la senescencia de las hojas y crecimiento de los frutos, y se calculan la fotosíntesis y la respiración de mantenimiento. El desarrollo de la planta y de los órganos individuales se calcula al final del día en el bucle principal. Luego, la expansión y el crecimiento potencial de las hojas y frutos son calculados y acumulados para el total de la planta. La relación fuente/vertedero se estima comparando la fotosíntesis con el crecimiento potencial total. El aborto de frutos se calcula como una función de la relación fuente/vertedero para luego calcular el incremento en materia seca de todos los órganos de la planta. El área foliar nueva cada día resulta de acumular el área foliar de las hojas activas (Cooman, 2002). Para conocer una descripción más detallada del funcionamiento del modelo Tomgro, se remite al lector a Cooman (2002). La figura 1 presenta el flujo de trabajo del modelo Tomgro.

En 2002, Cooman calibró el modelo Tomgro para las condiciones de la Sabana de Bogotá mediante la realización de experimentos controlados de crecimiento del cultivo de tomate en tres invernaderos con diferentes grados de control climático. Todos los parámetros del modelo fueron analizados estadísticamente y se evaluó su variabilidad. Los parámetros del modelo de fotosíntesis fueron estimados a partir de la literatura, con excepción del coeficiente de extinción de radiación y la transmisión de radiación de las hojas, los cuales fueron determinados experimentalmente.

3. Modelado del crecimiento de cultivos: experiencias locales para el tomate bajo invernadero

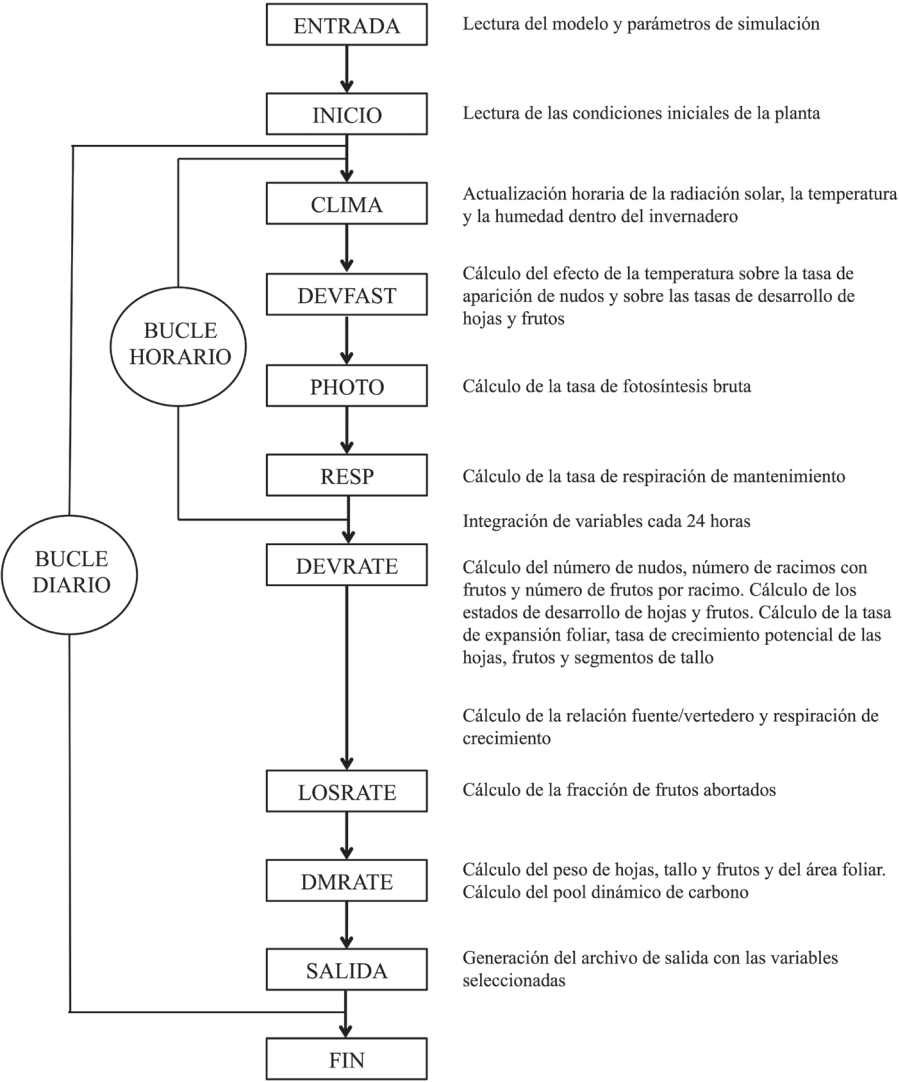


Figura 1. Flujo de trabajo del modelo de simulación Tomgro.
(Fuente: Adaptado de Cooman, 2002).

Los parámetros del modelo que definen el desarrollo de la planta y la organogénesis fueron evaluados utilizando datos biométricos provenientes de los experimentos controlados. Los parámetros que definen la distribución de materia seca entre los órganos de la planta fueron estimados en un invernadero de vidrio con calefacción. La tasa de aparición de nudos fue ajustada a un modelo lineal en función de la temperatura del invernadero ($15.6 - 20.4\text{ }^{\circ}\text{C}$) y la edad de la planta. Las tasas de desarrollo de frutos y hojas fueron estimadas como funciones de la temperatura. La tasa de expansión potencial de las hojas fue estimada con base en mediciones de la tasa de crecimiento de las hojas bajo condiciones de crecimiento normal y la relación entre la tasa de crecimiento potencial y actual de los frutos. Los valores mínimo y máximo del área foliar específica y los parámetros de la función de aborto fueron tomados de la literatura.

Una primera evaluación del modelo mostró una sobreestimación del área foliar y del peso de frutos a bajas temperaturas, mientras que el peso de las hojas fue subestimado. A $20.4\text{ }^{\circ}\text{C}$ los datos simulados tuvieron un buen grado de ajuste con respecto a las mediciones experimentales. En consecuencia, el modelo Tomgro fue modificado mediante la reducción de la tasa de expansión de las hojas a bajas temperaturas y la incorporación del efecto directo de la temperatura sobre la distribución de la materia seca entre el componente vegetativo y el generativo de la planta. El modelo modificado estimó de manera adecuada la acumulación de materia seca y su distribución durante la validación de los datos experimentales provenientes de los diferentes invernaderos (Cooman, 2002). Las investigaciones presentadas a continuación se hicieron aplicando esta versión modificada para las condiciones del trópico alto andino del modelo Tomgro.

3.3 Evaluación de condiciones climáticas sobre el crecimiento y desarrollo del cultivo

Uno de los objetivos del uso del modelado y la simulación del crecimiento de cultivos consiste en evaluar alternativas de manejo agronó-

mico tendientes a optimizar la producción. El cultivo de tomate bajo invernadero en nuestro país se desarrolla en un amplio rango de condiciones climáticas, muchas de las cuales se consideran marginales para el crecimiento óptimo del cultivo, aun cuando este se desarrolle bajo un ambiente protegido, como el generado por un invernadero. En zonas frías, la principal limitante para el crecimiento del cultivo son las bajas temperaturas que se registran durante la noche, las cuales durante algunos periodos del año pueden alcanzar valores inferiores a 0 °C. Esta situación climática, característica de zonas como la Sabana de Bogotá, provoca el fenómeno de heladas cuyos efectos pueden ocasionar la pérdida completa del cultivo y su producción.

3.4 Optimización del clima bajo invernadero

Cooman *et al.* (2006) utilizaron el modelo Tomgro con el objetivo de evaluar cinco estrategias de optimización tendientes a mejorar el comportamiento climático del invernadero utilizado tradicionalmente para la producción hortícola en la Sabana de Bogotá. Debido a la complejidad de la relación dinámica entre clima y crecimiento, desarrollo y producción, los costos de desarrollo y optimización de estrategias de control climático son demasiado altos cuando se efectúa la experimentación clásica en invernaderos reales. En consecuencia, la utilización de estrategias de modelado y simulación es más eficiente en el uso de recursos y del tiempo ya que el crecimiento, el desarrollo y la producción del cultivo del tomate se pueden describir para un amplio rango de combinaciones climáticas y de prácticas de manejo.

Materiales y métodos

En este trabajo se evaluaron cinco estrategias de adaptación del invernadero tradicional. El punto de partida fue el invernadero de plástico con aperturas fijas en la cumbrera (GH) tradicionalmente utilizado en Colombia. Este invernadero fue comparado con un prototipo construido localmente cuya ventilación se realizó mediante

ventanas automáticas situadas en el techo del invernadero (GHV), lo cual le permitió en promedio alcanzar una temperatura 1 °C superior con respecto al invernadero GH. En ambos invernaderos se consideró la adición de una pantalla térmica (GHS y GHVS, respectivamente), lo que permitió un incremento en las temperaturas nocturnas de 1.6 °C así como un pequeño aumento en las temperaturas diarias. Finalmente, se consideró la adición de un sistema de calefacción para los escenarios con pantalla térmica (GHS18 y GHVS18), definiendo la temperatura de operación a 18 °C.

La temperatura y la radiación de los diferentes escenarios se calcularon a partir de la radiación exterior y la temperatura interior de la información registrada en el invernadero GH. La simulación de cada escenario se hizo por un período de 300 días. La temperatura de los diferentes escenarios fue creada añadiendo los incrementos propuestos a las temperaturas horarias del invernadero de plástico GH. Los escenarios con calefacción GHS18 y GHVS18 incluyeron incrementos en las temperaturas diarias de 1.6 y 1.2 °C, respectivamente.

Para todos los escenarios se consideró la simulación del crecimiento de la planta bajo condiciones comerciales. La densidad de siembra fue de 2.5 plantas/ m² y el número de frutos por racimo fue cinco. Todos los escenarios consideraron las siguientes condiciones iniciales de plantas de siete semanas de edad: 10 nudos iniciales, 7 hojas por debajo de la primera inflorescencia, un peso seco de hojas y tallos de 4 y 1.5 g, así como un área foliar total de 0.14 m². El peso total de frutos maduros por planta y el número de frutos por planta fueron las variables utilizadas para la comparación de las simulaciones. El peso fresco de frutos se estimó suponiendo un contenido constante de materia seca de 5% para los frutos de todas las simulaciones.

Resultados

Las temperaturas promedio dentro de los invernaderos variaron entre 15.4 °C para el invernadero tradicional (GH) y 19.5 °C para el invernadero con ventilación cenital, pantalla térmica y calefacción con temperatura de operación de 18 °C (GHVS18). El promedio de temperatura

se incrementó en 1 °C cuando se utilizó la pantalla térmica y en 1.2 °C cuando se consideró la ventilación cenital (Tabla 1).

De acuerdo con los resultados de las simulaciones, el período de cosecha se incrementó de manera significativa en la medida en que se incrementaron las temperaturas dentro del invernadero. Las curvas de producción más altas se registraron en los escenarios con calefacción mientras que el uso de la pantalla térmica (GHS) y ventilación cenital (GHV) exhibieron curvas de producción similares (Figura 2). La cosecha inició 100 días luego del trasplante para el invernadero tradicional sin adaptaciones; 5 y 7 días antes en los tratamientos con pantalla térmica y ventilación cenital, y 18 y 20 días antes para los escenarios con calefacción y pantalla térmica en los invernaderos con ventilación y pantalla térmica, respectivamente.

Tabla 1. Temperaturas promedio estimadas para las estrategias de adaptación climática evaluadas mediante las simulaciones del modelo Tomgro.

Tratamiento de clima	Temperatura (°C)				
	24 horas	Día	Noche	Máxima	Mínima
GH	15.4	17.9	12.9	23.2	10.7
GHS	16.3	18.2	14.5	23.2	12.2
GHS18	18.9	19.8	18.1	23.2	18.0
GHV	16.6	19.5	13.8	25.0	11.6
GHVS	17.6	19.7	15.4	25.0	13.2
GHVS18	19.5	20.9	18.2	25.0	18.0

(Fuente: Adaptado de Cooman *et al.*, 2006).

El invernadero tradicional fue el más frío y su producción acumulada por planta al final del ciclo de simulación fue de 9.9 kg planta⁻¹ con un peso promedio por fruto de 135.7 g. El uso de pantalla térmica durante la noche mejoró la productividad en 22% con respecto al invernadero GH. En el invernadero GHV el peso promedio por fruto individual fue 133.4 g y su productividad fue 21.1% más alta que en GH, alcanzando

un total de $30 \text{ kg m}^{-2} \text{ ciclo}^{-1}$. Para el escenario GHVS, la productividad se incrementó en 30.2% en comparación con GH, alcanzando un peso promedio por fruto de 140.2 g. El uso de ventilación cenital y pantalla térmica incrementó el promedio de temperatura de las 24 horas en 2.2°C , lo cual provocó una tasa de desarrollo más rápida de las plantas así como la posibilidad de producir un mayor número de frutos dentro del mismo período de tiempo considerado. La productividad simulada para el escenario GHS18 fue $39.4 \text{ kg /m}^2 \text{ ciclo}$, con un peso promedio por fruto de 151.5 g. En el escenario GHVS18 se consideró una reducción en la transmisión de radiación del invernadero de 4% por cuenta de la infraestructura adicional debida a la ventilación cenital, lo que se tradujo en una reducción de productividad de 2.8% con respecto al escenario GHS18. A pesar de lo anterior, la productividad simulada fue de $38.3 \text{ kg/ m}^2 \text{ ciclo}$, lo cual representó un incremento de 54.6% con respecto al invernadero tradicional GH.

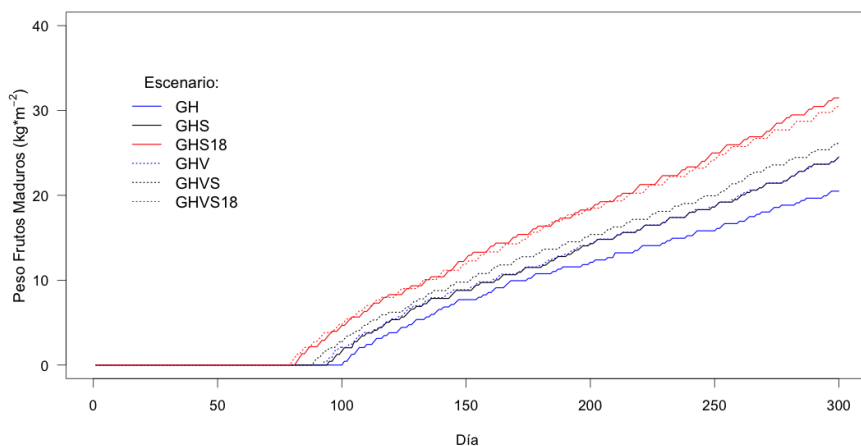


Figura 2. Productividad acumulada de tomate cultivado en la Sabana de Bogotá bajo diferentes condiciones climáticas.

(Fuente: Adaptado de Cooman *et al.*, 2006).

El incremento en productividad es bastante significativo para los escenarios que cuentan con calefacción en comparación con las demás

alternativas; sin embargo, su implementación demanda una importante cantidad de inversiones así como la consideración del costo de operación debido al combustible requerido. La implementación de cualquiera de estas estrategias de optimización del clima debe ir acompañada de la modificación de variables de manejo del cultivo como la densidad de plantación y el número de frutos por racimo, con el fin de maximizar el efecto de cada condición climática en particular.

3.5 Utilización de pantallas térmicas

Una de las alternativas de control climático disponibles en el mercado consiste en la utilización de pantallas térmicas móviles con el objetivo de retener la radiación, capturada en el día, el mayor tiempo posible durante la noche. De este modo es posible alcanzar temperaturas más apropiadas para el cultivo en esas horas. Las pantallas térmicas son redes de filamentos hechos de aluminio o acrílico y polímeros plásticos. Las pantallas térmicas son utilizadas para reducir la pérdida de energía mediante la conducción y convección de radiación de onda larga durante la noche (Papadopoulos y Hao, 1997). Este tipo de pantallas ocasionan un incremento en las temperaturas mínimas durante la noche dentro del invernadero y, consecuentemente, del cultivo y del suelo. En países desarrollados, la investigación relacionada con el uso de pantallas térmicas indica que cuando se utilizan durante la noche es posible alcanzar reducciones en las necesidades de calefacción de entre 21 y 33% (Bailey, 1988).

Recientemente la investigación relacionada con estas pantallas ha tomado importancia debido al incremento de los costos del combustible en zonas templadas en donde es necesario el uso de sistemas de calefacción durante la noche (Teitel *et al.*, 2009). La magnitud del ahorro de energía varía considerablemente cuando se comparan los resultados de diferentes estudios. Teitel *et al.* (2009) reportaron ahorros energéticos de 40% con el uso de pantallas térmicas aluminizadas, debido a la menor demanda de calefacción durante la noche. De otro lado, Kittas *et al.* (2003) estudiaron la influencia de una pantalla

térmica aluminizada sobre el balance de energía y el microclima de invernaderos, encontrando que el ahorro energético por el uso de estas pantallas fue solo de 15%.

A pesar de las diferencias en la magnitud del ahorro energético, Okada (1985) indica la existencia de otro problema en la evaluación de las pantallas térmicas y es que dicha evaluación se ha efectuado empleando modelos de balance de calor. Estos modelos están basados en supuestos como un estado térmico constante, la ausencia de flujo de calor latente, la no infiltración de aire y la ausencia de cultivos dentro del invernadero. Una alternativa para evaluar la efectividad de las pantallas térmicas consiste en la utilización de modelos que consideren su efecto en el crecimiento y desarrollo del cultivo. Basados en lo anterior, Gil *et al.* (2011) estudiaron el efecto potencial del uso de pantallas térmicas sobre la producción de tomate en el trópico alto andino mediante la utilización del modelo Tomgro.

Materiales y métodos

En los municipios de Chía y Susa, en Cundinamarca, se establecieron cultivos semi-comerciales de tomate en dos invernaderos plásticos de 1.122 y 1.050 m², respectivamente. Cada invernadero fue dividido en dos mitades y en una de las mitades de cada invernadero se instaló una pantalla térmica móvil con una capacidad de sombreamiento de 65%. Las pantallas estaban confeccionadas de polietileno de alta densidad con aditivos para incrementar la resistencia a la degradación por los rayos ultravioleta y una lámina de aluminio.

La pantalla térmica en cada sección se instaló a una altura de 3 m por encima del nivel del suelo, cubriendo en su totalidad el área de cultivo. En ambos sitios, la apertura y cierre de la pantalla se realizó de manera manual a las 6:00 a.m. y 5:00 p.m., respectivamente. Esta práctica se realizó a lo largo de todo el ciclo de cultivo. En Chía la duración del ciclo de cultivo fue de 232 días utilizando el cultivar Sheila (Sakata, Japón) mientras que en Susa el ciclo de cultivo tuvo una duración de 190 días empleando el cultivar Rocío (Rogers/Syngenta, USA). En ambos sitios se utilizó una densidad de siembra de 2.7 plantas /m²; el trasplante

a los invernaderos se realizó cuando las plantas exhibieron un promedio de 10 nudos. Las plantas fueron manejadas a un solo tallo principal y los brotes laterales fueron removidos de manera manual. El esquema de manejo de frutos fue el siguiente: los primeros cuatro racimos se podaron a seis frutos, los siguientes cuatro fueron podados a cinco frutos, mientras que los racimos siguientes se podaron a tres frutos por racimo.

En estos montajes experimentales se registraron variables climáticas dentro y fuera del invernadero, como temperatura y humedad relativa. Adicionalmente, en el exterior de los invernaderos se registró la radiación solar incidente. A partir de esta información climática se configuraron archivos climáticos en base horaria con la radiación solar global (W/m^2), temperatura del aire ($^{\circ}C$) y el déficit de presión de vapor (kPa). Además se asumió una concentración de dióxido de carbono constante para todos los ambientes considerados de 350 mg kg^{-1} . Con esta información climática y los parámetros de manejo de cultivo se estableció el rendimiento potencial del cultivo debido al uso de las pantallas térmicas. En este tipo de evaluaciones, los resultados de los experimentos de campo pueden no ser evidentes debido a otros factores de cultivo como la incidencia de plagas o enfermedades así como la ocurrencia de factores de estrés como deficiencias nutricionales o de agua, aun cuando el manejo técnico de los cultivos sea el recomendado. Por esta razón, se decidió evaluar mediante el uso del modelo Tomgro el efecto potencial del uso de pantallas térmicas a partir de datos climáticos registrados en condiciones reales de producción.

Resultados

Las dos localidades consideradas presentaron condiciones climáticas similares, excepto por la radiación global diaria dado que en Chía se registró un promedio de 284.7 W/m^2 mientras que en Susa el promedio fue de 424.3 W/m^2 . La información climática registrada dentro de las diferentes secciones de invernadero se presenta en la Tabla 2. Los cambios en la temperatura del aire en las secciones con y sin pantalla en ambas localidades variaron en función de la hora del día. En Chía la diferencia de temperatura entre la sección con pantalla aluminizada y sin pantalla fue

de 1.5 ± 0.1 °C, mientras que en Susa la diferencia promedio fue de 1.1 ± 0.1 °C. Estos incrementos de la temperatura nocturna causados por el uso de pantallas aluminizadas coincidieron con lo reportado en otros estudios. Kittas *et al.* (2003) reportan incrementos promedio de 2.5 °C, mientras que Abak *et al.* (1994) reportaron incrementos entre 2.5 y 3.4 °C.

En ambas localidades se presenta una mayor temperatura nocturna en las secciones con pantalla, además en estas secciones se presentaron valores menores de humedad relativa (Tabla 2). Las condiciones climáticas en las secciones con pantalla permiten suponer un desarrollo más rápido de las plantas sumando además los niveles de humedad más bajos que tenderían a restringir la aparición y desarrollo de patógenos mediante la reducción de la acumulación de humedad sobre los diferentes órganos de la planta (Kim *et al.*, 2008).

Tabla 2. Valores promedio y desviaciones estándar de temperatura (°C) y humedad relativa (%) durante las horas del día y la noche para los cultivos experimentales de tomate en Chía y Susa (Cundinamarca).

Localidad		Temperatura (°C)		HR (%)	
		Diurna	Nocturna	Diurna	Nocturna
Chía	Sin pantalla	17.7 ± 4.4	10.5 ± 1.9	69.3 ± 15.2	91.6 ± 4.8
	Aluminizada	17.5 ± 4.4	12.0 ± 1.8	67.6 ± 13.5	89.9 ± 5.5
Susa	Sin pantalla	19.1 ± 4.7	11.2 ± 2.3	68.3 ± 15.8	93.0 ± 5.9
	Aluminizada	19.4 ± 4.6	12.3 ± 2.3	67.5 ± 16.1	91.9 ± 6.4

(Fuente: Adaptado de Gil *et al.*, 2011).

Al hacer una comparación de los rendimientos simulados con el Tomgro, el modelo simuló un mayor rendimiento en la sección en la que se desplegó la pantalla aluminizada durante las noches (Figura 3) versus la sección sin pantalla. Los resultados de la simulación en Chía sugieren un incremento del rendimiento de 29.1 kg m^{-2} en la sección sin pantalla a 32.0 kg m^{-2} en la sección con pantalla. Mientras que en Susa la simulación indicó un aumento del rendimiento de 41.2 kg m^{-2} en la sección sin pantalla a 44.3 kg m^{-2} con el uso de la pantalla térmica. En otras inves-

tigaciones se han registrado incrementos hasta de 30% en la producción de tomate y otros como pimentón, berenjena y pepino, debidos al uso de pantallas térmicas (Pérez y De Paul, 2007). Grange y Hurd (1983) mencionan que los incrementos en la producción de tomate dentro de invernaderos que emplean pantallas térmicas es ligeramente superior si se compara con invernaderos que no usan pantallas térmicas, pero no presentan las cifras. Callejón-Ferre *et al.* (2009) resaltan la importancia del sombreamiento dentro de invernaderos pero no hay diferencias al comparar el efecto de pantallas aluminizadas con el sombreamiento que se obtiene mediante técnicas como el blanqueamiento de plásticos. Esta técnica consiste en pintar franjas blancas a lo largo de la cubierta del invernadero.

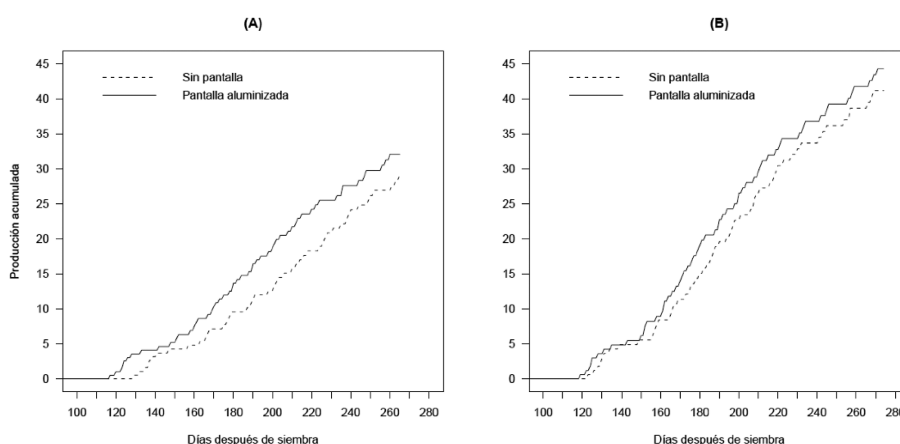


Figura 3. Producción acumulada (kg m⁻²) simulada con el modelo Tomgro a partir de las condiciones climáticas en cada una de las secciones para (A) Chía y (B) Susa (Cundinamarca).
(Fuente: Adaptado de Gil *et al.*, 2011).

En Chía se registraron rendimientos promedio de 9.9 ± 0.8 kg m⁻² en la sección sin pantalla y de 10.6 ± 0.2 kg m⁻² en la sección en la que se usó la pantalla en las horas de la noche. En Susa la sección sin pantalla presentó rendimientos de 6.6 ± 0.8 kg m⁻² y con la pantalla se incrementó a 6.9 ± 0.3 kg m⁻². En términos porcentuales,

se presentaron incrementos de 6.6% (Chía) y 3.3% (Susa) en las secciones que emplearon la pantalla aluminizada versus las que no la emplearon. Las diferencias entre los datos simulados y los registrados se debe principalmente a que el Tomgro es un modelo potencial que no incluye limitantes tecnológicas, sanitarias o nutricionales. Sin embargo, al comparar la tendencia del incremento se sigue observando que la localidad que presenta las menores temperaturas nocturnas es la que logra un mayor incremento de la producción con el uso de las pantallas aluminizadas.

Este trabajo permitió establecer que el uso de las pantallas térmicas en las horas de la noche en zonas en donde las temperaturas nocturnas son limitantes para la producción de tomate logra incrementar los rendimientos. Este aumento de los rendimientos se debe al incremento de las temperaturas nocturnas en los invernaderos que emplean las pantallas. El modelo Tomgro permitió simular el efecto que tendría el incremento de las temperaturas en cada zona sobre la producción de tomate.

3.6 Evaluación del impacto ambiental del cultivo

Hoy día se reconoce que el sector agrícola causa un impacto importante al ambiente debido al uso de insumos externos como fertilizantes y agroquímicos (Masuda, 2006). La producción de alimentos, su preservación y sistemas de distribución consumen una cantidad considerable de energía, lo que contribuye al incremento de las emisiones de CO₂ (Roy *et al.*, 2008). El análisis de ciclo de vida (ACV) es una herramienta para evaluar los efectos ambientales de un producto, proceso o actividad a lo largo de su ciclo de vida, lo cual se conoce como análisis “de la cuna a la tumba” (Roy *et al.*, 2008). Varios investigadores han estudiado cómo factores como el método de cultivo (invernadero versus campo abierto, orgánico versus convencional, hidropónico versus suelo), variedad, ubicación del cultivo, y sistemas de distribución y empaque afectan el inventario del ciclo de vida en el cultivo del tomate (Roy *et al.*, 2009).

En Colombia, la optimización del sistema de cultivo ha sido limitada aunque los resultados obtenidos en trabajos como los presentados anteriormente demuestran la posibilidad de mejorar los actuales rendimientos. La ausencia de datos generados localmente impone restricciones para determinar patrones de cambio hacia esquemas de producción que sean más amigables con el ambiente. En ese sentido, la utilización de herramientas de modelado y simulación en combinación con métodos como el ACV pueden indicar no solamente el impacto en la producción de alternativas de climatización sino también su impacto sobre el ambiente. Es así como Parrado y Bojacá en 2009 realizaron la primera evaluación de impacto ambiental del cultivo de tomate bajo invernadero para Colombia considerando no solo el sistema tradicional de cultivo, sino incluyendo también escenarios productivos alternativos.

Materiales y métodos

El primer escenario fue el sistema de producción actual desarrollado en condiciones de suelo y utilizando el invernadero tradicional cubierto con plástico y estructura de madera (SSP). El segundo escenario consideró el establecimiento de un cultivo hidropónico que utilizaba cascarilla de arroz como sustrato dentro de un invernadero de doble pared de plástico (HDP). Un tercer escenario consideró la adición de un sistema de calefacción al escenario HDP con una temperatura de operación de 15 °C (HDPH). El control de clima para los escenarios HDP y HDPH se hizo exclusivamente por temperatura y el punto de ventilación se fue definido a 20 °C. La Figura 4 presenta a través de imágenes descriptivas los escenarios considerados en esta evaluación.

La producción de biomasa representada por los frutos así como los residuos verdes fueron simulados utilizando la versión modificada por Cooman (2002) del modelo Tomgro. Los archivos climáticos para SSP y HDP fueron configurados a partir de registros disponibles de invernaderos reales con diseños similares a los propuestos en los escenarios. El archivo climático para HDPH se construyó a partir del archivo climático de HDP, nivelando las temperaturas mínimas a 15 °C. Todas

las simulaciones se efectuaron considerando un ciclo de cultivo de 300 días, una densidad de siembra de $2.8 \text{ plantas m}^{-2}$, plantas con 10 nudos al inicio de las simulaciones, un índice de área foliar de 0.473 y todos los racimos podados a 5 frutos.

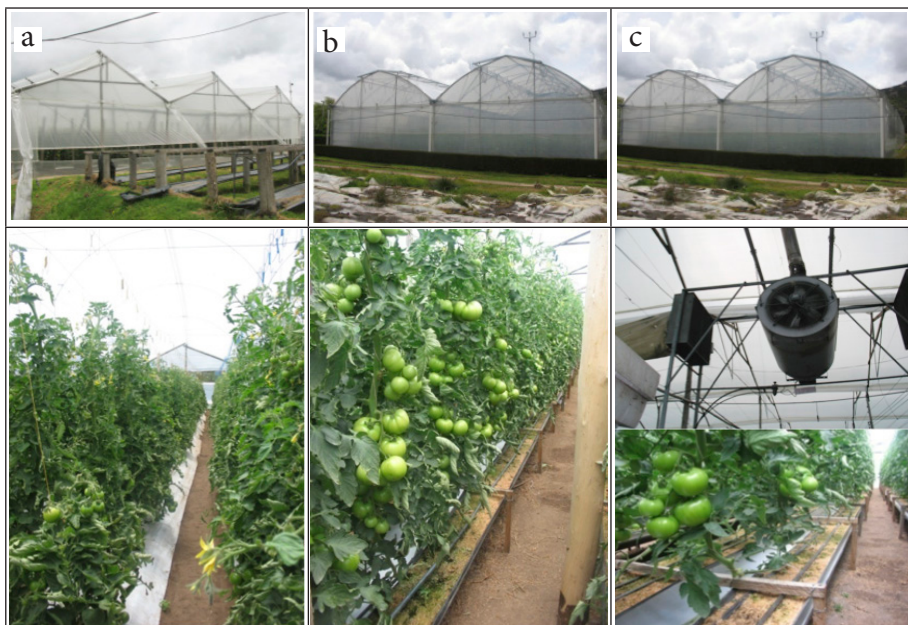


Figura 4. Imágenes descriptivas de los escenarios considerados (A: SSP, B: HDP, C: HDPH) en la evaluación del impacto ambiental del cultivo de tomate bajo invernadero.

En relación con la determinación del impacto ambiental de los escenarios considerados mediante el ACV, se aplicó la norma ISO 14040 (1997), la cual define las cuatro fases fundamentales del ACV: la definición del objetivo, el inventario del ciclo de vida, la evaluación del impacto y su interpretación. El sistema investigado es el actual sistema de producción de tomate bajo invernadero cuya función principal es la producción de tomate para consumo en fresco. La puerta de la finca fue definida como el límite del sistema productivo de todos los escenarios. La unidad funcional del sistema, que es la que define la cuantificación de las funciones del sistema y con respecto a la cual se establecen los impactos ambientales, fue definida como 1 kg de tomate.

El consumo de recursos y las emisiones relacionadas con los diferentes escenarios productivos se refirieron a los siguientes subsistemas productivos: infraestructura, fertirrigación, fitoprotección, operaciones culturales y generación de desechos. Los métodos de caracterización propuestos por el CML (Guinée *et al.*, 2002) fueron aplicados en la fase de evaluación del impacto. Las categorías de impacto analizadas fueron depleción abiótica, acidificación, eutroficación, calentamiento global, depleción de la capa de ozono, toxicidad humana, ecotoxicidad a agua dulce, ecotoxicidad a agua marina, ecotoxicidad terrestre y oxidación fotoquímica.

Resultados

Los rendimientos simulados por el modelo Tomgro a partir de los escenarios considerados se presentan en la Figura 5. Los rendimientos acumulados fueron de 20.2, 21.1 y 24.9 kg /m² para los escenarios SSP, HDP y HDPH, respectivamente. A partir de estos rendimientos se definió la unidad funcional y con respecto a ella se definieron las cargas ambientales en función del uso y consumo de recursos propios en cada escenario.

El subsistema que tuvo el mayor impacto en el escenario SSP fue el de fertirrigación, afectando principalmente la categoría de ecotoxicidad a agua marina (Tabla 3). El impacto de la fertirrigación fue debido principalmente a las altas cantidades de fertilizantes aplicadas, como nitrato de calcio, sulfato de potasio y fosfato diamónico. Los efectos en la categoría de calentamiento global se encuentran relacionados con los fertilizantes pero también se deben al consumo del gas natural utilizado durante su proceso de manufactura. Las emisiones al aire y al agua de los fertilizantes nitrogenados se encontraron principalmente relacionadas con el proceso de lixiviación de este nutriente. Debido a esta lixiviación de nitrógeno, los mayores impactos son para las categorías de eutroficación, ecotoxicidad a agua dulce y ecotoxicidad terrestre.

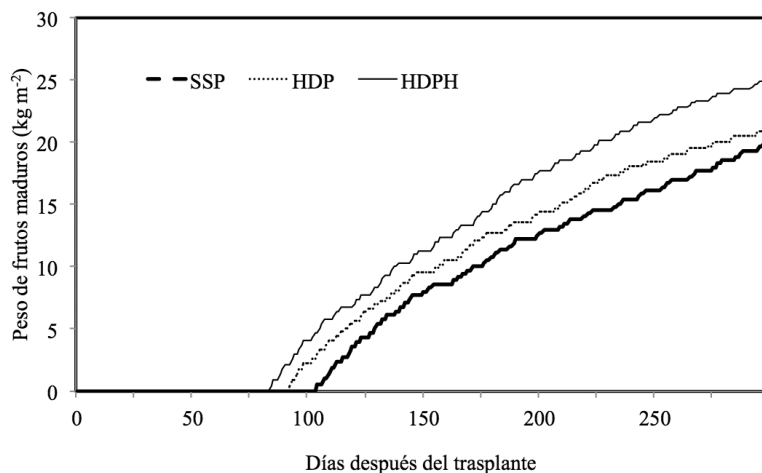


Figura 5. Cosecha simulada de tomate, mediante el modelo Tomgro, para cada estrategia de producción bajo invernadero durante un ciclo de cultivo de 300 días.

(Fuente: Adaptado de Parrado y Bojacá, 2009).

El subsistema de fitoprotección fue el segundo que mayor impacto tuvo en el escenario SSP y sus efectos se asignaron principalmente a la categoría de ecotoxicidad a agua marina. Los procesos de manufactura y uso de los pesticidas fueron los responsables de estos resultados. La categoría de calentamiento global fue la segunda con el mayor impacto debido a este subsistema, pero con una contribución mucho menor que la de la fertirrigación. Las contribuciones de los subsistemas infraestructura, operaciones culturales y desechos fueron mínimas en comparación con los subsistemas descritos anteriormente.

Tabla 3. Comparación de los factores de caracterización para el ACV de tres sistemas de producción de tomate bajo invernadero utilizando el método CML 2 baseline 2000 V2.04.

Categoría de impacto	Unidad	SSP	HDP	HDPH
Depleción abiótica	kg Sb eq	42.8	54.61	2991.5
Acidificación	kg SO ₂ eq	27.47	34.83	765.6

Categoría de impacto	Unidad	SSP	HDP	HDPH
Eutroficación	kg PO ₄ eq	8.36	10.28	81.36
Calentamiento global (GWP100)	kg CO ₂ eq	5282.5	6815.4	66536.9
Depleción de la capa de ozono	kg CFC-11 eq	0.0006	0.0007	0.058
Toxicidad a humanos	kg 1,4-DB eq	3271.8	4100.7	46447.5
Ecotoxicidad a aguas dulces	kg 1,4-DB eq	498.9	626.2	4881.8
Ecotoxicidad a aguas marinas	kg 1,4-DB eq	1093027	1405897	34225964
Ecotoxicidad terrestre	kg 1,4-DB eq	34.75	45.95	301.8
Oxidación fotoquímica	kg C ₂ H ₄	1.36	1.72	43.66

(Fuente: Adaptado de Parrado y Bojacá, 2009).

El ACV indicó, en términos absolutos, que el escenario HDP generó un mayor impacto ambiental en comparación con el sistema actual SSP. El uso de mayores cantidades de polietileno incrementó las contribuciones a la categoría de calentamiento global. Sin embargo, al igual que para el escenario SSP, el subsistema de fertirrigación fue el que presentó el mayor impacto ambiental para este escenario. El uso de un sistema hidropónico abierto generó mayores cantidades de emisiones al aire y al agua. El empleo de cascarilla de arroz como sustrato reduce el impacto sobre el uso de recursos naturales como el suelo y también contribuye a la reducción de la expansión de la frontera agrícola. Sin embargo, el uso de este material incrementa el riesgo de impacto en categorías como eutroficación y ecotoxicidad a agua marina debido a su baja capacidad de retención de agua y nutrientes. Aunque para este escenario la estructura del invernadero es de metal y la cantidad del material de cubierta se duplica, los incrementos en producción simulados por el modelo Tomgro y la vida útil extendida de los materiales estructurales disminuyen el impacto ambiental para todas las categorías consideradas, con excepción de la categoría de calentamiento global.

La adición de un sistema de calefacción utilizando combustible fósil para su operación incrementó el impacto del subsistema de infraestructura para el escenario HDPH. La alta productividad por unidad de área no fue suficiente para compensar el impacto generado por la mejoría tecnológica introducida al sistema. La categoría con el mayor impacto fue la de ecotoxicidad a agua marina, debido a los procesos de extracción y refinamiento del combustible utilizado para la manufactura de la infraestructura y para la operación directa del sistema de calefacción. El consumo de energía en este escenario es mucho mayor debido a este consumo de recursos no renovables en el subsistema de infraestructura. Al igual que en el sistema HDP, los incrementos en productividad no son suficientes para compensar el mayor impacto ambiental generado en comparación con lo observado en el sistema SSP.

Los bajos costos de energía del actual sistema de producción de tomate bajo invernadero en Colombia son resultado de un bajo nivel tecnológico y la ausencia de sistemas de control activo de clima, como calefacción o fertilización con CO_2 , los cuales son de uso común en países de zonas templadas.

Este trabajo ejemplifica el uso de modelos en la producción de cultivos como una herramienta auxiliar que permite estimar los impactos ambientales de alternativas tecnológicas de producción sin necesidad de invertir mayores cantidades de recursos físicos en su estimación. Alternativas de trabajo hacia futuro pueden incluir el uso de estos modelos de simulación para añadir el componente dinámico a herramientas de cuantificación de impacto ambiental como el ACV, que se caracterizan por ser estáticas y presentar resultados para una determinada ventana de tiempo. Mediante la integración de modelos de flujo de nutrientes y agua en el suelo se podrían hacer estimaciones más precisas del impacto ocasionado por la adición de fertilizantes de manera dinámica, es decir, en función del plan de manejo de fertilización aplicado a lo largo del ciclo de cultivo. Más aún, es posible estimar los efectos no de un solo ciclo productivo sino de ciclos continuos de producción en la medida en que se pueden simular las dinámicas de uso y flujo de recursos así como del impacto en la productividad de los cultivos.

Conclusiones

La aplicación de herramientas de modelado y simulación para el caso específico del tomate bajo invernadero ha demostrado la posibilidad de optimizar el actual sistema productivo a partir del mejoramiento de las condiciones climáticas en que se desarrolla el cultivo. Este tipo de resultados no hubiesen sido posibles de obtener si no se contara con dicha herramienta de modelado a disposición. La inversión en tiempo y recursos hace poco viable el establecimiento en campo de prototipos experimentales para su evaluación. De igual manera, el uso de esta herramienta permite no solo considerar el impacto técnico sobre la producción sino también el impacto sobre el ambiente que pueden ocasionar dichas mejoras tecnológicas.

Los resultados de las investigaciones presentadas en este capítulo consideran el uso de modelos de crecimiento potencial en los que el cultivo crece sin ninguna limitación por plagas, nutrientes o recursos. Sin embargo, en la actualidad es posible añadir a estos modelos factores limitantes del crecimiento, dado que se han desarrollado modelos que describen el funcionamiento propio de estos fenómenos y su impacto sobre la producción de materia seca sobre los cultivos.

De otro lado, en países como Colombia, en donde no se cuenta con una caracterización climática o de suelos completa, o donde no se tiene suficientemente caracterizada la diversidad de prácticas de manejo y medios de producción empleados por los productores, se requiere hacer trabajos de calibración adicionales para que los modelos representen adecuadamente la realidad observada sobre el terreno. La calibración de estos modelos es una tarea compleja que involucra la realización de seguimientos biométricos de plantas vivas así como de muestreos destructivos que permitan establecer las tasas de acumulación y distribución de materia seca en los diferentes órganos de la planta. Esta tarea es demandante de recursos y tiempo, lo cual en muchos casos limita la posibilidad de adaptar modelos a las condiciones locales. Esta limitante es aún más latente cuando el producto considerado no se encuentra dentro del portafolio de los principales producidos en el país, como es el caso de los productos hortícolas de los cuales depende buena parte de los pequeños agricultores en diferentes regiones.

Referencias bibliográficas

- Abak, K., Başçetinçelik, A., Baytorun, N., Altuntas, Ö. y Öztürk, H.H. (1994). Influence of double plastic cover and thermal screens on greenhouse temperature, yield and quality of tomato. *Acta Horticulturae* 366: 149-154.
- Brisson, N., Wery, J. y Boote, K. (2006). Fundamental concepts of crop models illustrated by a comparative approach. En: Wallach, D., Makowski, D., Jones, J.W. (ed.), *Working with dynamic crop models*. Elsevier B.V., Holanda.
- Callejón-Ferre, A.J., Manzano-Agugliaro, F.; Díaz-Pérez, M.; Carreño-Ortega, A. y Pérez-Alonso, J. (2009). Effect of shading with aluminised screens on fruit production and quality in tomato (*Solanum lycopersicum* L.) under greenhouse conditions. *Spanish Journal of Agricultural Research* 7(1): 41-49.
- Cooman, A. (2002). Feasibility of protected tomato cropping in the high altitude tropics using statistical and system dynamic models for plant growth and development. Tesis doctoral. Universidad Católica de Lovaina. Bélgica.
- Cooman, A., Bojacá, C.R. y Schrevens, E. (2006). Technical and economic evaluation of low temperature tomato cropping in the tropics. *Acta Horticulturae* 719: 543-549.
- Cooman, A. y Schrevens, E. (2007). Sensitivity of the Tomgro model to solar radiation intensity, air temperature and carbón dioxide concentration. *Biosystems Engineering* 96: 249-255.
- Gary, C., Jones, J.W. y Tchamitchian, M. (1998). Crop modelling in horticulture: state of the art. *Scientia Horticulturae* 74: 3-20.
- Gil, R., Luque, N.Y. y Bojacá, C.R. (2011). Effect of aluminized screens on greenhouse tomato (*Solanum lycopersicum* L.) production systems at the high tropical conditions. *Agronomía Colombiana* 29(3): 423-431.
- Goudriaan, J. y Van Laar, H.H. (1994). *Modelling potential crop growth processes: textbook with exercises*. Vol. 2. Springer.
- Grange, R.I. y Hurd, R.G. (1983). Thermal screens—environmental and plant studies. *Scientia Horticulturae* 19(3-4): 201-211.

- Guinée, J.B., Gorree, M., Heijungs, R., Huppes, G., Kleijn, R., De Koning, A., Wegener Sleswijk, A.; Suh, S., Udo de Haes, H.A., De Bruijn, J.A., Van Duin, R. y Huijbregts, M.A.J. (2002). *Handbook on life cycle assessment. Operational guide to the ISO Standards*. Kluwer, the Netherlands.
- Jones, J.W., Makowski, D. y Wallach, D. (2006). Introduction to Section II. En: Wallach, D., Makowski, D. y Jones, J.W. (ed.), *Working with dynamic crop models*. Elsevier B.V., Holanda.
- Jones, J.W., Dayan, E., Allen, L.H., van Keulen, H. y Challa, H. (1991). A dynamic tomato growth and yield model (TOMGRO). *Transactions of the ASAE* 34(2): 663-672.
- Keating, B.A. y Mc Cown, R.L. (2001). Advances in farming systems analysis and intervention. *Agricultural Systems* 70(2-3): 555-579.
- Kim, K., Yoon, J., Kwon, H., Han, J., Son, J., Nam, S., Giacomelli, G.A. y Lee, I. (2008). 3-D CFD analysis of relative humidity distribution in greenhouse with a fog cooling system and refrigerative dehumidifiers. *Biosystems Engineering* 100: 245-255.
- Kittas, C., Katsoulas, N. y Baille, A. (2003). Influence of an aluminized thermal screen on greenhouse microclimate and canopy energy balance. *Transactions of the ASAE* 46(6): 1653-1663.
- Masuda, K. (2006). LCA (life cycle assessment) research trend on the agricultural sector in Japan. *Review of Agricultural Economics* 62: 99-115.
- Okada, M. (1985). An analysis of thermal screen effects on greenhouse environment by means of a Multi-Layer screen model. *Acta Horticulturae* 174: 139-144.
- Papadopoulos, A.P. y Hao, X. (1997). Effect of three greenhouse cover materials on tomato growth, productivity, and energy use. *Scientia Horticulturae* 70: 165-178.
- Parrado, C.A. y Bojacá, C.R. (2009). Environmental impact of greenhouse tomato production strategies using life cycle assessment approach. *Acta Horticulturae* 893: 125-131.
- Pérez-Rojas, H. y de Paul-Cortés, M. (2007). Simulación y control de la temperatura dentro de un invernadero. Trabajo de grado para optar al título de ingeniero de diseño y automatización electrónica.

Universidad de La Salle, Facultad de Ingeniería de Diseño y Automatización Electrónica. Bogotá, Colombia.

- Pfister, F., Bader, H.P., Scheidegger, R. y Baccini, P. (2005). Dynamic modeling of resource management for farming systems. *Agricultural Systems* 86(1): 1-28.
- Roy, P., Nei, D., Orisaka, T., Xu, Q., Okadome, H., Nakamura, N. y Shiina, T. (2009). A review of life cycle assessment (LCA) on some food products. *Journal of Food Engineering* 90(1): 1-10.
- Roy, P., Nei, D., Okadome, H., Nakamura, N., Orikasa, T. y Shiina, T. (2008). Life cycle inventory analysis of fresh tomato distribution systems in Japan considering the quality aspect. *Journal of Food Engineering* 86(2): 225-233.
- Teitel, M., Barak, M., y Antler, A. (2009). Effect of cyclic heating and a thermal screen on the nocturnal heat loss and microclimate of a greenhouse. *Biosystems Engineering* 102: 162-170.

4 ● Aspectos merísticos, biométricos y tróficos como indicadores del establecimiento poblacional de *Oreochromis niloticus*, L. 1758 (Pisces: Cichlidae) en la cuenca hidrográfica del río Sinú, Colombia

Francisco de P. Gutiérrez B.¹ y Juanita Burgos Bedout²

4.1 Introducción

Colombia posee diversidad íctica superior a 3.000 especies, muchas con potencial para la piscicultura, aunque se desconoce su bioecología, lo que ha conducido a desarrollos acuícolas o pesqueros con especies exóticas, o con nativas trasplantadas (Castillo, 2001; Alvarado y Gutiérrez, 2002; Gutiérrez *et al.*, 2012).

Las especies exóticas normalmente ingresan como productos necesarios y útiles (plantas y animales); sin embargo, su manejo en la mayoría de los casos escapa al control humano, expandiendo su distribución y abundancia, convirtiéndose de este modo en invasoras, desplazando las especies nativas por competencia, depredación y alterando los ecosistemas (Ojasti, 2001; Alvarado y Gutiérrez, 2002; Gutiérrez *et al.*, 2012).

Lo anterior es aplicable a *Oreochromis niloticus*, especie alóctona, procedente de África, e introducida a Colombia con fines de piscicultura comercial en 1977, al ser considerada como prometedora

¹ Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano, Facultad de Ciencias Naturales e Ingeniería, Departamento de Ciencias Biológicas y Ambientales, Bogotá, D.C., Colombia. francisco.gutierrez@utadeo.edu.co

² Investigadora independiente. juanita.burgos@gmail.com

debido a su rápida madurez, excesiva reproducción, acelerado crecimiento, plasticidad, pocas exigencias respiratorias, fácil manejo y potencial mercado. Pero del confinamiento en estanques ha pasado a cuencas y embalses, siendo inclusive utilizada para repoblación, sin prever sus consecuencias biológicas. Por lo que esta investigación estuvo dirigida a conocer en su integralidad –no solamente por lo aquí consignado, pues se han adelantado estudios genéticos, de dinámica pesquera y de ensamblaje–, elementos que permitan dilucidar y responder si lo que se ha implementado sin ninguna previsión ni medida de control se corresponde con un lógico proceder biológico (Gutiérrez, 2005; Lasso *et al.*, 2012).

En esta investigación, con el fin de determinar cuál(es) de las variables morfométricas, o reproductivas propias de *O. niloticus* son las que mayor peso tienen en el comportamiento de la especie, se utilizaron técnicas de modelado matemático como análisis de covarianza, correlación de Pearson, pruebas de Levene para comprobar homocedasticidad de la varianza, aplicación de las correcciones de Bonferroni, análisis de ANOVA, y pruebas no paramétricas de Kruskal-Wallis y U-Mann-Whitney.

A continuación se presentan las hipótesis por verificar o descartar como resultado de esta investigación.

4.2 Hipótesis

H_0 : *O. niloticus*, introducida a la cuenca hidrográfica del río Sinú y sus planos inundables, biológicamente se encuentra ensamblada a los ecosistemas en los cuales se ha establecido y debe considerarse como una población más dentro de la cuenca.

H_1 : *O. niloticus*, introducida a la cuenca hidrográfica del río Sinú y sus planos inundables, biológicamente no se encuentra ensamblada a los ecosistemas en los cuales se ha establecido y no debe considerarse como una población más dentro de la cuenca.

4.3 Objetivos

Esta investigación intenta dar a conocer el estado de *O. niloticus* en cuanto a sus características merísticas, morfométricas y nivel trófico, en ciénagas de la cuenca hidrográfica del río Sinú, para así determinar su desarrollo y ensamblaje en el nuevo ecosistema. Teniéndose como indicativo para formular las hipótesis que la especie viene siendo representativa en los desembarcos pesqueros a nivel nacional y en la cuenca del Sinú.

4.4 Área de estudio

La cuenca hidrográfica del río Sinú ($8^{\circ} 20'$ y $9^{\circ} 21'$ N y entre $75^{\circ} 32'$ y $76^{\circ} 06'$ W), posee 13.700 km^2 , con 12.200 km^2 pertenecientes al departamento de Córdoba y 1.500 km^2 en Antioquia (Urrá, 1996). El área de la hoya hidrográfica es 4.600 km^2 . El río poseía una extensión de 330 km y en operación el proyecto hidroeléctrico Urrá I, entre la presa -74 m de altura– y la desembocadura, hay recorrido libre de 280 km , habiendo sido inundados 74 km^2 para un volumen almacenado de 1.740 millones de metros cúbicos (Mm^3). La generación media anual es de 1.421 Gwh/año , y la vida útil estimada en 50 años se corresponde con el tiempo en que llegará a retener 531 Mm^3 de sedimentos muertos en el embalse (CVS y Fonade, 2004).

A partir del proyecto hidroeléctrico hay dos ecosistemas bien definidos: (1) la presa y (2) el río, que posee a su vez tres subsistemas: (1) la Ciénaga Grande de Lórica –CGL– (38.500 ha); (2) las Ciénagas de la Margen Izquierda –CMI– (400 ha) y (3) la Ciénaga de Betancí –CB– (3.800 ha). El río corre en dirección sur-norte. En la parte superior de la hoya, o Alto Sinú, están localizados los principales tributarios y en esta zona se comporta como río típico de montaña. La zona baja de la hoya, o valle del Sinú, no recibe ningún tributario de importancia y, por el contrario, durante épocas de crecientes alimenta gran número de zonas bajas, ciénagas y lagunas, que actúan como reguladoras del caudal y amortiguadoras de las máximas crecientes. En el valle, el río se caracteriza por suaves pendientes, que disminuyen progresivamente a medida que se acerca a su desembocadura en el Mar Caribe (Figura 1).

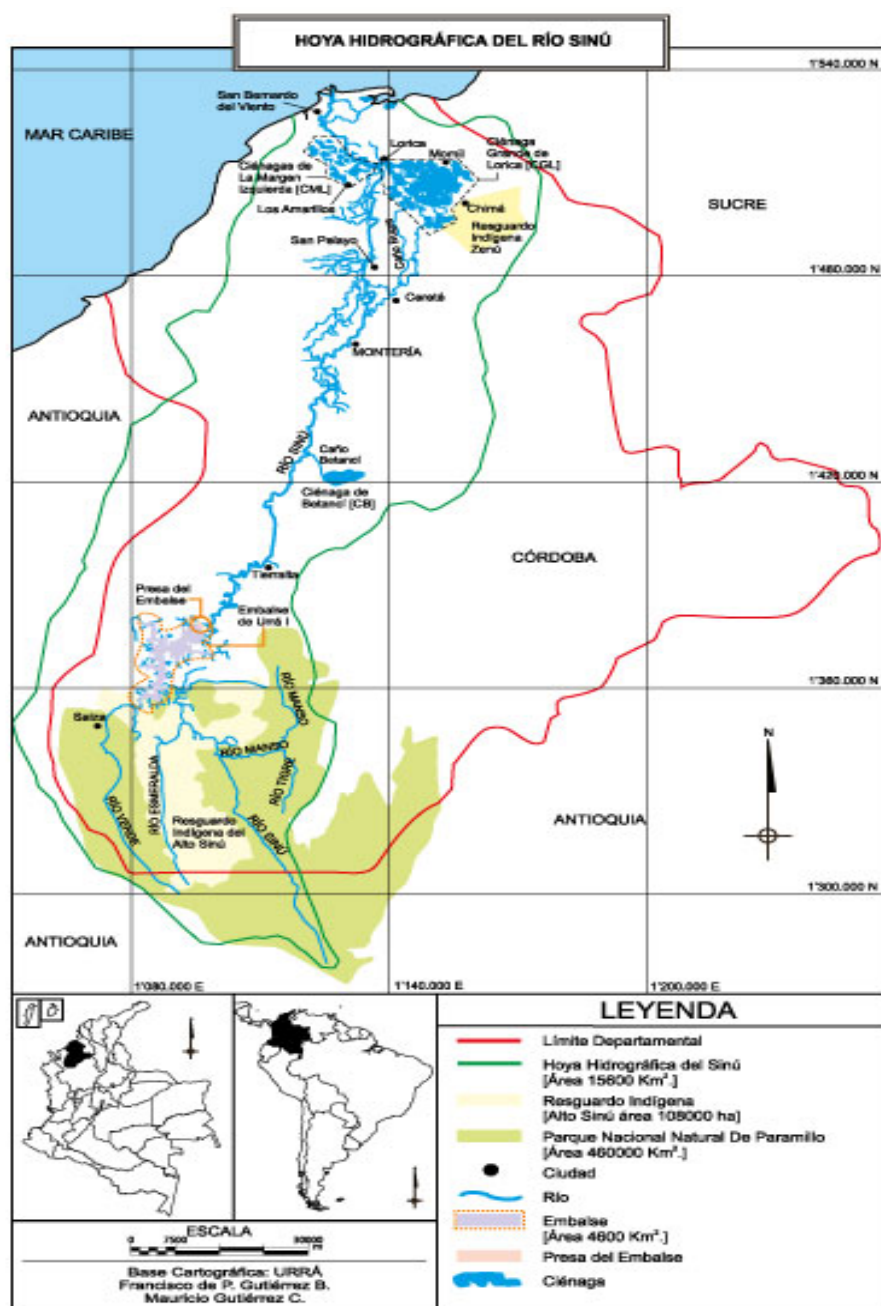


Figura 1. Cuenca hidrográfica del río Sinú.

El clima es el típico de zonas bajas del norte del país, con temperaturas mínimas promedio de 22^o C, promedio máxima de 33^o C y humedad relativa media de 80% en el paralelo de la ciudad de Montería. La precipitación anual promedio en la parte baja del valle es del orden de 1.100 mm.año⁻¹ aumentando hacia las cabeceras del río, en donde la precipitación excede 2.000 mm.año⁻¹. Los períodos hidrológicos comprenden cuatro épocas: (1) aguas bajas (enero-abril); (2) aguas en ascenso (mayo-junio); (3) aguas altas (julio-noviembre) y (4) aguas descendiendo de diciembre a comienzos de enero (CVS y Fonade, 2004).

Desde el punto de vista íctico, el río y su plano inundable tiene reportadas 148 especies; más de la mitad con características estuarias que ascienden por la parte baja del río. Del total de especies, 53 son comunes con las del río Grande de La Magdalena, 38 con las del Atrato y 35 o 37 se encuentran en ambas hoyas (Dahl, 1958; Dahl y Medem, 1964; Dahl *et al.*, 1965; Lasso *et al.*, 2012).

Debido a introducciones y translocaciones se reportan cuatro especies más: las cachamas (*Colossoma macropomun-Piaractus brachypomus*), nativas del Orinoco y del Amazonas, y los cíclidos (*O. niloticus-Oreochromis mossambicus*) y el híbrido *C. macropomun x P. brachypomus*, que en informe preliminar del Instituto Nacional de los Recursos Naturales y de Protección del Ambiente -INDERENA-recomendaba no translocarlas o transplantarlas (implantación de una especie o subespecie nativa en áreas o ecosistemas donde no ha existido), ni introducirlas en ninguna de las cuencas nacionales (INDERENA y Universidad de Caldas, 1971; Alvarado y Gutiérrez, 2002).

El conocimiento de los parámetros biológicos con fines de ordenamiento pesquero de la cuenca y manejo en cultivos controlados se tiene para 17 de las 27 denominadas especies comerciales (Olaya-Nieto *et al.*, 2007; Lasso *et al.*, 2012).

O. niloticus, según lo previsto en la literatura científica –que se desconoció al introducirla– se convirtió en especie comercial de muchas cuencas nacionales, siendo llevada al departamento de Córdoba en 1986, para ser cultivada en confinamiento e introducida en la cuenca hidrográfica del río Sinú en 1988 como consecuencia de

las inundaciones originadas por el río que anegó la región; ocurriendo de este modo la fuga de individuos de los estanques de la estación piscícola de Lórica –que producía 200.000 alevinos/año– y de los piscicultores, lo que derivó en su amplia distribución principalmente en la cuenca baja del río (Giraldo, 1989; Otero, 1989; Gutiérrez, 2005). Posteriormente se introdujo en la parte alta, estando, en consecuencia, instaurada en toda la cuenca. Seguir con su fomento es desconocer que las introducciones y translocaciones llevan a la pérdida de las especies nativas, a cambios en la estructura y funcionamiento de la(s) comunidad(es), e incluso alteración física del ecosistema (Hernández-Camacho y Acero, 1971; Gutiérrez, 2001; Barliwa *et al.*, 2003; Font, 2003; Fargione *et al.*, 2004; Gutiérrez, 2005; Informe Nacional sobre el estado de la Biodiversidad en Colombia, 2006; Gutiérrez *et al.*, 2012).

4.5 Descripción de la familia y de la especie

4.5.1 La familia

La familia *Cichlidae* cuenta con más de 1.600 especies, estando ampliamente distribuida en África (incluida Madagascar), Palestina, Centro y Sur América, Sur de India y Sri Lanka (Lagler *et al.*, 1984). La mayoría de sus especies –incluidas las tilapias– habitan aguas dulces, aunque algunas frecuentan aguas salobres (Philipart y Ruwet, 1984). Pueden ser identificados por poseer una nariz (presentando un orificio nasal a cada lado de la cabeza), aleta dorsal con rayos y espinas, aleta anal con al menos tres rayos espinosos y hueso opercular sin espinas. El tamaño de las especies suramericanas oscila entre 30 mm y 600 mm. El hábitat y las especializaciones tróficas son aún investigados, pues poseen amplio espectro alimentario, producto de adaptaciones morfológicas (FAO, 1999; Barliwa *et al.*, 2003).

4.5.2 *Oreochromis niloticus*

4.5.2.1 Diagnosis

Cuerpo con el dorso grisáceo, rosado a los lados, con 7 a 12 barras verticales oscuras en la aleta caudal. Anal (III, 3), Dorsal (XVI-XVIII, 12-13); 9-11 a 32-33 (31) escamas en línea lateral. Presenta dimorfismo sexual, la hembra es más pequeña que el macho (aleta caudal en punta); en época reproductiva el color de las aletas se torna rojizo (Trewavas, 1982, 1983; Eccles, 1992; Paugy *et al.*, 2004).

4.5.2.2 Aspectos biológicos

Talla y peso. La longitud estándar -Lst-, peso y edad máxima reportadas, son respectivamente 60 cm, 4,3 kg y nueve años (Eccles, 1992; Paugy *et al.*, 2004).

Aspectos reproductivos. La madurez sexual se alcanza entre los dos y cuatro meses de edad a 18,6 cm de Lst. La fertilización es externa, desova cada seis u ocho semanas a temperaturas entre 25 y 32^o C, siendo 20-28 °C el intervalo óptimo para su reproducción (MacBay, 1961, en Ávila *et al.*, 1991; Latif y Rashid, 1972). El desove ocurre con oxígeno disuelto a niveles de 2-4 ppm (Campos-Mendoza *et al.*, 2004).

Su fertilidad es baja, pero con alta frecuencia de reproducción y supervivencia de las larvas, lo cual genera fenómenos de sobrepoblación. Las hembras tienen incubación bucal de huevos y cuidado parental, lo que favorece su crecimiento poblacional (Babiker e Ibrahim, 1979; Trewavas, 1982; FAO, 2007).

Las poblaciones de tilapias cuando habitan un medio estable presentan estrategia demográfica «k» (baja fecundidad, madurez lenta y crecimiento rápido), pero cuando este presenta frecuentes variaciones de temperatura, del nivel de agua y del alimento, etc., cambian su dinámica, adoptando la estrategia «r», que significa fecundidad elevada, madurez temprana y crecimiento lento (Noakes y Balon, 1982; FAO, 1999; Costa-Pierce, 2003).

Alimentación. Omnívora, incluyendo fitoplancton, perifiton, plantas acuáticas, pequeños invertebrados, fauna bentónica y detritus en su dieta (FAO, 2007). Es oportunista y puede llegar a ser de hábitos carnívoros,

alimentándose de zooplancton, larvas de insectos u otros peces. También pueden ser detritívoras (Prejs y Colomine, 1981; Philipart y Ruwet, 1984; FAO, 1999).

Hábitat. Habita en ambientes lénticos con temperaturas entre 13,5 y 33 °C. Son eurihalinas 0,015 a 30‰, euritermas y neoténicas, soportan amplios intervalos de oxígeno disuelto ($< 0,1$ ppm) y acidez del agua (pH entre 5 y 11), dependiendo de la longitud, edad y tamaño corporal (Kestemont *et al.*, 1989; Villegas, 1990; Avella *et al.*, 1993).

4.5.2.3 Distribución geográfica

El área de su distribución nativa es África tropical, subtropical y Oriente Medio en los ríos costeros de Israel; río Nilo, Burkina Faso, Camerún, Chad, Etiopía, Guinea, Níger, Nigeria, Sudán y Uganda (Babiker e Ibrahim, 1979; Trewavas, 1982, 1983; Eccles, 1992). Pero su distribución se ha ampliado debido a su introducción en más de 100 países o territorios para control de la vegetación, cultivo en estanques, en sembrados de arroz, inclusión en hábitats en donde un nicho ecológico no es ocupado por otras tilapias, generación de pesquerías y pesca deportiva (Chervinski, 1984; Garibaldi y Bartley, 1998; Fargione *et al.*, 2004; CABI, 2012; Global Invasive Species Database, 2012).

4.6 Materiales y métodos

Durante el período comprendido entre mayo de 2000 y abril de 2001, y junio de 2000 a mayo de 2001, se efectuaron 12 muestreos biológicos y pesqueros en las CMI y en la CGL respectivamente. Las capturas se hicieron con atarraya de tres puntos de ojo de red; el número de muestra fluctuó entre $n = 45-70$ individuos/mes, para un total de 1.105 individuos en 120 días de trabajo de campo, que significaron 680 horas de esfuerzo pesquero. El seguimiento poblacional sin la misma intensidad ha continuado a través del registro de 600 individuos (300 CMI y 300 en la CGL), para verificar si el comportamiento en diversos parámetros continúa en los rangos previamente establecidos.

Capturados los ejemplares, se estableció la Lst, la longitud total -Lt- y la altura (ictiómetro con aproximación a 0,1 mm); el peso húmedo, el peso del tracto digestivo (balanza OHAUS con aproximación a 0,1 g).

En cuanto al análisis del tracto digestivo, el canal alimentario se dividió en dos partes (estómago e intestino), cada una de estas fracciones se pesó tanto llena como vacía (balanza OHAUS con aproximación a 0,1 g), midiendo la longitud total del tubo digestivo.

Se obtuvieron 589 estómagos llenos y por medio de una alícuota de 0.1mL del volumen total, y analizadas a través de un microscopio Olympus (10X-40X). La identificación de los contenidos alimenticios se llevó hasta el taxón más bajo posible utilizando las claves de Needham y Needham (1978); Parra *et al.* (1982); Streble y Krauter (1985) e Infante (1988).

Con el fin de determinar cuál(es) de las variables morfométricas o reproductivas propias de *O. niloticus* son las que mayor peso tienen en el comportamiento de la especie, se procedió a realizar análisis de covarianza, correlación de Pearson, pruebas de Levene para comprobar homocedasticidad de la varianza, aplicación de las correcciones de Bonferroni, análisis de ANOVA, y pruebas no paramétricas de Kruskal-Wallis y U-Mann-Whitney.

4.7 Resultados y discusión

En los doce muestreos efectuados en las CMI y en la CGL, en las primeras se colectaron 569 individuos (349 hembras y 220 machos) y en la segunda 533 ejemplares (296 hembras, 237 machos y 3 individuos de sexo indeterminado). Posteriormente se capturaron 600 individuos (300 CMI y 300 CGL), que se utilizan como puntos de comparación respecto a los inicialmente colectados (Gutiérrez; 2005; Gutiérrez *et al.*, 2012).

4.8 Aspectos merísticos y morfométricos

Los ejemplares colectados en las CMI presentaron peso promedio de 337,4 g (mínimo 91 g y máximo 961,1 g); Lt promedio de 24,9 cm

(mínima 16,2 cm y máxima 34,3 cm); Lst promedio de 19,8 cm (mínima 12 cm y máxima 28,5 cm) y altura promedio de 8,5 cm (mínima 5,9 cm y máxima 13,5 cm). Valderrama y Ruiz (1998); Valderrama *et al.* (2001), reportaron para las CMI talla media de captura -TMC- de 19,4 cm.

Los individuos colectados en la CGL tuvieron peso promedio de 275,7 g (mínimo 38,3 g y máximo 713 g); longitud total promedio de 22,1 cm (mínima 11,5 cm y máxima 31,9 cm); y Lst promedio de 17,7 cm (mínima 9 cm y máxima 28 cm); y altura promedio 8,2 cm (mínimo 4,3 cm, máximo 13 cm). Valderrama *et al.* (2001) reportaron para la CGL TMC –talla media de captura– 18,8 cm y para toda la cuenca 19,1 cm.

Los 600 individuos utilizados como seguimiento entre 2002 y 2012 estuvieron en los rangos descritos y sin variaciones significativas.

A manera de comparación poblacional, en el embalse de Betania (5.300 ha) en donde también existe población introducida de *O. niloticus*, la LT promedio es de 19 cm, con peso promedio de 251 g, la longitud máxima 30 cm y la mínima 13 cm (Alvarado, 1998; Gutiérrez, 2005, 2012). Las poblaciones de la Ciénaga Grande de Santa Marta -CGSM- (730 km² de área lagunar), presenta tallas entre 18 y 23,1 cm (INVEMAR, 2002; Ibarra *et al.*, 2014).

Comparadas las poblaciones de Betania con las de la cuenca hidrográfica del río Sinú, respecto a pesos promedios, están en mejores condiciones en su orden las de las CMI y luego las de la CGL; en cuanto a Lst promedio, las de la CMI y las de la CGSM se corresponden, quedando en tercer orden las de Betania. La explicación puede radicar en que las poblaciones de las CMI están en un ecosistema que debido a su alta intervención, se comporta como si fuera un gran estanque o muchos estanques, separados del río la mayor parte del año por falta de flujo hídrico de este hacia las ciénagas, lo que les otorga relativa ventaja respecto a competencia con especies nativas, que puedan tener niveles tróficos similares. Etologías de este tipo han sido descritas para *O. niloticus* por El-Zarka y Aleem (1970a-970b); Latif y Rashid (1972); Fryer e Iles (1972); Lowe-McConnell (1982); Chandrasoma (1986); Kone *et al.* (1998), y como respuesta adaptativa de la especie a nuevos ecosistemas, a alteraciones o a modificaciones

antrópicas, originando también que la especie tenga estrategia reproductiva «r».

En la CGL, por su extensión existen poblaciones de *O. niloticus* muy dispersas y con mayores competidores y depredadores. En el caso de la CGSM, definitivamente el ingreso de las poblaciones procedente de los ríos Grande de La Magdalena (256.000 km²), Cauca (63.300 km²) y San Jorge (14.800 km²), generan posibilidades de poblar en altísimo grado ecosistemas estuarinos modificados, lo que explica su auge poblacional en tan corto tiempo –cinco años–. Además, en estas cuencas se han sembrado casi todos los tipos de híbridos y se hace repoblación constante por parte de entidades del Estado, estimándose que el número de individuos registrados en las capturas en la CGSM entre los años 2000 y 2001 y 2002 corresponden a $18.600.096 \times 10^3$; $4.187.297 \times 10^3$ y 882.843×10^3 individuos, respectivamente (INVE-MAR, 2002). A 2014 las capturas han descendido al punto de ser tan solo 9,7% (32 t.año^{-1}), contra 85% de los años 2001 y 2002, debido a cambios en la acumulación de sedimentos, aumento de salinidad, lo que genera impactos que le son negativos (Ibarra *et al.*, 2014).

A partir de los datos de peso total y Lst se estableció la relación logarítmica obteniéndose el coeficiente $b = 2,4732$ para las CMI y $b = 2,633$ para la CGL, indicativo de crecimiento de tipo alométrico, es decir, hay disminución del peso con respecto al incremento de la longitud de los individuos. Para determinar si el crecimiento en la CGL no era isométrico ($b = 2,9$), se realizó una prueba t de dos colas, calculando la desviación estándar tanto del logaritmo del peso (0,28), como el de la Lst (0,09), y a partir de estos, el resultado del t calculado resultó por fuera del área de distribución de la campana de Gauss ($t_c = 6,42$ y $t_t = 1,64$), con 536 grados de libertad y $p > 0,01$, corroborando que el crecimiento es alométrico (b es diferente de 3).

La relación talla-peso muestra la ganancia del peso corporal al incrementarse la talla de la especie mediante el coeficiente de regresión b , el cual puede fluctuar entre 2,2 y 3,5. Tanto en las CMI (Figura 2) como en la CGL (Figura 3), el crecimiento de *O. niloticus* es alométrico (heterogéneo), indicativo de que existe disminución del peso respecto a la longitud (Vazzoler, 1996).

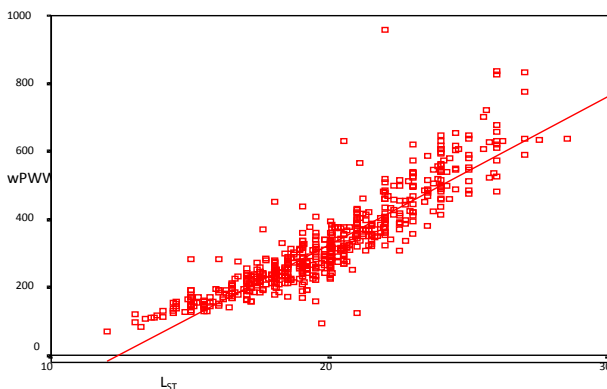


Figura 2. Relación talla (L_{st}) - peso (W) de *O. niloticus* en las Ciénagas de la Margen Izquierda ($n = 569$); $W = 0.1963 L_{st}^{2.4732}$ y con $r^2 = 0.832$; puntos valores observados, línea roja valores exponenciales.

Es importante considerar para los posteriores análisis que en la relación talla-peso inciden características genéticas propias de cada especie, su estado gonadal, el dimorfismo sexual, la proporción de sexos, el recurso alimenticio y las condiciones ambientales (Margalef, 1995); factores que dada la localización y poco intercambio entre las poblaciones de las CMI y la CGL, era presumible tendieran a ser diferentes.

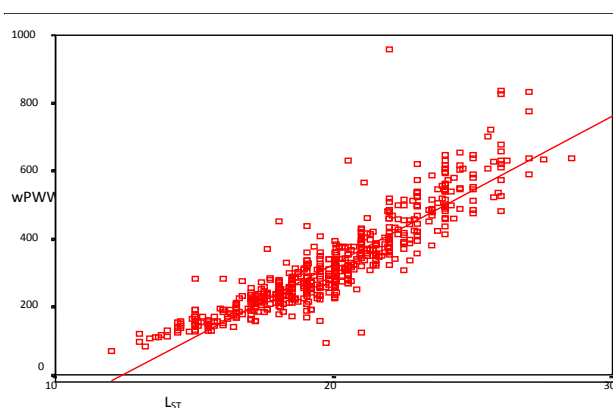


Figura 3. Relación talla (L_{st}) - peso (W) de *O. niloticus* presentes en la Ciénaga Grande de Lorica ($n = 536$); $0.1304 L_{st}^{2.633} W = L$ y con $r^2 = 0.939$; puntos valores observados, línea roja valores exponenciales.

En Betania (Alvarado, 1998), la relación talla-peso arrojó la relación: $W = 0,15714 Lst^{2,530112}$ ($n = 1.065$, $r^2 = 0,87$), valores cercanos a los encontrados en la cuenca hidrográfica del río Sinú. Para otras poblaciones, se tienen reportes en Arabia Saudita con $b = 2,75$, para Indonesia (Reservorio Jatiluhur 2,889), para Tanzania (Lago Victoria 2,864), para Etiopía (Lago Tana 2,742) y para poblaciones en China un b entre 2,96 y 3,06, estando reportado el máximo valor (3,34) para el lago Albert en el Congo (Al-Asgah, 1992; Pauly y Gayanillo, 1996). Valores superiores a los de la presente investigación y cuyo soporte está dado en que las citadas poblaciones poseen mayores Lt (entre 12,6 y 52,0 cm).

Se efectuó análisis de varianza para constatar si las regresiones tenían o no nivel de significancia entre las dos variables estudiadas. Para los dos análisis de regresión talla-peso, el resultado (niveles de significancia de F y de $t = 0,00$), respecto a la existencia de ajuste de las variables a los esquemas de regresión, permitió comprobar que cumplen con los requisitos para seguir adelante con otras pruebas estadísticas. El análisis de covarianza para las relaciones talla - peso arrojó un F_c (F calculado) de 0,51, con un F_t (F teórico: 0,05, 28,29) = 1,87; como el F_c es menor que el F_t (de las tablas), esto permite concluir que no existen diferencias significativas entre las correlaciones Lst - W para machos-hembras entre las CMI y la CGL.

Con base en el Factor de Condición Simple (K) como indicador cuantitativo del grado de bienestar de los peces y referido a las condiciones alimentarias (Vazzoler, 1996), se obtuvo promedio de 0,255 para las CMI y de 0,1133 para la CGL. Entre 2002 y 2012, el K para los 300 individuos de la CMI fue de 0,323 y para la CGL de 0,183 ($n = 300$). El índice permite catalogar los individuos en estado de desnutrición según la escala de Williams (1964) citada por Vazzoler (1996), lo que da a entender que la oferta trófica es escasa, o que están actuando vectores negativos, como la competencia con organismos que posean dieta similar, lo cual podría estar ocurriendo con el bocachico (*Prochilodus magdalenae*), que en las capturas totales de la cuenca representó el mayor porcentaje de los desembarcos así: 21,5% en la CGL, 14,5% en las CMI y 25% para toda la cuenca (Valderrama *et al.*, 2001), y que posee preferencias tróficas similares a *O. niloticus* en algunos de sus estadios de desarrollo.

A 2014, el sistema estadístico pesquero reporta que los desembarcos de especies de agua dulce en la cuenca del Sinú fueron 235,5 t.año⁻¹, siendo el bocachico 19,1 t.año⁻¹ (6,8% de los desembarcos) y *O. niloticus* 70,0 t.año⁻¹ (25,1% de los desembarcos), es decir, la población foránea supera a la nativa, que era la de mayor importancia (SEPEC, 2014). Esto denota perfecto ensamblaje a la cuenca del Sinú.

De hecho, la TMC del bocachico para toda la cuenca fue de 23,2 cm Lst, en la CGL de 23,8 cm Lst $\pm$ 3,9 con un rango entre 13 cm Lst y 35 cm Lst. En la ciénaga de Betancí –convertida en embalse desde el año 2000–, se presentaron las mayores tallas con una media de 25.2 cm Lst $\pm$ 2,6 y en las CMI se registraron los menores tamaños con 21,3 cm Lst $\pm$ 3,2 cm (Valderrama *et al.*, 2001).

Otra finalidad del factor de condición simple (K) es que a partir de su análisis es posible evidenciar picos de desove, descanso reproductivo y el estado de nutrición de los organismos. En la figura 4 se evidencia (tanto en las CMI como en la CGL), que *O. niloticus* se encuentra continuamente en reproducción. En las figuras 5 y 6 se presentan los promedios mensuales de K para hembras y machos en las CMI y la CGL, respectivamente, denotando que hay descanso reproductivo en el mes de abril en los machos de CMI y CGL, y en marzo para hembras de la CGL. Situación como la descrita ha sido identificada en poblaciones del río Nilo (El-Zarka y Aleem, 1970b), en el Nilo en la vecindad de Khartoum (Babiker e Ibrahim, 1979), en el lago Awassa (Admassu, 1996), y en presas africanas (Kone *et al.*, 1998).

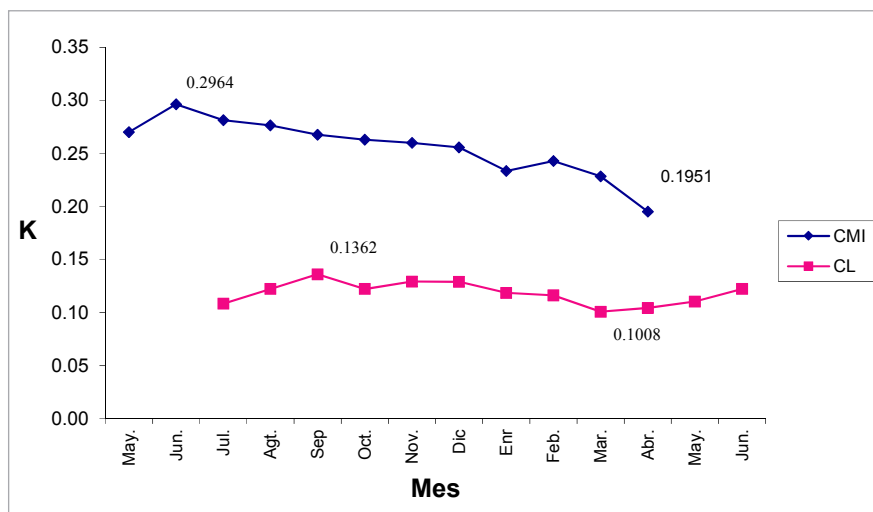


Figura 4. Promedio mensual del factor de condición simple (K) de las poblaciones de *O. niloticus* presentes en las Ciénagas de la Margen Izquierda (n = 569) y en la Ciénaga Grande de Lorica (n = 536).

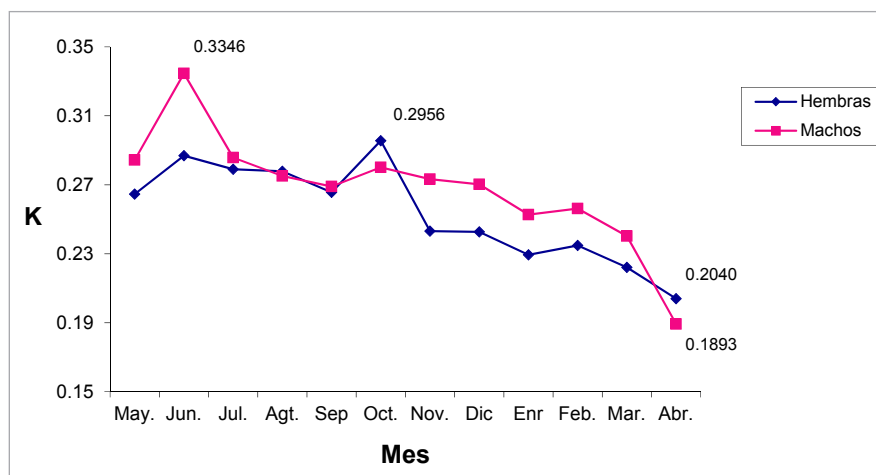


Figura 5. Promedio mensual del factor de condición simple (K) de hembras y machos de *O. niloticus* presentes en las Ciénagas de la Margen Izquierda (n = 569).

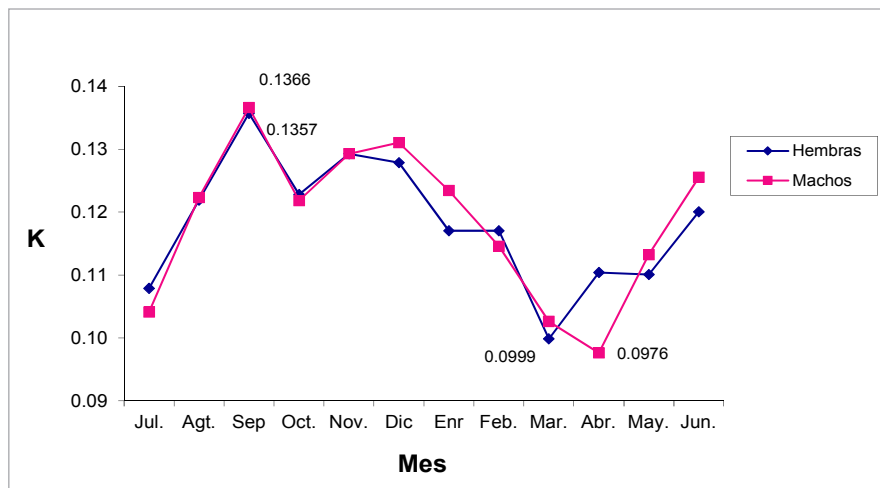


Figura 6. Promedio mensual del factor de condición simple (K) de hembras y machos de *O. niloticus* presentes en la Ciénaga Grande de Lorica (n = 536).

Con el fin de analizar si había diferencias significativas en los factores de condición simple (K) entre la CGL y las CMI y respecto a sexos, se efectuó análisis de varianza, planteando las siguientes hipótesis de trabajo:

H_0 : No existen diferencias entre las medias del factor de condición simple (K) entre las CMI y la CGL.

H_i : Existen diferencias entre las medias del factor de condición simple (K) entre las CMI y la CGL.

H_0 : No existen diferencias entre las medias del factor de condición simple (K) entre los sexos.

H_i : Existen diferencias entre las medias del factor de condición simple (K) entre los sexos.

H_0 : No existe interacción entre el sexo, las dos áreas muestreadas (las CMI y la CGL) respecto a la media del factor de condición simple (K).

H_i : Existe interacción entre el sexo, las áreas muestreadas (las CMI y la CGL) respecto a la media del factor de condición simple (K).

Como primer paso para verificar la realización de la ANOVA se efectuó una prueba de homocedasticidad de varianza como condición indispensable para asegurar que se puede efectuar dicha prueba, utilizando la prueba de Levene bajo la hipótesis:

$$\begin{aligned} H_0: \sigma^2_{\text{cmi}} &= \sigma^2_{\text{cgl}} = \sigma^2_{\text{hembras}} = \sigma^2_{\text{machos}} \\ H_1: \sigma^2_{\text{cmi}} &\neq \sigma^2_{\text{cgl}} \neq \sigma^2_{\text{hembras}} \neq \sigma^2_{\text{machos}} \end{aligned}$$

Para el análisis de Levene se utilizó un α de 0,01 teniendo en cuenta que esta prueba es la más estricta de las propuestas para este tipo de análisis (Martínez y Martínez, 1997). Así mismo, se corrió el modelo con una transformación logarítmica y arrojó como resultado un nivel de significancia de 0,744. Efectuado el procedimiento de ANOVA, y utilizando un α de 0,05 con los resultados, es posible decir que en cuanto a los sitios de muestreo, el nivel de significancia de $p = 0,000$ origina que se rechace la hipótesis nula (H_0) y se acepte que existen diferencias entre los lugares en K; mientras que para los sexos el nivel de significancia es $> 0,05$. Por tanto, se acepta la H_0 según la cual entre sexos no hay diferencias. Finalmente, el análisis de la interacción entre sexo y lugar permite aceptar la H_0 de la no existencia de interacción entre las variables.

Respecto al análisis del factor de condición múltiple (Km), de las figuras 7 y 8, se colige que en las CMI el Km es más alto que en la CGL. Las CMI presentan los mejores valores y son casi constantes, mientras que en la CGL los valores son menores y con mayores variaciones. Algo similar ocurre en poblaciones originarias de Etiopía en los lagos Zyway y Awassa (Lowe-McConnell, 1982; Adamssu, 1996; Tadesse, 1999), en Kenia en el Turkana (Stewart, 1988) y en pequeños cuerpos de agua en Malawi (Mattson y Kaunda, 1997), donde *O. niloticus* se encuentra en constante reproducción, evidenciando incremento reproductivo en diferentes meses del año, o durante los períodos de intensa radiación solar y/o lluvias. Lagler *et al.* (1984) han postulado que *O. niloticus* tiene ciclo anual constante de reproducción y una vez que ha comenzado, continúa teniéndolo hasta que muere, lo cual es reafirmado por Lowe-McConnell (1982) y Admassu (1996), y así ocurre con las poblaciones del río Sinú.

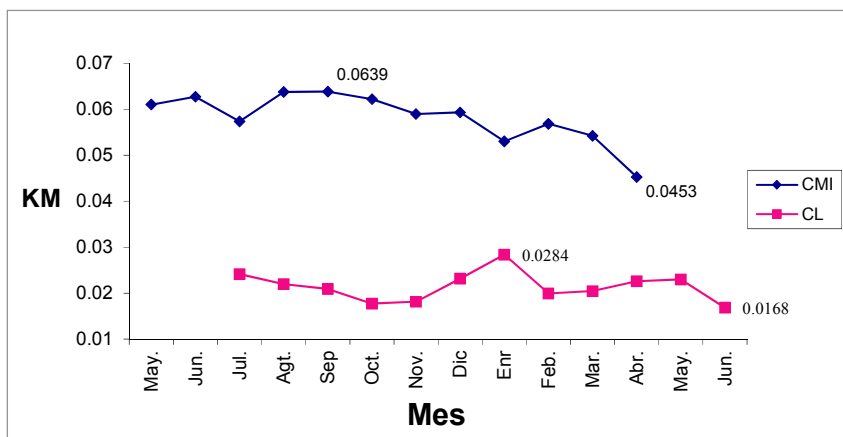


Figura 7. Promedio mensual del factor de condición múltiple (Km) de las poblaciones de *O. niloticus* presentes en las Ciénagas de la Margen Izquierda (n = 569) y en la Ciénaga Grande de Lorica (n = 536).

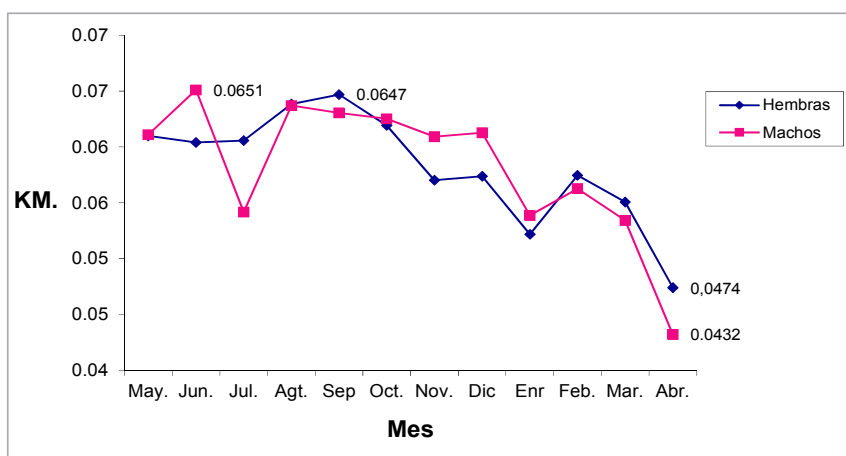


Figura 8. Promedios mensuales del factor de condición múltiple (Km) de hembras y machos presentes en las Ciénagas de la Margen Izquierda (n = 569).

A su vez, en cuanto a los valores promedio del factor de condición múltiple (Km) los individuos en las CMI presentaron un Km promedio de 0,058 (Figura 8). Respecto a los machos, se observó descenso en la curva durante el mes de julio indicando el pico de desove. En la CGL, el Km promedio fue de 0,0216 y varió mensualmente ocurriendo picos de desove durante los meses de agosto, diciembre y junio (Figura 9).

Entre 2002 y 2012, en las CMI el Km fue de 0,059 y en la CGL 0,0219, es decir, las variaciones no son significativas y, de hecho, la población a pesar de tener picos reproductivos, está todo el año en este estado.

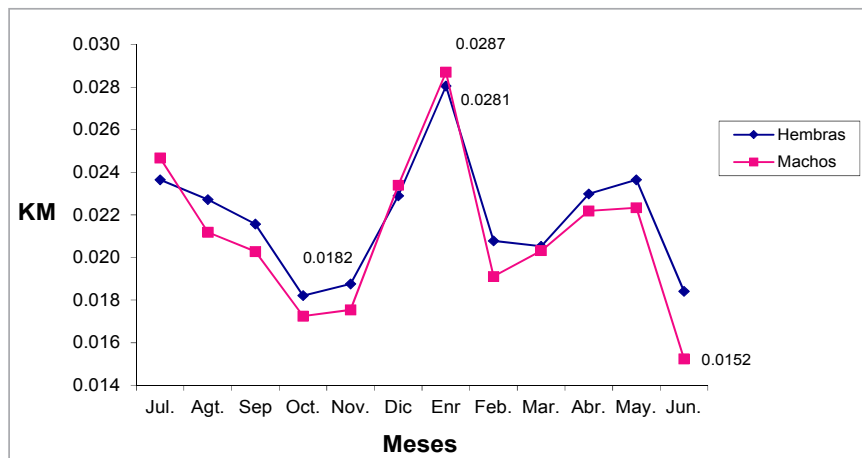


Figura 9. Promedios mensuales del factor de condición múltiple (Km) de hembras y machos presentes en la Ciénaga de Lorica (n = 536).

Los valores para los diferentes índices y el comportamiento reproductivo encontrados para las poblaciones de *O. niloticus* presentes en la cuenca hidrográfica del río Sinú, al ser comparadas con las descritas para poblaciones nativas de África, permiten concluir que son similares y coincidentes en alto grado con lo reportado por El-Zarka y Aleem, 1970; Babiker e Ibrahim, 1979; Lowe-McConnell, 1982; Admassu, 1996; y Bocci, 1999.

Con el fin de comparar lo que sucede con el factor de condición múltiple (Km) entre las CMI y la CGL y los registros de sexo, se procedió a realizar un ANOVA bajo las propuestas:

H_0 : No existen diferencias entre las medias del Km entre las CMI y la CGL.

H_1 : Existen diferencias entre las medias del Km entre las CMI y la CGL.

H_0 : No existen diferencias entre las medias del Km entre los dos sexos.

H_1 : Existen diferencias entre las medias del Km entre los dos sexos.

H_0 : No existe interacción entre el sexo y los dos lugares de muestreo: las CMI y la CGL, en la media del Km.

H_1 : Existe interacción entre el sexo y los dos lugares de muestreo: las CMI y la CGL, en la media del Km.

Efectuada la ANOVA, se procedió a efectuar la prueba de Levene, que por el nivel de significancia obtenido ($p = 0,054$), se aprueba la homocedasticidad de la varianza. A su vez, los resultados obtenidos mediante las dos pruebas permite aceptar la H_1 : existen diferencias entre las medias del Km entre la CGL y las CMI; entre sexos no hay diferencia, y se aprueba la H_0 : no existen diferencias entre las medias del Km entre los dos sexos; se acepta la H_0 : no existe interacción entre el sexo y entre los dos lugares de muestreo: la CGL y las CMI, en la media del Km.

4.9 Análisis trófico

Para la determinación de los hábitos alimenticios de *O. niloticus* se analizaron 589 estómagos llenos, de los cuales 274 corresponden a individuos presentes en las CMI y 315 a los de la CGL. La relación promedio entre la longitud del intestino y la Lst, fue de 6,16 y 7,60 para las CMI y la CGL, respectivamente, lo que denota régimen alimenticio netamente herbívoro.

Se contabilizaron 67.869 individuos en los contenidos estomacales, los cuales se identificaron hasta el nivel más bajo posible. Sin embargo, para facilitar el análisis se agruparon a nivel de órdenes debido a la gran cantidad de géneros presentes, observándose nueve grupos alimenticios: *Bacillariophytas*, *Chlorophytas*, *Cyanophytas*, Crustáceos (Cladóceros, Copépodos y Ostrácodos), *Euglenophytas*, Gastrópodos, Protozoos (Rizópodos y Ciliados), Rotíferos y *Xanthophytas*. En las CMI, la proporción numérica de los ítems alimenticios indicaron la presencia de fitoplancton (97,6%), zooplancton (0,8%), bacterias (0,81%) y detritus vegetal (0,6%). En la CGL, las algas componen 98,2% de la dieta, el

zooplankton 0,65%, el material vegetal 1% y las bacterias 0,07%. Para determinar la preferencia por el alimento, se aplicó el Índice de Importancia Relativa Modificado (IIR) (Figuras 10-11).

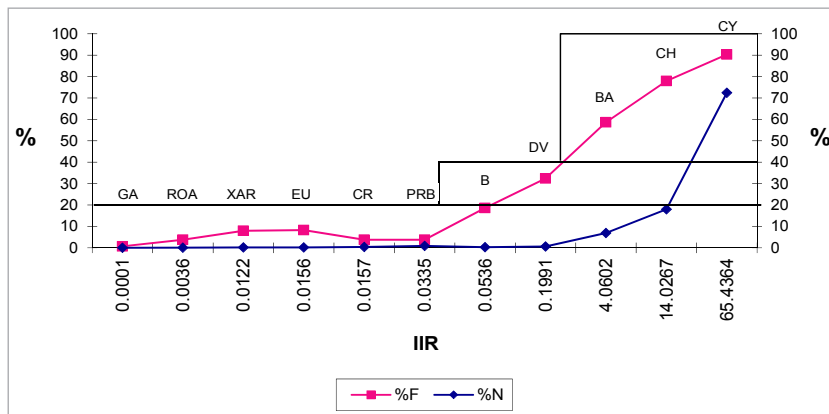


Figura 10. Espectro trófico de *O. niloticus* en las Ciénagas de la Margen Izquierda (n = 569). % F = frecuencia en porcentaje de cada ítem; % N = abundancia relativa en porcentaje de cada ítem; GA = gastrópodos; RO = rotíferos; PR = protozoos; B = bacterias; XA = *Xanthophytas*; DV = detritus vegetal; CR = crustáceos; EU = *Euglenophytas*; CH = *Chlorophytas*; CY = *Cyanophytas*, BA = *Bacillariophytas*.

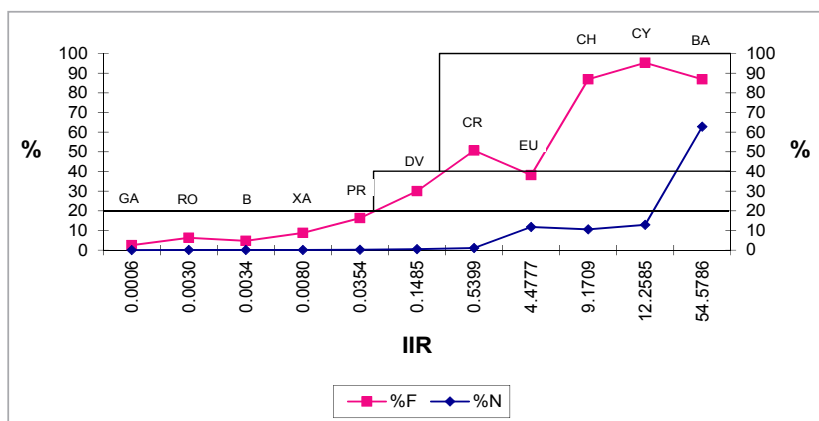


Figura 11. Espectro trófico de *O. niloticus* en la Ciénaga Grande de Lorica (n = 536). % F = frecuencia en porcentaje de cada ítem; % N = abundancia relativa en porcentaje de cada ítem; GA = gastrópodos; RO = rotíferos; PR = protozoos; B = bacterias; XA = *Xanthophytas*; DV = detritus vegetal; CR = crustáceos; EU = *Euglenophytas*; CH = *Chlorophytas*; CY = *Cyanophytas*, BA = *Bacillariophytas*.

El Índice de Vacuidad (IV) presentó porcentaje de 57,07% para los individuos de las CMI y de 10,89% para los de la CGL. Esto mismo es explicado por el Índice Gravimétrico (Mg), pues al relacionar el peso total del estómago con el peso de la pared estomacal resultó que el peso del contenido alimentario para las CMI en promedio fue de 0,2 g y de 1,46 g para la CGL. Situación que podría fundamentarse en el hecho de que la población de las CMI dispone de nichos y, en general, de un ecosistema que le brinda garantías de permanencia, así como poca competencia y disponibilidad más rápida de alimento. Al contrario de lo que ocurre en la CGL, en donde por la extensión de la ciénaga, mayor población de especies ícticas y competencia, se les obliga a la búsqueda permanente de alimento y de espacios seguros para su supervivencia. De hecho, cuando el río baja sus niveles, es posible ver que los nidos están más concentrados en las CMI que en la CGL; por ello la consideración de que las CMI son como un gran estanque protector para las especies cobra validez ya que los diferentes parámetros biológicos y los análisis parecen confirmarlo: siendo en los muestreos de 2002 a 2012, con Iv en CMI de 57,03% y 10,90% para la CGL y Mg en CMI (0,23 g) y 1,47 g en la CGL.

Con relación a la dieta de *O. niloticus*, en las dos zonas de muestreo se puede observar que se registran pequeñas diferencias en cuanto a la proporción de ítems alimenticios encontrados. Sin embargo, la predominancia se da por el fitoplancton, siendo las *Cyanophytas* más abundantes en las CMI y las *Bacillariophytas* en la CGL. En *Cyanophyceae* se encontraron 10 géneros, todos comunes a las CMI y a la CGL. En *Clorophyceae* los géneros fueron 30, siendo exclusivos de la CGL diez, y dos para las CMI. En *Xanthophyceae*, tres fueron los géneros encontrados, uno de ellos de exclusividad de la CGL (*Characiopsis*). En *Bacillariophyceae*, los géneros fueron doce, siendo dos exclusivos de la CGL (*Amphipleura*, *Surirella*). En *Euglenophyceae* los tres géneros encontrados fueron comunes a los dos ecosistemas. En el grupo Protozoa, de los cuatro géneros encontrados *Paramecium* y *Euglypha*, correspondieron solamente a la CGL. En el grupo Asquelminto, de los tres géneros, Lacane solo se presentó en la CGL. En *Mollusca* se reporta un género que es común a las CMI y a la CGL, y finalmente en

Artrópoda (crustácea), las clases Branchiopoda, Ostrácoda y Copépoda fueron comunes a los sistemas. En total se encontraron 69 géneros de los grupos relacionados.

A manera de comparación, el INVEMAR (2002) reportó que las preferencias alimentarias de *O. niloticus* en la CGSM no variaron con la talla, e invariablemente mostraron que se alimenta de fitoplancton (96%) y de zooplancton (4%). El género *Oscillatoria* representó (68%), seguido por *Coscinodiscus* (11%), *Navicula* (8%), *Actinocyclus* (7%), *Spirulina* (3%) y *Spirogyra* (3%). Otros géneros hallados como *Gomphonema* sp., *Pleurosigma* sp., *Synedra* sp., *Closterium* sp., *Anabaena* sp., no alcanzaron a conformar 1% de la composición numérica del fitoplancton que consume la especie. El zooplancton estuvo compuesto solo por cladóceros que son frecuentes en aguas dulces. Lo anterior permite determinar que *O. niloticus* por ahora no depreda peces ni otro organismo superior sino plancton. Lo que aún no se ha determinado en poblaciones nativas de *O. niloticus* es si ingiere lo que abunda o si selecciona los artículos alimentarios que prefiere y, de ser así, cómo lleva a cabo su obtención de alimento. Lo anterior no difiere respecto a lo que ocurre en la cuenca del Sinú.

Dado que los organismos necesitan energía para poder cumplir sus requerimientos básicos como la reproducción, se puede llegar a pensar que la dieta depende de las condiciones medioambientales en un momento determinado de su vida. Por esto Tadesse (1988a-b; 1999), Chapman y Fernando (1994) y Teferi (1997) reportan que en condiciones naturales el alimento principal de las tilapias puede variar desde fitoplancton y macrófitas hasta remanentes de peces indiferenciados. Sin embargo, cabe anotar que el comportamiento trófico de las especies se formula durante su evolución. Y, a medida que se hacen más estables las condiciones de alimentación, se reproduce la gama de alimentos a los cuales se adaptan y, en consecuencia, a mayor variabilidad de alimento disponible es mayor la diversidad de alimentos ingeridos por las especies. Pero los hábitos alimenticios pueden cambiar en una misma especie de acuerdo con la localidad, las condiciones del alimento, la estacionalidad, la edad o el sexo (Prejs y Colomine, 1981); y considerando que *O. niloticus* es especie no nativa de la cuenca hidrográfica del río

Sinú, se puede concluir que tróficamente está ensamblada y estabilizada al nuevo ambiente, cumpliendo con los supuestos de Prejs y Colomine (1981). Todo ello, no obstante las alteraciones producidas por la entrada en operación del proyecto hidroeléctrico, que para muchas especies nativas resultó negativa, pero para *O. niloticus* con mínimos impactos negativos.

Por lo descrito, tróficamente la población de la cuenca hidrográfica del río Sinú en nada difiere de las condiciones referenciadas para las de Sri Lanka (Chandrasoma, 1986); para las del Golfo de Nyanza, en el lago Victoria y Puerto Victoria, en Kenya (Getabu, 1987); para las del lago Kyoga y Victoria, en Uganda (Ogutu-Ohwayo, 1987); para las del lago Awassa, en Etiopía (Tudorancea *et al.*, 1988); para las del lago Kano, en Nigeria (Bankole, 1988); para las de Bangladesh (Quddus y Dewan, 1988); para las del lago Awasa, en Etiopía (Getachew y Fernando, 1989) y del lago Ziway, en Etiopía (Abebe y Getachew, 1992), ya que en todas ellas predomina el fitoplancton como ítem alimenticio.

En un estudio trófico efectuado al unísono en tiempos, áreas y metodologías sobre *P. magdalenae* –especie iliófaga, eurífaga–, y que hipotéticamente se podría considerar afectada y competitiva con *O. niloticus*, se registraron 140 fuentes alimenticias, siendo sus alimentos preferenciales: artrópodos (*Brachiopoda*), *Bacillariophyceae* y *Cyanophyceae*.

O. niloticus y *P. Magadelanae* presentaron correspondencia trófica en acceso a *Bacillariophyceae*, *Cyanophyceae*, *Chlorophyceae*, *Euglenophyceae*, *Xanthophyceae*, *Artrópoda* y *Mollusca*. Coincidiendo en 12 órdenes, 13 familias y en 34 géneros, siendo el Índice de Morisita (IM) 0, 17, lo que confirma que por ahora no hay solapamiento de niveles tróficos entre las dos especies; allí la competencia es más bien por espacio, generada por la alta densidad de *O. niloticus* (Restrepo, 2002).

Conclusiones

O. niloticus presenta crecimiento diferencial o alométrico y el medio le está generando las condiciones adecuadas para su desarrollo, pues no presenta relaciones morfométricas inferiores a las de poblaciones nativas de donde es originaria.

Tanto en las CMI como en la CGL, *O. niloticus* muestra factor de condición bajo, lo cual induce a pensar que se encuentra bajo presión, pero con relación a las tallas alcanzadas, los pesos promedio, la tasa de crecimiento, la madurez sexual, el comportamiento reproductivo y su aporte a las capturas de la cuenca, se confirma su gran adaptabilidad al ecosistema y a las condiciones imperantes, incluidos los efectos derivados de la puesta en marcha del proyecto hidroeléctrico.

Por lo reportado, *O. niloticus* se encuentra bajo continua reproducción, indicativo de que está adoptando estrategia demográfica «r», lo cual garantiza el proceso de invasión en las ciénagas, desplazando a las poblaciones nativas. Esto último es reforzado por la circunstancia de no poseer depredadores naturales. A esto debe agregarse que el período de crecimiento y madurez de las especies nativas es muy largo (superior a 2,5 años), lo que las pone en desventaja.

O. niloticus resultó preferencialmente herbívora fitoplanctónica, basando su alimentación en *Bacillariophytas*, *Chlorophytas* y *Cyanophytas*, situación que es susceptible de cambiar en la medida en que se modifiquen las condiciones ambientales, y preferiblemente para la población de las CMI, que tienen fuerte alteración y afectación por aguas servidas. Pero con seguridad se adaptará.

O. niloticus puede estar ejerciendo presión sobre las poblaciones ícticas nativas, compitiendo por espacio y/o alimento, desintegrando la estructura y funcionamiento de la comunidad original, llegando a causar a largo plazo la extinción de especies nativas debido a su alta tasa reproductiva y adaptación potencial en las ciénagas del río Sinú, especialmente en las CMI y en la ciénaga de Betancí que en 2002 fue convertida en un embalse. Allí se construyó un paso de 70 m de largo por 4 m de ancho y 4 m de alto, impidiendo la comunicación río-ciénaga y se detectó en muy corto tiempo el auge poblacional de la especie, situación que sigue vigente según el estudio de la CVS-Fundación Herencia Ambiental Caribe (2013) que textualmente expresa: «Este ecosistema, con las condiciones actuales funciona como un gran estanque, donde la actividad pesquera depende de las acciones de repoblamiento con alevinos y de la productividad de especies como mojarra, moncholos y tilapias, siendo ésta última factor negativo».

Respecto a si existen o no diferencias significativas en los factores de condición simple (K), entre la CGL y las CMI respecto a sexos, no las hay, pero sí entre los dos ecosistemas. A su vez, entre sexos y la procedencia de los individuos (CGL y CMI) no existe interacción entre las variables. Los mismos análisis efectuados para el factor de condición múltiple (Km) arrojaron idénticos resultados a los del anterior análisis, lo cual confirma que las condiciones son semejantes para el K y el Km, para las poblaciones de *O. niloticus* en los dos ecosistemas.

Aplicados los índices y análisis a los 600 individuos muestreados entre 2002 y 2012, se encontró que los valores no presentan variaciones significativas respecto a los de 2000 y 2001, con excepción de la aparente disminución en los desembarcos pesqueros. Aunque es necesario anotar que las estadísticas no se toman con la continuidad y rigurosidad de los años anteriores e inmediatamente posteriores a la entrada en operación del proyecto hidroeléctrico URRÁ I.

Se puede concluir que para el caso de la cuenca del Sinú y otras cuencas nacionales en donde está presente *O. niloticus*, su éxito poblacional, grado de adaptación y capacidad colonizadora a nuevos hábitats se debe en gran parte a la interacción entre las capacidades ecológicas (entendida en la tolerancia a condiciones ambientales y poco exigentes en la alimentación), las biológicas (entendida por el tipo de reproducción, cuidado parental y machos poligámicos) y las genéticas (entendida en altos valores de variabilidad genética y fenotípica) (Narváez-Barandica *et al.*, 2005; Narváez-Barandica, 2006). Lo cual queda confirmado con el hecho de que se registran poblaciones en las cuencas hidrográficas y en los ecosistemas artificiales de 30 departamentos (Alvarado y Gutiérrez 2002; Gutiérrez-Bonilla y Álvarez-León, 2011; Gutiérrez *et al.*, 2012). También se reporta en 13 embalses: Arroyo Grande, Arroyo La Matuna, Betania, Calima I, Camedagua, Chisacá, Guájaro, Peñol-Guatapé, Porce II, Hidroprado, Punchiná Salvajina y San Francisco (Gutiérrez, 1999; Jiménez-Segura *et al.*, 2011).

Para finalizar, subestimando la cifra, por lo menos 60 millones de individuos de tilapias se han incorporado a las cuencas hidrográficas y sus planos inundables, lo que se corresponde con su éxito pesquero.

Esto se debe entre otros factores a las actividades de repoblación y de fomento realizadas por las autoridades ambientales y la autoridad pesquera nacional a través de sus estaciones piscícolas (últimos 15 años); también a las realizadas por otras entidades del Estado y organizaciones no gubernamentales, a lo que deben sumarse los escapes fortuitos o por inundación que afectan los proyectos acuícolas (Gutiérrez-Bonilla y Álvarez-León 2011; Gutiérrez *et al.*, 2012).

Referencias bibliográficas

- Abebe, E., y Getachew, T. (1992). Seasonal changes in the nutritional status of *Oreochromis niloticus* (L.) (Pisces: Cichlidae). In: Lake Ziway, Ethiopia. *Arch. Hydrobiology* 124(01): 109-112.
- Admassu, D. (1996). The breeding season of tilapia, *Oreochromis niloticus* (L). In: Lake Awassa Ethiopian rift valley. *Hydrobiology* 337: 77-83.
- Al-Asghar, N., A. (1992). Variation in the carcass composition of *Oreochromis niloticus* in relation to body weight and length. *Pakistan J. Zool.* 24(01): 47-51.
- Alvarado, H. (1998). Plan de ordenamiento pesquero del embalse de Betania. Instituto Nacional de Pesca y Acuicultura. Informe Técnico. INPA. Bogotá. Colombia.
- Alvarado, H., y Gutiérrez, F. (2002). *Especies hidrobiológicas continentales introducidas trasplantadas y su distribución en Colombia*. Ministerio del Medio Ambiente/Convención RAMSAR/CVC/ CVS. Bogotá. Colombia. Unión Gráfica Ltda.
- Avella, M., Berhaut, J., y Bornancin, M. (1993). Salinity of two tropical fishes: *Oreochromis aureus* and *Oreochromis niloticus*. Biochemical and morphological changes in the gill epithelium. *Journal of Fish Biology* 42: 243-254.
- Ávila, J., y Guillot, N. (1991). Cultivo intensivo experimental de *Sarotherodon niloticus*, en jaulas flotantes. Trabajo de grado. Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano. Facultad de Biología Marina. Cartagena. Colombia.

- Babiker, M., y Ibrahim, H. (1979). Studies on the biology of the reproduction in the cichlid *Tilapia nilotica* (L). Gonadal maturation and fecundity. *Journal of Fish Biology* 14: 437-448.
- Bankole, N., O. (1988). Feeding habits of selected fish species from Tiga Lake, Kano State, Nigeria. *Annua. Rep. Natl. Inst. Freshwat. Fish. Res. Nigeria*. 1988-1989: 23-27.
- Barliwa, J., Chapman, C. A., Chapman, L. J., Cowx, I. G., Geheb, K., Kaufman, L., Lowemconell, R. H., Seehausen, O., Wanik, J. H., Welcomme, R. L., y Witte, F. (2003). Biodiversity and fishery sustainability in the lake Victoria basin: An unexpected marriage? *BioScience* 53 (8): 703-15.
- Bocci, M. (1999). Modeling the growth of the Nile tilapia (*Oreochromis niloticus*) feeding on natural resources in enclosures in laguna de Bay (Philippines). Elsevier. *Ecological Modeling* 119: 135-148.
- CABI (2012). *Cyprinus carpio*. En: *Invasive Species Compendium*. Wallingford, UK: CAB International. Disponible en: www.cabi.org/isc.
- Campos, A., McAndrew, B. J., Cowanel, K., y Bromage, N. (2004). Reproductive response of Nile tilapia (*Oreochromis niloticus*) to photoperiodic manipulation; effects on spawning periodicity, fecundity and egg size. *Aquaculture* 231(1): 299-314.
- Castillo, L. (2001). Introducción y cultivo de la tilapia en Colombia. Programa Nacional de Ciencia y Tecnología en acuicultura. Memorias IV reunión. Colciencias. Bogotá. Colombia.
- Chandrasoma, J. (1986). Trends in reservoir in Sri Lanka with special reference to *Etroplus suratensis*, *Tilapia rendalli* and *Oreochromis niloticus*. In: The first Asian Fisheries Forum. Proceedings of the first Asian Fisheries Forum. Manila, Philippines, 26-31 may 1986. McLean, J. L., Dizon, L. B., y Hosillos, L. V. (eds.): 353-356.
- Chapman, G., y Fernando, C. (1994). The diets and related aspects of feeding of Nile tilapia (*Oreochromis niloticus* L.) and common carp (*Cyprinus carpio*) in lowland rice fields in northeast Thailand. Elsevier. *Aquaculture* 123: 281-307.
- Chervinski, J. (1982). Environmental physiology of tilapias, pp. 119-129. In: Pullin, R.S.V., y Lowe-McConnell, R. H. (eds.), 1982.

The biology and culture of tilapias proceeding of the international conference on the biology and culture of tilapias. International Center for Living Aquatic Resources Management, Manila (Philippines). ICLARM /CONF/PROC, N.º 7.

Costa-Pierce, B., A. (2003). Rapid evolution of an established feral tilapia (*Oreochromis* spp): The need to incorporate invasion science into regulatory structures. *Biological Invasions* 5 (1-2): 53-69.

C.V.S y FONADE (2004). *Diagnóstico ambiental de la cuenca hidrográfica del río Sinú*. Corporación Autónoma Regional de los Valles del Río Sinú y San Jorge / Fondo Nacional de Proyectos de Desarrollo. Montería. Colombia.

C.V.S y Fundación Ambiental del Caribe (2013). Fase I del plan de manejo de la ciénaga de Betancí, municipio de Montería, departamento de Córdoba. Montería.

Dahl, G. (1958). *Los peces del río Sinú. Informe preliminar*. Publicación de la Secretaría de Agricultura y Ganadería de Córdoba. Imprenta Departamental. Montería. Colombia.

Dahl, G., y Medem, F. (1964). *Informe sobre la fauna acuática del Río Sinú*. Corporación Autónoma Regional de los Valles del Magdalena y del Sinú. Departamento de Investigaciones Ictiológicas y Faunísticas. Córdoba.

Dahl, G., Medem, F., y Ramos, A. (1965). *El bocachico, contribución al estudio de su biología y de su ambiente*. Bogotá: CVM.

Eccles, D. H. (1992). *Species identification sheets for fishery purposes: field guide to the freshwater fishes of Tanzania*. FAO. Food and Agriculture Organization of the United Nations (FAO), Rome, Italy.

El-Zarka, S., Shaheem, A. H., y Alleem, A. (1970a). Tilapia fisheries in Lake Mariut. Age and growth of *Tilapia nilotica* in the lake. *Bull. Inst. Ocean. Fish. Cairo* 1: 149-182.

El-Zarka, S., Shaheem, A. H., y Alleem, A. (1970b). Reproduction of *Tilapia nilotica* (L.) in the lake. *Bull. Inst. Ocean. Fish. Cairo* 1: 183-192.

FAO (1999). Biología de *Tilapia nilotica*. Disponible en:
<http://www.fao.org/docrep/t8655f/t8655f03.htm>.

- FAO (2007). *Pesca y Acuicultura*. Organización de las Naciones Unidas para la Alimentación y la Agricultura. Hojas de especies: *Oreochromis niloticus* (Linnaeus, 1758).
- Fargione. J., Stuart. F. C., Gretchen. C. D., Dirzo. R., Galetti. M., Gammill. B., Harwell. D., Kitzberger. T. y Lauerence. W. F. (2004). *Millennium ecosystem assessment. Conditions and trends assessment*. Chapter 12: Biodiversity regulation of ecosystem services. UNEP-WCMC. U.K.
- Font, W. F. (2003). The global spread of parasites: What do Hawaiian streams tell us? *BioScience* 53(11): 1061-7.
- Fryer, G., y Iles, R., D. (1972). *The Cichlids Fishes of the Great Lakes of Africa: their Biology and Evolution*. New Yersey: J. F. H. Publishers.
- Garibaldi, L. y Bartley. D.M. (1998). The database on introductions of acuatic species (DIAS). *FAO Acuaculture Newsletter-FAN*. Rome. Italy. N.º 20.
- Getabu, A. (1987). Aspects of the Lake Victoria fisheries with emphasis on *Oreochromis niloticus*, and *Alestin sadleri*, from de Nyanza Gulf. FAO. Fish. Rep. 389: 416-431.
- Getachew, T., y Fernando, C., H. (1989). The food habits of an herbivorous fish (*Oreochromis niloticus*) in Lake Awasa, Ethiopia. *Hidrobiologia* 174 (3): 195-200.
- Giraldo, M. (1989). Especies hidrobiológicas introducidas con destino a la acuicultura en el departamento de Córdoba. Taller sobre Introducción de Especies Hidrobiológicas a la Acuicultura.INDERENA. Bogotá. Colombia.
- Global Invasive Species Database (2012). *Oreochromis mossambicus*. Disponible en: <http://www.issg.org/database/species/>.
- Gutiérrez, F. (1999). Las pesquerías de la Cuenca del río Sinú y el Proyecto Urrá I. Ministerio del Medio Ambiente. Bogotá, Colombia.
- Gutiérrez, F. (2001). *La introducción de especies como fenómeno global, y las especies hidrobiológicas continentales introducidas y/o trasplantadas en Colombia*. Ministerio del Medio Ambiente. Bogotá. Colombia. Unión Gráfica Ltda.

- Gutiérrez, F. (2005). Distribución de las especies hidrobiológicas y/o traslocadas en Colombia. Caso de estudio: biología y ecología de *Oreochromis niloticus* [L, 1758] en la cuenca hidrográfica del río Sinú. Tesis doctoral. Departament de Biologia Animal [vertebrats]. Facultat de Biologia. Universitat de Barcelona. Catalunya [España].
- Gutiérrez-Bonilla, F., de P. y Álvarez-León, R. (2011). Los cíclidos (*Pisces: cichlidae*) en Colombia: introducciones, trasplantes y repoblaciones. *Rev. Universidad de Caldas* 32:154-177.
- Gutiérrez, F. de P., Lasso, C., Baptiste, M., Sánchez-Duarte, P., y Díaz, A. M. (2012). *Catálogo de la Biodiversidad acuática exótica trasplantada en Colombia: moluscos, crustáceos, peces, anfibios, reptiles y aves*. Serie Recursos Hidrobiológicos y Pesqueros Continentales de Colombia. Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano, Instituto de Investigación de Recursos Biológicos “Alexander von Humboldt”. Bogotá, D.C. Unión Gráfica Ltda.
- Hernández-Camacho, J., y Acero, A. (1971). Apuntes sobre la carpa (*Cyprinus carpio*) frente al desarrollo de la piscicultura en Colombia. INDERENA. Colombia. INDERENA-Universidad de Caldas. Primer seminario sobre piscicultura en Colombia. Manizales. Colombia.
- Ibarra, K. P., Gómez, M.C., Vilorio, E. A., Arteaga, E., Cuadrado, I., Martínez, M., Nieto, M., Rodríguez, J. A., Licero, L.V., Perdomo, L.V., Chávez, S., Romero, J. A., y Rueda, M. (2014). *Monitoreo de las condiciones ambientales y los cambios estructurales y funcionales de las comunidades vegetales y de los recursos pesqueros durante la rehabilitación de la Ciénaga Grande de Santa Marta*. INVEMAR. Informe Técnico Final. Santa Marta.
- INDERENA y Universidad de Caldas (1971). Primer seminario sobre piscicultura en Colombia. Manizales.
- Infante, A. G. (1988). *El plancton de las aguas continentales*. Organización de los Estados Americanos. OEA. Washington.
- Informe nacional sobre el estado de la biodiversidad en Colombia. 2006. Causas de pérdida de biodiversidad*. Tomo I. Instituto de Investigación de Recursos Biológicos Alexander von Humboldt. Bogotá. Colombia. Arfos Editores e Impresores Ltda.

- INVEMAR (2002). Monitoreo de las condiciones ambientales y los cambios estructurales y funcionales de las comunidades vegetales y de los recursos pesqueros durante la rehabilitación de la C.G.S.M.: un enfoque adaptativo. Instituto de Investigaciones Marinas y Costeras «José Benito Vives de Andrés». Inf. Tec. Final 1999-2002. Santa Marta. Colombia.
- Jiménez-Segura, L. E., Álvarez-León, R., Gutiérrez, F. de P., Hernández, S., Valderrama, y Villa, M. (2012). La pesca y los recursos pesqueros en los embalses colombianos, pp. 233-282. En: II. *Pesquerías continentales de Colombia: cuencas del Magdalena, Cauca, Sinú, Canalete, Atrato, Orinoco, Amazonas y Vertiente del Pacífico*. Serie Editorial Recursos Hidrobiológicos y Pesqueros Continentales de Colombia. Instituto de Investigación de los Recursos Biológicos Alexander von Humboldt –IAvH–. Bogotá, D. C.
- Kestemont, P., Micha. J. C. y Falter. U. (1989). *Les méthodes de production d'alevines de Tilapia Nilotica*. Organisation des Nations Unies Pour L'alimentation et l'agriculture. Project Reports. ADCP/REP/89/46. Rome, Italy.
- Kone, T., Gourene, G., Teugles, G. y Thys-Van-Den, A. (1998). *Information on the reproduction biology of an estuarian Tilapia in a West African dam (Ayame, Ivory Coast): Sarotherodon melanotheron melanotheron* (Ruppell, 1852). International Conference for the Paradi Association and the Fisheries Society of Africa, Grahamstown (South Africa), 13-18 Sep.
- Lagler, K., Bardarch, J., Miller. R. y May-Passino, D. (1984). *Ictiología*. AGT editor, S.A. Primera edición. México.
- Lasso, C., Agudelo-Córdoba, E., Jiménez-Segura, L. F., Ramírez-Gil, H., Morales-Betancourt, M., Ajiaco-Martínez, R. E., Gutiérrez, F. de P., Usma-Oviedo, S., Muñoz-Torres, S. E., y Sanabria-Ochoa, A., I. (eds.) (2012). I. *Catálogo de los recursos pesqueros continentales de Colombia*. Serie Editorial Recursos Hidrobiológicos y Pesqueros Continentales de Colombia. Colombia. Instituto de Investigación de los Recursos Biológicos Alexander von Humboldt [IAvH]. Bogotá, D. C. Unión Gráfica Ltda.

- Latif, A. F. A. y Rashid, M. M. (1972). Studies on *Tilapia nilotica* from Lake Nasser. (1) Macroscopic characters of gonads. *Bull. Inst. Ocean. Fish. Cairo* 2: 215-238.
- Lowe-McConnell, R., H. (1982). Tilapias in fish communities. In: *The Biology and Culture of Tilapias* Pullin. R. S. V. y Lowe-McConnell, R.H. (eds.), pp. 83-113. Manila: International Centre for Living Aquatic Resources Management.
- Margalef, R. (1995). *Ecología*. Barcelona: Ediciones Omega, S.A.
- Martínez, R., y Martínez., N. (1997). *Diseño de experimentos, análisis de datos estándar y no estándar*. Fondo Nacional Universitario. Universidad Nacional de Colombia. pp.163-184.
- Mattson, N. y Kaunda, E. (1997). Population dynamics of *Oreochromis shiranus* in two small water bodies in Malawi. *Journal of Fish Biology* 50: 592-607.
- Narváez-Barandica, J. C., Acero-Pizarro. A. y Blanco-Racedo. J. (2005). Variación morfométrica en poblaciones naturalizadas y domesticadas de la tilapia del Nilo, *Oreochromis niloticus* (Teleostei: Cichlidae) en el norte de Colombia. *Revista Academia Colombiana de Ciencias Exactas* 29 (112): 383-394.
- Narváez-Barandica, J. C. (2006). Evaluación de la estructura genética y morfométrica de las poblaciones de tilapia (*Pisces: Cichlidae: Oreochromis*) en algunas ciénagas del norte de Colombia. Tesis M.Sc. Fac. de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.
- Needham, J., y Needham, P. (1978). *Guía para el estudio de seres vivos de aguas dulces*. Barcelona: Ed. Reverté.
- Noakes, D., y Balon, E. (1982). Life history of Tilapias: In: Pullin, R.S.V., y Lowe-McConnell, R. H. *The biology and culture of tilapias proceeding of the international conference on the biology and culture of tilapias*. International Center for Living Aquatic Resources Management, Manila (Philippines). ICLARM /CONF/ PROC, N.º 7.
- Ogutu-Ohwayo, R. (1987). Contribution of the introduced fish species especially *Lates niloticus* (L.) and *Oreochromis niloticus* (L.) to the fisheries of Lakes Victoria and Kyoga. Uganda freshwater Fish. Res. Organ., Jinja, Uganda.

- Ojasti, J. (2001). *Especies exóticas invasoras. Estrategia regional de biodiversidad para los Países del Trópico Andino*. Convenio de Cooperación Técnica ATN/JF-5887-RG CANBID. Venezuela.
- Olaya-Nieto, Ch., Segura-Guevara, F., Tordecilla-Petro, G. y Appeldoorn, R. (2007). *Estimación de los parámetros biológicos de peces comerciales del río Sinú –II fase*. Universidad de Córdoba. Facultad de Medicina Veterinaria y Zootecnia. Departamento de Ciencias Acuícolas. Programa de Acuicultura. Laboratorio de Investigaciones Biológico Pesqueras - LIB. Lorica, Córdoba.
- Otero, R. (1989). *Introducción de especies exóticas en el departamento de Córdoba. Taller sobre Introducción de Especies Hidrobiológicas a la Acuicultura*. INDERENA. Bogotá. Colombia. pp. 63-66.
- Parra, O., González, M., y De La Rosa, V. (1982). *Manual taxonómico del fitoplancton de aguas continentales*. 5 Tomos. Universidad de la Concepción. Chile.
- Paugy, D., Lèveque, C., y Teugels, G. (eds) (2004). *Poissons d'eaux douces et saumâtres de l'Afrique de l'Ouest*. Paris: IRD Editions, Publications scientifiques du Museum, MARC.
- Pauly, D., y Gayanillo, J. R. (1996). Estimating the parameter of length-weight relationships from length-frequency samples and bulk weights In: D. Pauly y Martosubroto, (eds) *Baseline studies of biodiversity: the fishes resources of western Indonesia*. ICLARM Stud. Rev. 23.
- Philippart, J. C. L., y Ruwet, J. (1984). Ecology and distribution of tilapias. In: Pullin. R.S.V., y Lowe-McConnell. R.H. (eds) *The biology and culture of tilapias*. ICLARM. Conference Proceedings. International Center for Living Aquatic Resources Management. Manila, Philippines.
- Prejs, A., y Colomine, G. (1981). *Método para el estudio de los alimentos y las relaciones tróficas de los peces*. Universidad Central de Venezuela y Universidad de Varsovia, Polonia.
- Quddus, M. A., y Dewan, S. (1988). Studies on monthly growth, length-weight relationship and condition factor of *Oreochromis niloticus* (Linnaeus). Bangladesh. *Fish II*(01): 13-18.

- Restrepo, D. (2002). Determinación de algunos aspectos biológicos del bocachico (*Prochilodus magdalenae*. Steindachner 1878. *Curimatidae, Characiformes*), en la zona media y baja de la cuenca del río Sinú –Córdoba–. Colombia. Tesis de grado. Pontificia Universidad Javeriana. Facultad de Ciencias Biológicas. Bogotá, D.C. Colombia.
- Rodríguez, M. (1992). *Técnicas de evaluación cuantitativa de la madurez gonádica en peces*. México: A.G.T. Editor S.A.
- SEPEC (2014). *Sistema estadístico*. Autoridad Nacional de Pesca y Acuicultura-AUNAP. Universidad del Magdalena. Santa Marta.
- Stewart, K. M. (1988). Changes in condition and maturation of the *Oreochromis niloticus* (L.) population of Ferguson's Gulf, Lake Turkana, Kenya. *Journal of Fish Biology* 33: 81-188.
- Streble, H., y Krauter, D. (1985). *Atlas de los microorganismos de agua dulce. La vida en una gota de agua*. Barcelona: Ediciones Omega, S.A.
- Tadesee, Z. (1999). The nutritional status and digestibility of *Oreochromis niloticus* (L). Diet in lake Lageno Ethiopia. *Hydrobiologia* 416: 97-106.
- Tadesse, Z. (1988a). Studies on some aspects of the biology of *Oreochromis niloticus* L. (*Pisces. Cichlidae*) in Lake Ziway, Ethiopia. M.Sc. thesis. School of Graduate Studies, Addis Ababa University, Addis Ababa.
- Tadesse, Z. (1997). Breeding season, Fecundity, Length-weight relationship and Condition factor of *Oreochromis niloticus* (L.) (*Pisces: Cichlidae*) in Lake Tana, Ethiopia. SINET: *Ethiop. J. Sci.* 20 (1):31-47.
- Tadesse, Z. (1998b). Food and Feeding Ecology of Tilapia, *Oreochromis niloticus* (L.) and effects of diet on the lipid quality of fish in some Lakes in Ethiopia. Ph.D. dissertation, School of Graduate studies, Addis Ababa University.
- Tadesse, Z. (1999). The nutritional status and digestibility of *Oreochromis niloticus* (L.) diet in Lake Langeno, Ethiopia. *Hydrobiologia* 416: 976-106.

- Teferi, Y. (1997). The condition factor, feeding and reproductive biology of *Oreochromis loticus* (L.) (Pisces: Cichlidae) in Lake Chamo, Ethiopia. M.Sc. thesis. School of Graduate Studies, Addis Ababa University.
- Trewavas, E. (1982). Tilapias: Taxonomy and speciation. In: Pullin, R.S.V., and Lowe-McConnell, R. H. (eds), 1982. *The biology and culture of tilapias proceeding of the international conference on the biology and culture of tilapias*. International Center for Living Aquatic Resources Management, Manila, (Philippines). ICLARM /CONF/PROC, N°. 7
- Trewavas, E. (1983). Tilapine fishes of the genera *Sarotherodon*, *Oreochromis* and *Danakilia*. British Mus. Nat. Hist., London (UK).
- Tudorancea, C., Fernando, C. H., y Paggi, J. C. (1988). Food and feeding ecology of *Oreochromis niloticus* (Linnaeus, 1758) young in Lake Awassa (Etiopia). Arch- *Hydrobiologia* 79: 267-289.
- Urrá (1996). Análisis de los posibles efectos de la desviación del Río Sinú sobre la migración de los peces reofilicos. Montería. Colombia.
- Valderrama, M., y Ruiz, O. (1998). Informe final monitoreo pesquero del Medio y Bajo Sinú. Evaluación de la captura y esfuerzo y determinación de información biológica pesquera de las principales especies ícticas en las áreas de Lorica, Betancí y Tierralta. Convenio INPA/URRÁ S.A. E.S.P. Montería. Colombia.
- Valderrama, M., Vejarano, S., Solano, D. Álvarez, L., Núñez, C., Jarava, E., y Pescadores del Sinú (2001). Monitoreo y estadística pesquera de la Cuenca del río Sinú con participación comunitaria. Informe final año 2000. Convenio INPA/URRÁ S.A. Montería. Colombia.
- Vazzoler, A. (1996). *Biología da reprodução de peixes teleósteos: Teoría e prática*. Brasil: Ed. Nupelia.
- Villegas, C. (1990). Evaluation of the salinity tolerance of *Oreochromis mossambicus*, *O. niloticus* and their F₁ hybrids. *Aquaculture* 85: 281-292.

5

Modelos estocásticos en dinámica de poblaciones: introducción y comparación con los modelos determinísticos

Javier Riascos Ochoa

5.1 Introducción

El objetivo de este capítulo es introducir al lector en la teoría de los procesos estocásticos, con énfasis en los procesos conocidos como Cadenas de Markov de Tiempo Continuo (CMTC) e ilustrar su aplicación a problemas de dinámica de poblaciones. El formalismo por CMTC permite modelar la naturaleza discreta de las variables de estado, es decir, del número de individuos, y la aleatoriedad inherente al fenómeno. Además facilita la definición y cálculo de cantidades de interés en dinámica de poblaciones como la probabilidad de que la población haya alcanzado un valor particular al cabo de un tiempo $t \geq 0$, o el valor esperado del número de individuos y del tiempo de extinción de la población. Así mismo, permite simular diferentes trayectorias estocásticas que muestran la evolución del número de individuos en el tiempo. Los ejemplos demuestran las diferencias y similitudes entre la aproximación estocástica con la aproximación tradicional determinística basada en ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO).

El capítulo está dividido de la siguiente forma. La sección 2 presenta una introducción a los procesos estocásticos, su clasificación y la definición de cantidades básicas para su descripción probabilística

como la función de distribución, la función de densidad y el valor esperado de la variable aleatoria $X(t)$. Los procesos conocidos como Cadenas de Markov de Tiempo Continuo se profundizan en la sección 2.1; se explica la propiedad markoviana y se presenta la clasificación de sus estados, la ecuación diferencial para la matriz de probabilidades de transición y su método de solución. La sección 3 muestra tres ejemplos en dinámica de poblaciones modelados a partir del formalismo determinístico por EDO y hace un análisis de sus puntos de equilibrio. La sección 4 introduce una clase especial de CMTC conocida como procesos de nacimiento y muerte. La formulación estocástica de los tres ejemplos de la sección 3 y su solución permiten mostrar las similitudes, diferencias y ventajas de la aproximación por CMTC. Finalmente se presentan las conclusiones.

5.2 Breve introducción a los procesos estocásticos

Siguiendo a Ross (1996), un proceso estocástico $\{X(t), t \in T\}$ es una colección de variables aleatorias (v.a's) $X(t)$. La variable determinística t , que toma valores en un conjunto de índices T se puede interpretar como el tiempo y $X(t)$ como el estado del proceso estocástico en el tiempo t . El espacio de estados S se refiere al conjunto de valores que $X(t)$ puede tomar para todo $t \in T$.

Dependiendo del tipo de conjuntos S y T se pueden identificar, en general, cuatro clases de procesos estocásticos:

Procesos de tiempo discreto y espacio de estados discreto: en otras palabras, S y T son conjuntos contables (finitos o infinitos). Por ejemplo, un modelo simplificado del clima a una hora particular cada día puede describirse como un proceso estocástico que tenga como espacio de estados $S = \{\text{Soleado}, \text{Nublado}, \text{Lluvioso}\}$ y un conjunto de índices dado por el conjunto de días, es decir, $T = \{1, 2, 3, \dots\}$. Cada elemento del espacio de estados se puede identificar con un número natural, así el estado *Soleado* corresponde a 1, *Nublado* a 2 y *Lluvioso* a 3. En este caso, $S = \{1, 2, 3\}$ es un subconjunto de los números naturales $\mathbb{N}$. Otro ejemplo

es el valor del lanzamiento de un dado de 6 caras en un experimento de N lanzamientos; en este caso el espacio de estados es el conjunto $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y el conjunto de índices es $T = \{1, 2, 3, \dots, N\}$. Las Cadenas de Markov de Tiempo Discreto (CMTD) son otro caso especial de este tipo de procesos.

Procesos de tiempo continuo y espacio de estados discreto: el espacio de estados S es contable y el conjunto T es no contable y continuo. Usualmente se toma el intervalo positivo de los números reales, incluyendo el elemento 0, es decir, $T = [0, \infty)$. Un ejemplo es el número de pasajeros $X(t)$ en cada instante $t \geq 0$ en un bus de servicio público con capacidad de M pasajeros a partir de un instante de partida $t = 0$. En este caso el espacio de estados es $S = \{1, 2, 3, \dots, M\}$ y el conjunto de índices $T = [0, \infty)$. Una clase especial de este tipo de procesos son las Cadenas de Markov de Tiempo Continuo (CMTC), las cuales se explican en la sección 2.1 y se aplican al problema de dinámica de poblaciones en la sección 3.

Procesos de tiempo discreto y espacio de estados continuo: un ejemplo es el valor del dólar en pesos colombianos al finalizar cada día; en este caso, $S = [0, \infty)$ y $T = \{1, 2, \dots\}$ es el conjunto de días.

Procesos de tiempo continuo y espacio de estados continuo: estos procesos usualmente están relacionados con fenómenos físicos en los cuales la variable de estado $X(t)$ varía continuamente con el tiempo t que también es continuo. Un ejemplo es la temperatura $X(t)$ de algún objeto en cada instante $t \geq 0$. El espacio de estados es $S = [-273^\circ\text{C}, \infty)$. Una clase especial de este tipo de procesos estocástico es el movimiento browniano y el ruido blanco (Jacobs, 2010).

En los ejemplos anteriores las variables aleatorias $X(t)$ son reales, en el sentido de que toman valores en el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. Es de interés conocer la función de distribución de probabilidad $F_{X(t)}(x)$ de la v.a. $X(t)$, para cada $t \in T$. Esta función viene dada por la probabilidad de que $X(t)$ sea menor o igual que x al tiempo t , es decir (Blanco Castañeda, 2010):

$$F_{X(t)}(x) = P(X(t) \leq x). \quad (1)$$

Otra cantidad de interés es la función de densidad $f_{X(t)}(x)$. Para un proceso estocástico con espacio de estados discreto dado por $S = \{x_1, x_2, \dots\}$, con $x_1, x_2, \dots$ todos diferentes, la función de densidad viene dada por:

$$f_{X(t)}(x) = \begin{cases} P(X(t) = x_i) \\ 0 \end{cases} \quad \text{si} \quad \begin{matrix} x = x_1, x_2, \dots \\ \text{en otro caso,} \end{matrix} \quad (2)$$

y para un proceso con espacio de estados S continuo la función de densidad $f_{X(t)}(x)$ es aquella que satisface:

$$F_{X(t)}(x) = \int_{-\infty}^x f_{X(t)}(x) dx, \quad (3)$$

para todo $x \in S$ y $t \in T$.

Una trayectoria $\{x(t), t \in T\}$ del proceso estocástico $\{X(t), t \in T\}$ representa una realización del proceso en el tiempo, y se puede representar como la sucesión de las realizaciones de las variables aleatorias $X(t)$ para cada $t \in T$, o como una curva en el plano x vs T . Por ejemplo, una trayectoria para el proceso del lanzamiento del dado con un total de 4 lanzamientos es $\{x_1(t), t \in T\} = \{4, 5, 2, 1\}$ o $\{x_2(t), t \in T\} = \{6, 3, 1, 6\}$. En muchos casos también interesa conocer el valor esperado $E[X(t)]$ de la variable aleatoria $X(t)$ para cada $t \in T$. Esta cantidad representa la tendencia promedio del proceso a lo largo del tiempo y viene dada por:

$$E[X(t)] = \sum_{i \geq 1} x_i P(X(t) = x_i) \quad \text{ó} \quad E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X(t)}(x) dx, \quad (4)$$

para procesos de estado discreto o continuo, respectivamente.

5.2.1 Cadenas de Markov de tiempo continuo (CMTC)

5.2.1.1 Definición y representación

Estos son procesos de estado discreto y tiempo continuo que cumplen la propiedad markoviana, es decir, que la distribución de probabilidad del proceso al tiempo $t + h$ dado el estado presente $X(t)$ y los estados pasados $X(s)$ para todo $t, h \geq 0$ y $0 \leq s < t$, solo depende del estado presente y es independiente de los estados previos. Si el espacio de estados es $S = \{1, 2, 3, \dots, N\}$ esta propiedad se traduce en:

$$P(X(t+h) = j \mid X(t) = i, X(s) = x(s), 0 \leq s < t) = P(X(t+h) = j \mid X(t) = i), \quad (5)$$

Donde $i, j \in S$ y $x(s)$ es una función determinística del tiempo. La notación $P(A|B)$ indica la probabilidad (condicional) de que ocurra el evento A dado que ha ocurrido el evento B .

Se puede demostrar que para una CMTC, la v.a. del tiempo de permanencia τ_i en cualquier estado $i \in S$ está distribuida exponencialmente. Esto es así debido a que la distribución exponencial es la única que cumple la propiedad de no-memoria, es decir, que la probabilidad de que el proceso permanezca en el estado i entre los tiempos $[t, t+h]$ dado que ha permanecido al menos t unidades de tiempo, es la misma probabilidad de que permanezca al menos entre los tiempos $[0, h]$ (Ross, 1996).

Al ser una v.a. exponencial, el tiempo de permanencia τ_i tiene asociada una tasa $\mathcal{G}_i$, cuyo inverso $1/\mathcal{G}_i$ representa el tiempo medio de permanencia en el estado i , es decir, $E[\tau_i] = 1/\mathcal{G}_i$ (Blanco Castañeda, 2010). Además, debido a la propiedad markoviana, para todo $t > 0$ el proceso tiene una probabilidad P_{ij} de realizar una transición desde el estado i al estado j , la cual es independiente del tiempo de permanencia τ_i (por ser exponencial) y del tiempo transcurrido t . Esta última propiedad indica que la cadena de Markov tiene probabilidades de transición estacionarias u homogéneas. Nótese que $\sum_{i \neq j} P_{ij} = 1$ para todo $i \in S$. Así, una CMTC se puede caracterizar por las tasas de transición $\mathcal{G}_i$ y las probabilidades P_{ij} y se puede visualizar como se muestra en la Figura 1(a).

Hay otra forma de interpretar las transiciones en una CMTC. Cada transición de un estado i a algún estado $j \neq i$ asociada a la ocurrencia de un evento $E(i, j)$ que ocurre en un tiempo τ_{ij} desde que la cadena entra al estado i y que está distribuido exponencialmente con tasa

$$q_{ij} = \vartheta_i P_{ij}. \quad (6)$$

Los eventos $E(i, j)$ son independientes entre sí para todo j . La transición desde un estado i hacia un estado particular k se debe a que el evento $E(i, k)$ ocurrió antes que cualquier otro evento $E(i, j)$, $j \neq k$. Esto implica que el tiempo de transición τ_i desde el estado i está dado por:

$$\tau_i = \min_{j \neq i} \{\tau_{ij}\} \quad (7)$$

Se puede demostrar que la distribución del mínimo de v.a's exponenciales es también exponencial, con tasa dada por la suma de las tasas. De esta forma, la tasa de la v.a. exponencial τ_i es la correcta: $\vartheta_i \sum_{j \neq i} q_{ij} = \sum_{j \neq i} \vartheta_i P_{ij}$. Entonces, una CMTC también se puede caracterizar por las tasas de transición q_{ij} , como se muestra en la Figura 1(b).

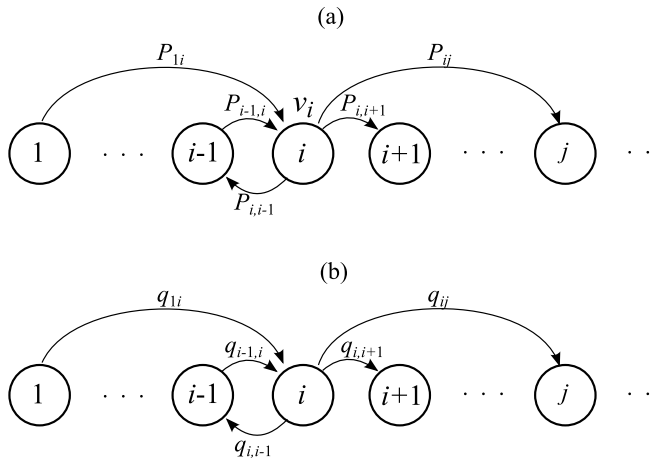


Figura 1. Dos representaciones de Cadenas de Markov en Tiempo Continuo: (a) a partir de las tasas de transición v_i desde cada estado $i \in S$ y probabilidades de transición P_{ij} desde i hacia j y (b) a partir de las tasas q_{ij} desde i hacia j , para todo $i, j \in S$.

5.2.1.2 Clasificación de estados: transitorios, recurrentes y absorbentes

Un estado i de una CMTC es transitorio si al estar en el estado i la probabilidad de reingreso f_i a ese estado, en algún $t > 0$, es menor que 1, y es recurrente si esta probabilidad es igual a 1. En otras palabras, un estado transitorio eventualmente no será visitado nunca más, ya que la probabilidad de que reingrese n veces es f_i^n , probabilidad que tiende a 0 para $n \rightarrow \infty$. En cambio, un estado recurrente será visitado infinitas veces en el futuro, ya que la probabilidad de n reingresos es igual a $1(f_i^n=1)$, incluso para $n \rightarrow \infty$. Si un estado transitorio i está comunicado con otro estado j , en el sentido de que partiendo de i se puede llegar a j y viceversa, el estado j es también transitorio. Si el estado i es recurrente, el estado j que se comunica con i también es recurrente. Una clase especial de estado recurrente es un estado absorbente. Si i es absorbente, entonces la tasa exponencial de salida es $\mathcal{G}_i=0$. La figura 2 muestra un ejemplo de una CMTC con los tres tipos de estados.

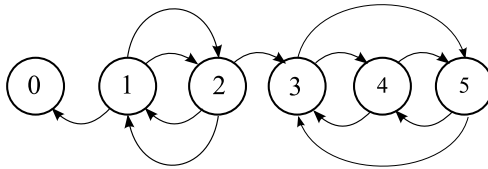


Figura 2. Clases de estados en una CMTC. El estado 0 es un estado absorbente, ya que no tiene tasa de salida; los estados 1 y 2 son transitorios y los estados 3, 4 y 5 son recurrentes. Esto se cumple siempre y cuando las tasas representadas por las flechas de transición no sean nulas.

5.2.1.3 Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov

Una cantidad importante es la probabilidad $P_{ij}(t)$ de que el sistema estando en el estado i se encuentre en el estado j , t unidades de tiempo después. Se puede demostrar que esta cantidad satisface la siguiente ecuación diferencial, conocida como la ecuación de Chapman-Kolmogorov hacia adelante:

$$\mathbb{P}'(t) = \mathbb{Q}\mathbb{P}(t) \quad (8)$$

donde $\mathbb{P}(t)$ es la matriz de elementos $P_{ij}(t)$, con $i, j \in S$, y $\mathbb{Q}$ es la matriz de transición, cuyos elementos se definen como:

$$Q_{ij} = \begin{cases} -\vartheta_i & \text{si } j = i \\ q_{ij} & \text{si } j \neq i. \end{cases} \quad (9)$$

También se satisface la ecuación de Chapman-Kolmogorov hacia atrás:

$$\mathbb{P}'(t) = \mathbb{P}(t)\mathbb{Q}, \quad (10)$$

Se puede demostrar que la solución de las anteriores ecuaciones está dada por:

$$\mathbb{P}(t) = e^{\mathbb{Q}t} \quad (11)$$

Donde $e^{(\cdot)}$ es la función exponencial matricial (Ross, 2007), la cual se puede evaluar utilizando la función `expm` en el software de computación científica MATLAB®.

5.2.1.4 Probabilidades límite

Para ciertas CMTC (las recurrentes positivas e irreducibles), las probabilidades de transición $P_{ij}(t)$ convergen a un valor π_i independiente del estado inicial i , cuando $t \rightarrow \infty$. Es decir:

$$\pi_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t). \quad (12)$$

Se puede demostrar que estas probabilidades límite satisfacen el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\pi\mathbb{Q} = 0, \quad \sum_{i=1}^N \pi_i = 1 \quad (13)$$

Donde $\pi = [\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N]$ es el vector (fila) de las probabilidades límite.

5.3 Modelos determinísticos en dinámica de poblaciones

En esta sección se muestran tres ejemplos de dinámica poblacional desde la aproximación determinística. Los modelos se desarrollan según la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO).

Supóngase para comenzar el modelo para una población. Se define el número de individuos $x(t)$ al tiempo t como una variable determinística y continua que toma valores en $[0, \infty)$, al igual que el tiempo t que toma valores en $[0, \infty)$. El modelo consiste en definir la tasa de variación $\frac{dx}{dt}$ de la población como una función determinística $F(x, t)$ que puede depender del tiempo t y del número de individuos x . Junto con la condición inicial dada por el número de individuos x al tiempo $t=0$, se tiene el problema de valor inicial (PVI) (Blanchard, 1999):

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t) \quad x(0) = x_0 \quad (14)$$

del cual se obtiene una única solución para $x(t)$ en función de t , bajo ciertas condiciones de regularidad para $F(x, t)$.

En el caso de N poblaciones diferentes, que pueden interactuar, se define el vector del número de individuos $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)]$ en cada población y el vector $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ de las tasas de variación $F_i(\mathbf{x}, t)$ de cada variable $x_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, N$). El PVI asociado es:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (15)$$

5.3.1 Ejemplo 1. Crecimiento exponencial

Supóngase el caso de una población en la que su tasa de variación $\frac{dx}{dt}$ al tiempo t es positiva y directamente proporcional al número de individuos $x(t)$ al tiempo t . Este modelo es una simplificación de la reproducción de bacterias u otros microorganismos, ya que se supone que hay acceso a recursos y espacio infinitos que no limitan el crecimiento. Si el número de individuos en $t=0$ es x_0 , entonces el PVI resultante es:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x, \quad x(0) = x_0, \quad (16)$$

donde λ se conoce como la tasa de crecimiento (nacimiento) por individuo y tiene unidades de $1/t$. Mediante el método de separación de variables (Blanchard, 1999) se puede demostrar que la solución a (16) es:

$$x(t) = x_0 e^{\lambda t}, \quad (17)$$

lo cual le confiere el nombre a este modelo de crecimiento poblacional. La figura 3 muestra la curva solución $x(t)$ vs. t para un valor de $\lambda=1$ en unidades de $(\text{minutos})^{-1}$ que se traduce en una tasa de 1 nacimiento por individuo por minuto y una población inicial $x_0=1$.

5.3.2 Ejemplo 2. Crecimiento logístico

El modelo de crecimiento exponencial es inadecuado para valores grandes de t , ya que la población $x(t)$ tiende a ∞ para $t \rightarrow \infty$ (ver la ecuación (17)), lo cual es imposible dada la limitación en recursos y espacio. En el modelo de crecimiento logístico se supone una cota o nivel máximo N para el número de individuos. La EDO que reproduce este comportamiento viene dada por (N. S. Goel y N. Richter-Dyn, 1974 - W. J. Meyer, 2004):

$$\frac{dx}{dt} = \lambda \left(1 - \frac{x}{N}\right) x \quad (18)$$

Esta ecuación se puede interpretar de dos formas. En primer lugar, se puede considerar que no hay muertes, solo nacimientos y que la tasa de nacimiento por individuo disminuye cuando x aumenta y depende del valor máximo N . Se requiere entonces que para valores de x cercanos a 0 la tasa sea igual a la tasa del crecimiento exponencial λ y cuando x se acerque a N la tasa sea igual a 0. Cambiando entonces λ por $\lambda(1 - \frac{x}{N})$ en [16] se obtiene la EDO (18).

La otra interpretación de (18) considera muertes además de nacimientos cuyo efecto es limitar la población máxima alcanzable. Considérese el caso general descrito por la ecuación (15) para un vector de número de individuos $\mathbf{x}(t)$ de N poblaciones, en el que se pueden identificar las tasas de nacimientos $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ y las tasas de muertes $\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)$ de cada una de las poblaciones. Estas tasas son no negativas, es decir, $B_i(\mathbf{x}, t) \geq 0$ y $D_i(\mathbf{x}, t) \geq 0$, para todo $i=1, \dots, N$. La EDO toma la forma:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{D}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (19)$$

Entonces, el modelo logístico (18) puede obtenerse definiendo la tasa de nacimiento como $B(x, t) = \lambda x + g(x)$ y la tasa de muerte como $D(x, t) = \lambda \frac{x^2}{N} + g(x)$ para cualquier función $g(x)$. En particular, la primera interpretación de solo nacimientos se obtiene tomando $g(x) = -\lambda \frac{x^2}{N}$.

Si la población en $t = 0$ es $x(0) = x_0$ la solución de la ecuación (18) viene dada por (Meyer, 2004):

$$x(t) = \frac{x_0 N}{x_0 + (N - x_0) e^{-\lambda t}} \quad (20)$$

La figura 3 muestra la solución (20) con parámetros $\lambda=1$ en unidades de (minutos)⁻¹ y $N = 100$ para el caso logístico. Se observa el comportamiento asintótico en el modelo logístico: $x(t)$ tiende al valor de población máxima N cuando t tiende a valores grandes, a diferencia del modelo exponencial que diverge hacia $+\infty$.

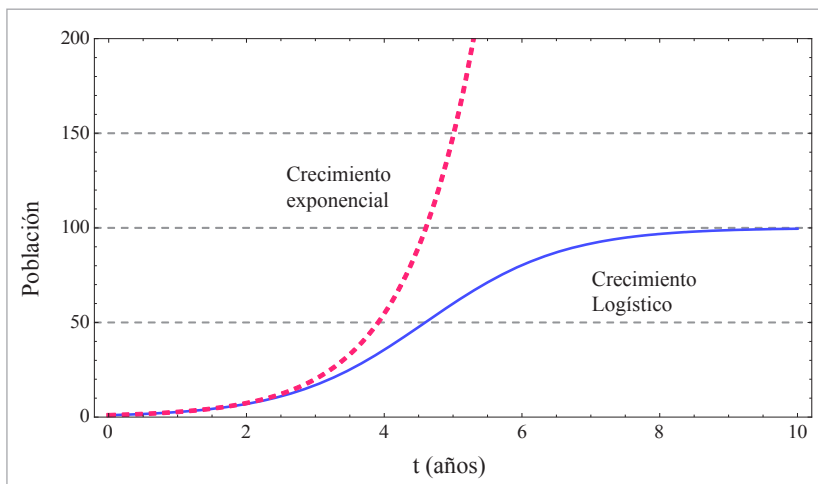


Figura 3. Soluciones del modelo determinístico de crecimiento exponencial y logístico.

5.3.3 Ejemplo 3. Nacimientos y muertes en una población de hombres y mujeres

Considérese una comunidad constituida por mujeres y hombres, con x el número de mujeres y y el número de hombres y con una población máxima o capacidad de carga (sumando mujeres y hombres) de N individuos. La tasa de nacimientos total $B(x,y,t)$ (sumando la tasa de nacimientos de hombres y mujeres) es proporcional al número de mujeres x , con un factor de proporcionalidad dependiente de N . Es decir, el crecimiento es de tipo logístico:

$$B(x,y,t) = \lambda x \left(1 - \frac{x+y}{N}\right) \quad (21)$$

Supóngase ahora que una fracción p de los nacimientos son mujeres, y una fracción $(1-p)$ son hombres, con $0 \leq p \leq 1$; entonces, las tasas de nacimiento de mujeres y hombres, respectivamente, son:

$$B_x(x,y,t) = \lambda p x \left(1 - \frac{x+y}{N}\right) \quad B_y(x,y,t) = \lambda (1-p) x \left(1 - \frac{x+y}{N}\right) \quad (22)$$

Las tasas de muerte de cada población son proporcionales al número de individuos en cada población:

$$D_x(x,y,t) = \theta x \quad D_y(x,y,t) = \phi y \quad (23)$$

Donde θ y ϕ son las tasas de mortalidad individual de la población femenina y masculina, respectivamente.

Entonces, el sistema de EDO para $x(t)$ y $y(t)$ es:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \lambda p x \left(1 - \frac{x+y}{N}\right) - \theta x \\ \frac{dy}{dt} &= \lambda (1-p) x \left(1 - \frac{x+y}{N}\right) - \phi y \end{aligned} \quad (24)$$

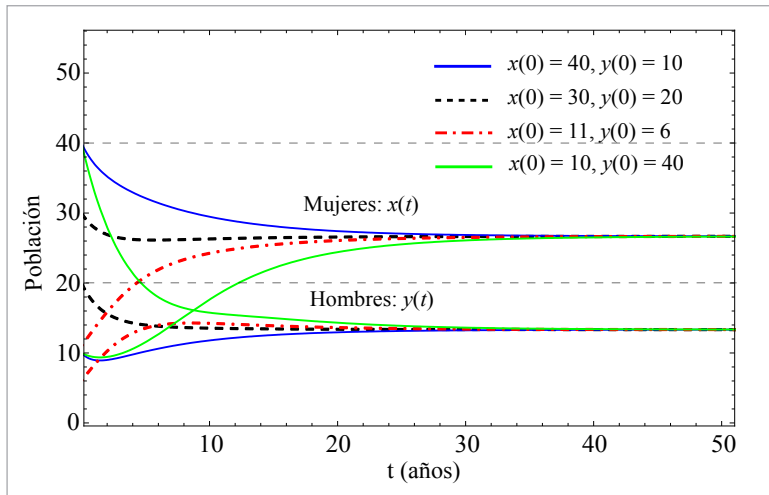


Figura 4. Curvas solución para el número de mujeres $x(t)$ y hombres $y(t)$ del modelo determinístico poblacional dado en (24) para diferentes condiciones iniciales $(x(0), y(0))$. Parámetros del modelo: máxima población $N = 50$, tasa de nacimientos $r = 1$, tasa de mortalidad individual femenina $\theta = 0.1$, tasa de mortalidad individual masculina $\phi = 0.2$ y fracción de nacimientos que son mujeres $p = 0.5$.

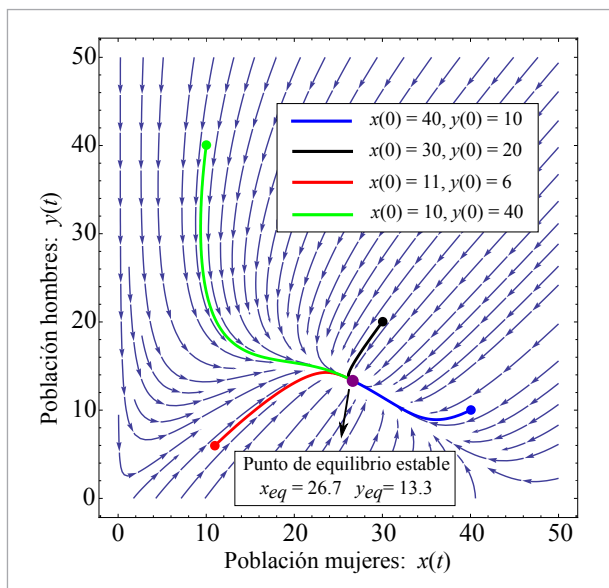


Figura 5. Espacio de fase del sistema de EDO (24) y las trayectorias solución con los parámetros y condiciones iniciales de la Figura 4.

La Figura 4 muestra algunas curvas solución $x(t)$ y $y(t)$ del anterior sistema con los siguientes valores de los parámetros: $N = 50$, $\lambda = 1$, $\theta = 0.1$, $\phi = 0.2$ y $p = 0.5$ y para diferentes condiciones iniciales $(x(0), y(0))$. La Figura 5 muestra el espacio de fases, donde se observa el flujo de dirección de las soluciones del sistema y las curvas solución en forma de trayectorias $\{x(t), y(t)\}$. El sistema de EDO en (24) tiene dos puntos de equilibrio, que se obtienen al igualar a 0 las derivadas en (24) y resolver las ecuaciones algebraicas resultantes. Las coordenadas de estos puntos son $(0, 0)$ y (x_{eq}, y_{eq}) dados por:

$$x_{eq} = \frac{N(1 - 0/\lambda p)}{1 + \frac{p\phi}{(1-p)\theta}}, \quad y_{eq} = \frac{N(1 - 0/\lambda p)}{1 + \frac{(1-p)\theta}{p\phi}} \quad (25)$$

Al punto $(0, 0)$ convergen las trayectorias con condición inicial $x(0) = 0$ (es decir, población inicial femenina nula), independientemente

del valor de y y al punto (x_{eq}, y_{eq}) convergen el resto de trayectorias. Para el caso modelado en las figuras 4 y 5, $(x_{eq}, y_{eq}) = (26.66, 13.33)$ es evidente el comportamiento convergente de las trayectorias solución hacia este punto de equilibrio.

Los ejemplos mostrados en esta sección, basados en ecuaciones diferenciales, suponen que las variables de estado x son continuas. Esta suposición no es estrictamente correcta; la naturaleza de estas variables es discreta (toma valores en los números Naturales) ya que describen el número de individuos en poblaciones. En la siguiente sección se explica la aproximación basada en Cadenas de Markov de Tiempo Continuo (CMTC) y se muestran las diferencias y similitudes con los ejemplos determinísticos.

5.4 Modelos estocásticos en dinámica de poblaciones

Los modelos estocásticos en poblaciones se han utilizado desde hace varios años. Esta sección está basada en algunos resultados mostrados en Goel (1974) y S. Allen y J. Allen (2003) y en resultados propios. En primer lugar se explican los procesos de nacimiento y muerte que son una clase de Cadenas de Markov de Tiempo Continuo útiles para modelar la dinámica de una población. Se presenta la versión estocástica de los dos ejemplos de las secciones 3.1 y 3.2. En la última sección se explica el modelo estocástico planteado para el ejemplo de la sección 3.3. Se demuestra la importancia de conceptos como el tiempo de extinción y de los estados transitorios y absorbentes para determinar la dinámica del sistema.

5.4.1 Procesos de nacimiento y muerte

Estos procesos se constituyen a partir de un espacio de estados $S = \{1, 2, \dots, N\}$, (N puede ser infinito) en el que las transiciones desde cualquier estado n solo pueden realizarse hacia los estados $n + 1$ o $n - 1$. Si la transición ocurre hacia el estado $n + 1$ es porque en la población hubo algún nacimiento antes que alguna muerte, y si la transición es hacia el estado $n - 1$ es porque ocurrió una muerte antes que un nacimiento. Se

supone que los tiempos de ocurrencia de muertes o nacimientos, desde el último nacimiento o muerte (es decir, desde la última transición en el proceso) son independientes y están distribuidos exponencialmente. Es así que este proceso es una CMTC y puede ser representado como aparece en la Figura 6, a partir de las tasas de nacimiento λ_i y muerte μ_i desde cada estado i . Recuérdese de la sección 2.1.1 que estas tasas representan el parámetro de las distribuciones exponenciales asociadas a los tiempos de nacimiento y muerte, respectivamente, y su inverso representa el tiempo medio de un nacimiento o muerte desde el último cambio de estado.

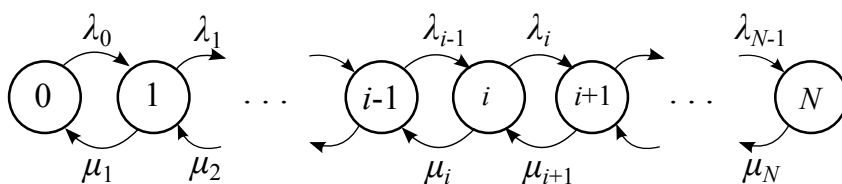


Figura 6. Proceso de nacimiento y muerte con tasas de nacimiento λ_i , para $i = 0, 1, \dots, N-1$ y tasas de muerte μ_i , para $i = 1, \dots, N$.

5.4.2 Ejemplo 1. Crecimiento exponencial en un proceso de nacimiento

En un proceso de nacimiento las tasas de mortalidad μ_i son iguales a 0 para todo $i = 0, 1, \dots, N$. Supóngase una población en donde no haya muertes y cada individuo actúe independientemente de los otros y dé nacimiento a otro en un tiempo distribuido exponencialmente con tasa λ para todo $t \geq 0$. En este caso el espacio de estados del proceso es infinito: $S = \{1, 2, \dots\}$ y las tasas de transición vienen dadas por:

$$\lambda_n = n\lambda \quad \text{y} \quad \mu_n = 0 \quad \text{para} \quad n = 1, 2, \dots, \quad (26)$$

es decir, la tasa (exponencial) de crecimiento de la población cuando hay n individuos es proporcional a n . Nótese que en el caso del crecimiento exponencial determinístico de la sección 3.1, la tasa de crecimiento $\frac{dx}{dt}$ también era proporcional al número de individuos x . El presente ejemplo

es la versión estocástica del crecimiento exponencial determinístico, con la diferencia de que la tasa de crecimiento λ_n , cuando hay n individuos, no se refiere a la derivada del número de individuos –que en este caso es una variable aleatoria discreta $X(t)$ – sino que se relaciona con la tasa de la distribución exponencial del tiempo entre nacimientos y cuyo inverso $1/\lambda_n$ es el tiempo medio para el siguiente nacimiento.

Si la población inicial tiene un valor determinístico $X(0) = x_0$ se puede demostrar que el valor esperado del número de individuos $X(t)$ al tiempo t cumple:

$$E[X(t)] = x_0 e^{\lambda t}, \quad (27)$$

que es la misma expresión para la solución del caso determinístico, ecuación (17). La figura 7 muestra algunas trayectorias de la CMTC simuladas mediante el método de Monte Carlo, con un valor de $\lambda = 1$ en unidades de $(\text{minutos})^{-1}$, que se traduce en que en promedio hay 1 nacimiento por individuo cada minuto. Se observa en primer lugar que las trayectorias crecen en forma escalonada, tomando valores discretos, y se distribuyen alrededor del valor esperado dado en (27). Se observa el crecimiento exponencial del valor esperado, de las trayectorias y también el aumento de su dispersión con el tiempo.

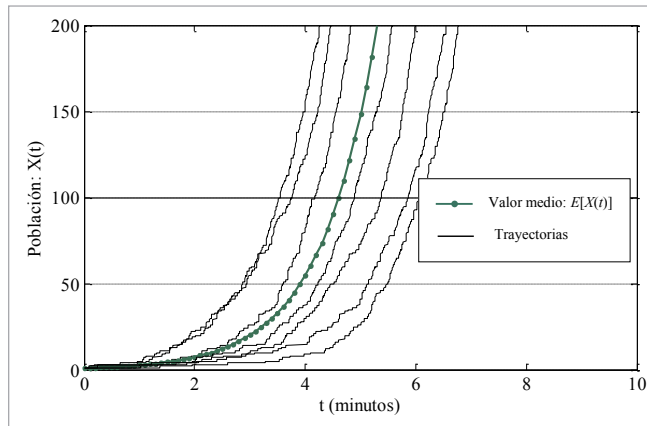


Figura 7. Realizaciones del proceso de nacimiento con crecimiento exponencial (tasas dadas en (26) con $\lambda = 1$) y valor esperado $E[X(t)]$ del número de individuos $X(t)$.

5.4.3 Ejemplo 2. Crecimiento de tipo logístico en un proceso de nacimiento

Recuérdese que el modelo logístico descrito en la sección 3.2 tiene dos interpretaciones que conducen a la misma EDO (18). La primera interpretación supone solo nacimientos. Su versión estocástica define un proceso de nacimiento con tasas dadas por:

$$\lambda_n = \lambda \left(1 - \frac{n}{N}\right)n, \quad \mu_n = 0 \quad \text{para} \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (28)$$

Sin embargo, la segunda interpretación, que considera también muertes, define una CMTC diferente a la dada por las tasas (28). En este caso las tasas vienen dadas por:

$$\lambda_n = \lambda n + g(n), \quad \mu_n = \lambda \left(\frac{n}{N}\right) + g(n) \quad \text{para} \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (29)$$

Cada definición de la función $g(n)$ define un proceso diferente, obteniéndose resultados distintos, como se explica en detalle en Allen y Allen (2003). Con el propósito de ilustrar las características principales de la aproximación estocástica, se considerará en este ejemplo la interpretación dada por las tasas en (28), es decir, el modelo con solo nacimientos.

Interesa entonces conocer el valor esperado $E[X(t)]$ del número de individuos $X(t)$ y compararlo con la solución determinística. Para ello se soluciona numéricamente la expresión (11) para la matriz de probabilidades de transición $\mathbb{P}(t) = [P_{ij}(t)]_{ij}$. En general, la expresión para $E[X(t)]$ viene dada por:

$$E[X(t)] = \sum_{j=1}^N j P_{X(0),j}(t), \quad (30)$$

Donde $X(0) = 1$ es el número de individuos al tiempo $t = 0$.

Para el modelo con tasas en la expresión (28), $E[X(t)]$ no es igual a la solución $x(t)$ del caso determinístico, ecuación (20), a diferencia del modelo de crecimiento exponencial en el cual ambas soluciones eran iguales. Esto se debe al comportamiento no lineal de las tasas de nacimiento en la expresión (28). El caso simulado en la Figura 8 –con valores de λ en unidades de $(\text{minutos})^{-1}$ y $N = 100$ al igual que en el ejemplo determinístico en la sección 3.2– muestra que $x(t)$ crece más rápidamente que $E[X(t)]$. Sin embargo, ambas expresiones convergen asintóticamente hacia el valor de máxima población N . Así mismo, las trayectorias simuladas del proceso estocástico $X(t)$ en la figura 8 convergen al estado N . Esto es así porque el estado N es un estado absorbente para la Cadena de Markov. A diferencia del caso exponencial, la dispersión de las trayectorias llega a un máximo alrededor de $t = 5$ y disminuye asintóticamente a 0 debido a la convergencia hacia el estado N .

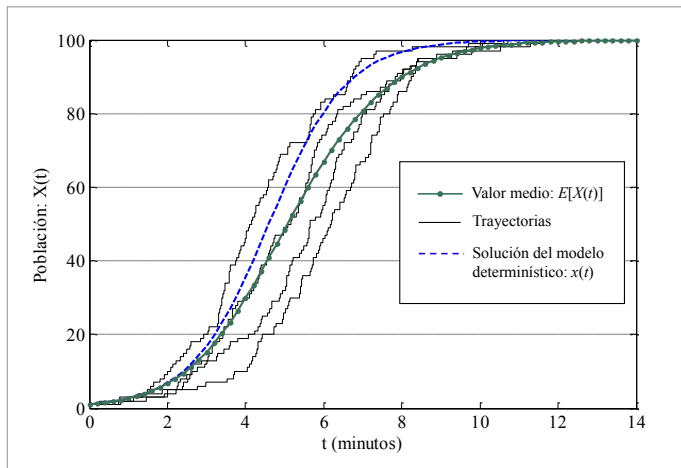


Figura 8. Realizaciones del proceso de nacimiento con crecimiento logístico (tasas dadas en (28) con $\lambda = 1$ y $N = 100$), valor esperado $E[X(t)]$ del número de individuos $X(t)$ y solución $x(t)$ del caso logístico determinístico dado por la ecuación (20).

Una diferencia fundamental del modelo estocástico con respecto al modelo determinístico es que con probabilidad 1 la cadena llega al estado N en un tiempo finito, es decir, existe un $t > 0$ finito tal que $X(t) = N$. En el caso determinístico, al ser la variable $x(t)$ continua, solo se tiene convergencia a $x(t) = N$ en el límite cuando $t \rightarrow \infty$.

Esta propiedad permite definir la variable aleatoria T_{1N} definida como el tiempo requerido por el proceso para pasar del estado 1 al estado N , es decir, el tiempo requerido para llegar al máximo de población empezando con 1 individuo. Se puede demostrar que el valor esperado $E[T_{1N}]$ y varianza $V[T_{1N}]$ de T_{1N} están dados por:

$$E[T_{1N}] = \sum_{i=1}^{N-1} E[T_i] \quad V[T_{1N}] = \sum_{i=1}^{N-1} V[T_i], \quad (31)$$

donde T_i es el tiempo de ir desde el estado i al estado $i + 1$. Para el caso general de un proceso de nacimiento y muerte con espacio de estados $S = \{0, 1, \dots\}$, las expresiones para el valor esperado $E[T_i]$ y varianza $V[T_i]$, para $i \geq 1$, están dadas por las siguientes relaciones recurrentes (Ross, 2007):

$$E[T_i] = \frac{1}{\lambda_i} + \frac{\mu_i}{\lambda_i} E[T_{i-1}] \quad (32)$$

$$V[T_i] = \frac{1}{\lambda_i(\mu_i + \lambda_i)} + \frac{\mu_i}{\lambda_i} V[T_{i-1}] + \frac{\mu_i}{\mu_i + \lambda_i} (E[T_{i-1}] + E[T_i])^2, \quad (33)$$

empezando con $E[T_0] = 1/\lambda_0$ y $V[T_0] = 1/\lambda_0^2$.

Para el ejemplo modelado se obtienen los siguientes valores: $E[T_{1N}] = 10.3$ minutos y $V[T_{1N}] = 3.5$ minutos². La desviación estándar es $\sigma_{T_{1N}} = \sqrt{V[T_{1N}]}$ minutos. Es decir, en promedio al cabo de 10.3 minutos la población con crecimiento logístico ha llegado a su máximo de capacidad de carga N con un error de ± 1.86 minutos. A partir de estos valores se puede calcular el coeficiente de variación $c = \sigma_{T_{1N}}/E[T_{1N}]$ de la v.a. T_{1N} , el cual da una medida de la dispersión relativa del tiempo aleatorio T_{1N} con respecto a su media. El resultado es $c = 0.18$, y por su valor mucho menor que 1, indica la baja dispersión del tiempo T_{1N} .

5.4.4 Ejemplo 3. Modelo estocástico de una población de hombres y mujeres

El ejemplo determinístico de la sección 3.3 se puede plantear como una Cadena de Markov de Tiempo Continuo de la siguiente forma. Supóngase que cada estado de la cadena está representado por la pareja ordenada $(X(t), Y(t))$ de las variables aleatorias del número de mujeres $X(t)$ y de hombres $Y(t)$. Si el proceso se encuentra en el estado (n, m) existen cuatro posibles transiciones, las cuales ocurren en tiempos distribuidos exponencialmente (ver la figura 9): (1) hacia el estado $(n + 1, m)$ el caso en que nazca una mujer, (2) hacia $(n, m + 1)$ si nace un hombre, (3) hacia $(n - 1, m)$ si fallece una mujer y (4) hacia $(n, m - 1)$ si fallece un hombre. Se plantean las siguientes expresiones para las tasas exponenciales de transición $q[(n, m), (i, j)]$ desde el estado (n, m) al estado (i, j) para cada uno de los cuatro casos:

$$\begin{aligned}
 \text{Nacimiento: } & q[(n, m), (n + 1, m)] = \lambda p n \left(1 - \frac{n + m}{N}\right) \\
 & q[(n, m), (n, m + 1)] = \lambda (1 - p) n \left(1 - \frac{n + m}{N}\right) \\
 \text{Muerte: } & q[(n, m), (n - 1, m)] = n\theta \\
 & q[(n, m), (n, m - 1)] = m\phi
 \end{aligned} \tag{34}$$

Nótese que estas expresiones son iguales a las expresiones (22) y (23) para las tasas de nacimiento y muerte en el caso determinístico, haciendo las sustituciones $x \rightarrow m$ y $y \rightarrow m$. Es decir, se tienen las mismas reglas dinámicas del modelo determinístico: hay una tasa neta de nacimiento desde el estado (n, m) dada por

$$b(n, m) = q[(n, m), (n + 1, m)] + q[(n, m), (n, m + 1)] = \lambda n \left(1 - \frac{n + m}{N}\right),$$

correspondiente a un crecimiento de tipo logístico con población máxima N ; hay una probabilidad p de que cada nacimiento sea una mujer; y las tasas de mortalidad por individuo son constantes: θ para las mujeres y ϕ para los hombres. La población máxima N define un máximo de número de individuos (n, m) de mujeres y hombres dado

por $n + m \leq N$. Los estados para los cuales $n + m = N$ no poseen tasa de nacimiento y solo hay muertes. Finalmente, el estado $(0,0)$ es un estado absorbente de la CMTC, ya que no posee tasa de salida (la tasa de nacimiento es cero) y tiene entradas desde los estados $(1,0)$ y $(0,1)$.

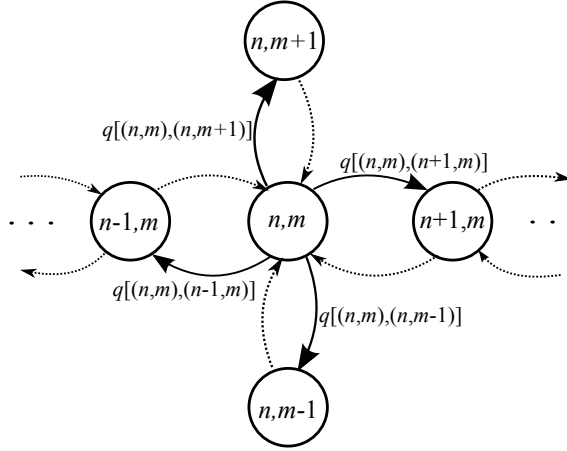


Figura 9. CMTC para el modelo de población de mujeres y hombres con tasas dadas en (34).

La Figura 10 muestra algunas trayectorias del proceso, graficando $X(t)$ y $Y(t)$ (obtenidos por simulación de Monte Carlo), para varias condiciones iniciales determinísticas $X(0) = x_0$, $Y(0) = y_0$. También, se grafican los valores esperados $E[X(t)]$ y $E[Y(t)]$ obtenidos mediante la solución de la expresión (11) para la matriz de probabilidades $\mathbb{P}(t) = [P_{(n,m),(i,j)}(t)]$ y las expresiones:

$$E[X(t)] = \sum_{i=0}^{N-j} \sum_{j=0}^N iP_{(X(0),Y(0)),(i,j)}(t) \quad (35)$$

$$E[Y(t)] = \sum_{i=0}^{N-j} \sum_{j=0}^N iP_{(X(0),Y(0)),(i,j)}(t) \quad (36)$$

Donde $P_{(n,m),(i,j)}(t)$ es la probabilidad de que en el tiempo t la cadena esté en el estado (i,j) empezando en el estado (n,m) en $t = 0$. La figura

10 también muestra las soluciones $x(t)$ y $y(t)$ del modelo determinístico dado por la EDO (24), con condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $y(0) = y_0$ iguales a las del modelo estocástico.

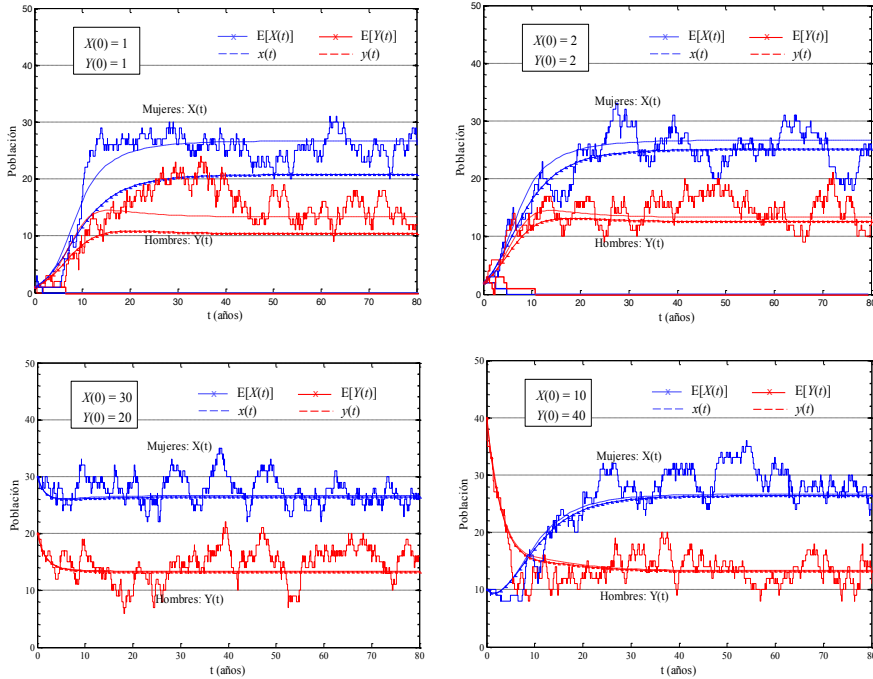


Figura 10. Comparación del modelo estocástico por CMTC con tasas dadas en la expresión (34) y el modelo determinístico dado por la ecuación (24), mostrando las trayectorias estocásticas del número de mujeres $X(t)$ y hombres $Y(t)$, con sus valores esperados $E[X(t)]$ y $E[Y(t)]$, y las soluciones $x(t)$ y $y(t)$ del modelo determinístico para diferentes condiciones iniciales x_0 y y_0 . Parámetros del modelo: máxima población $N = 50$, tasa de nacimientos $r = 1$, tasa de mortalidad individual femenina $\theta = 0.1$, tasa de mortalidad individual masculina $\phi = 0.2$ y fracción de nacimientos que son mujeres $p = 0.5$.

En primer lugar se observa que las soluciones $x(t)$ y $y(t)$ del modelo determinístico están por encima de los valores esperados del modelo estocástico, $E[X(t)]$ y $E[Y(t)]$. Es decir, $x(t) > E[X(t)]$ y $y(t) > E[Y(t)]$, para $t > 0$. La diferencia es más notable para los casos con condiciones iniciales $(x_0, y_0) = (1, 1)$ y $(x_0, y_0) = (2, 2)$. Esto se explica ya que para

condiciones iniciales cercanas a $(0,0)$ hay mayor probabilidad de que el proceso termine en el estado absorbente $(0,0)$ disminuyendo de esta forma el valor esperado. En la figura se observa que algunas trayectorias de estos dos casos terminan en el estado $(0,0)$ y permanecen allí, a partir de tiempos alrededor de $t \approx 10$.

Esta es una diferencia fundamental con el modelo determinístico. En ese modelo $(0,0)$ es un punto de equilibrio inestable y ninguna trayectoria con condición inicial diferente de $(0,y)$ (con $y \geq 0$) es absorbida en $(0,0)$, sino que converge al punto de equilibrio estable (x_{eq}, y_{eq}) dado por (25). En cambio, en el modelo estocástico se puede demostrar que eventualmente todas las trayectorias terminan en el estado absorbente $(0,0)$. Es decir, $(0,0)$ pasa de ser un punto inestable a uno de equilibrio estable.

Se puede calcular el valor esperado de $T(i,j)$ definido como el tiempo de absorción al estado $(0,0)$ empezando en el estado (i,j) , a partir de la matriz de transición $\mathbb{Q}$ del sistema (Latouche y Ramaswami, 1999). Los resultados de la tabla 1 indican que este tiempo es del orden de 10^8 años para el rango de condiciones iniciales mostrados. Es decir, hay extinción de ambas poblaciones al cabo de ese número de años. Sin embargo, para la escala de tiempo de interés en dinámica de poblaciones el comportamiento es constante, como se evidencia en la figura 10. Es decir, en esta escala de tiempo se tiene un comportamiento similar al del caso determinístico, con una población de equilibrio, con la diferencia de que esta población depende de las condiciones iniciales del sistema y su valor esperado es menor que el del caso determinístico.

Tabla 1. Valor esperado del tiempo de extinción $T(X(0), Y(0))$ para varias condiciones iniciales: $X(0)$ y $Y(0)$.

$X(0)$	1	2	10	30	40
$Y(0)$	1	2	40	20	10
$E[T(X(0), Y(0))]$	$4.43 \cdot 10^8$	$5.36 \cdot 10^8$	$5.63 \cdot 10^8$	$5.63 \cdot 10^8$	$5.63 \cdot 10^8$

Conclusiones

En este capítulo se presentaron y compararon dos formulaciones para modelar el crecimiento y dinámica de poblaciones: una formulación determinística basada en ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) y una estocástica a partir de Cadenas de Markov de Tiempo Continuo (CMTC). Los modelos determinísticos por EDO son más sencillos de solucionar y sirven como primera aproximación al problema, con mejores resultados en el caso de poblaciones grandes (al suponer el número de individuos como una variable continua) y cuando hay poca aleatoriedad en el sistema. En cambio, los modelos por CMTC se acercan más a la realidad del problema; recrean la naturaleza discreta de las variables de estado, es decir, del número de individuos, y también el comportamiento aleatorio inherente al problema. Sin embargo, su solución numérica es más complicada. La matriz de probabilidades $\mathbb{P}(t)$ de la CMTC requiere la solución de las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov (8), que es un sistema de ecuaciones diferenciales lineales solucionado mediante la función exponencial matricial (11) y las trayectorias solución se obtienen de simulaciones de Monte Carlo, que requieren algoritmos para generar números aleatorios.

El paradigma probabilístico permitió definir algunas cantidades de interés, lo que en la aproximación determinística no es posible. Un ejemplo es la variable aleatoria del tiempo de absorción T_{iN} a la población máxima N en el modelo logístico y el tiempo de extinción $T(i,j)$ en el modelo de dos poblaciones con mortalidad en las secciones 4.3 y 4.4. Con la solución de la ecuación de Chapman-Kolmogorov de las CMTC fue posible encontrar el valor esperado de estos tiempos, así como su varianza. También se calculó el valor esperado del número de individuos $E[X(t)]$ en cada tiempo $t \geq 0$. Este último se comparó con la solución $x(t)$ de los modelos determinísticos, encontrando que $E[X(t)] = x(t)$ en el ejemplo de crecimiento exponencial; $E[X(t)] < x(t)$ y convergencia al estado de población máxima N para ambos modelos en el ejemplo de crecimiento logístico; y comportamiento de extinción en el modelo estocástico para el ejemplo de dos poblaciones con crecimiento logístico y mortalidad (tiempos del orden de 10^8 años) y dependencia

de los valores iniciales en cuanto al comportamiento asintótico y probabilidad de extinción temprana, características que no se observan en el modelo determinístico.

Los modelos presentados en este capítulo se pueden generalizar a CMTC no estacionarias, en las que las tasas de nacimiento y muerte pueden depender del tiempo de forma determinística o de variables ambientales aleatorias modeladas también por otros procesos estocásticos. Finalmente, se han desarrollado otras aproximaciones basadas en Cadenas de Markov de Tiempo Discreto (CMTD) (Bonsall, 2004), o modelos de tiempo continuo y espacio continuo como generalizaciones de los modelos determinísticos por EDO considerando interacción con un ambiente estocástico modelados como procesos de ruido blanco y movimientos brownianos (Mao, 2002). Estas aproximaciones permiten definir lo que se conoce como ecuaciones diferenciales estocásticas (EDE) (Oksendal, 2003).

Referencias bibliográficas

- Allen, L. J. S. y Allen, E. J. (2003). A comparison of three different stochastic population models with regard to persistence time. *Theoretical Population Biology* 64: 439-449.
- Blanchard, P., Devaney, R. L. y Hall, G. R. (1999). *Ecuaciones diferenciales*. International Thomson.
- Blanco Castañeda, L. (2013). *Probabilidad*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.
- Bonsall, M. B. y Hastings, A. (2004). Demographic and environmental stochasticity in predator-prey metapopulation dynamics. *Journal of Animal Ecology* 73: 1043-1055.
- Goel, N. S. y Richter-Dyn, N. (1974). *Stochastic Models in Biology*. New York: Academic Press.
- Jacobs, K. (2010). *Stochastic Processes for Physicists: Understanding Noisy Systems*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Latouche, G. y Ramaswami, V. (1999). *Introduction to Matrix Analytic Methods in Stochastic Modeling*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.

- Mao, X., Marion, G. y Renshaw, E. (2002). Environmental Brownian noise suppresses explosions in population dynamics. *Stochastic Processes and their Applications* 97(1): 95-110, doi: [http://doi.org/10.1016/S0304-4149\(01\)00126-0](http://doi.org/10.1016/S0304-4149(01)00126-0)
- Meyer, W. J. (2004). *Concepts of Mathematical Modeling*. Dover Books on Mathematics.
- Oksendal, B. (2003). *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.
- Ross, S. (1996). *Stochastic Processes*. New York: Wiley.
- Ross, S. (2007). *Introduction to Probability Models*. San Diego, California: Academic Press.

6

Introducción a los modelos mesoscópicos: los modelos estadísticos de fractura y los métodos de agregación en materia suave

Gabriel Villalobos Camargo

6.1 Introducción

Los modelos que presentaremos en este capítulo buscan establecer relaciones cuantitativas entre los parámetros a escala nanoscópica y la escala mesoscópica mediante el uso de elementos discretos individuales, contrastándolos con métodos como el de los elementos finitos, que usualmente toman promedios macroscópicos de los materiales. Los temas que hemos escogido buscan resaltar las similitudes entre dos aplicaciones específicas: los métodos de agregación para materia suave (en inglés, *coarse graining*), y los modelos estadísticos de fractura. Estos modelos se han utilizado en campos tan diversos como los medios granulares, el fluido de los líquidos complejos, y la aparición y propagación de fracturas. Al finalizar mostraremos una aplicación particular en el caso de las fracturas debidas al secado en una película delgada.

6.2 Modelos estadísticos de fractura

El estudio juicioso de las características reales de los materiales muestra que, en general, no existe homogeneidad en características físicas

como respuesta elástica o esfuerzo de fallo. Los modelos estadísticos de fractura (SMF, del inglés *statistical models of fracture*) incorporan esta aleatoriedad, prediciendo los comportamientos generales y la estructura del espacio de fase de diferentes fenómenos de fractura. Los elementos comunes de los SMF son discretización, ley de fallo, ley de repartición del esfuerzo y distribución de aleatoriedad, como veremos en algunos casos.

6.2.1 Ruptura de un cable no homogéneo como función de su longitud

Uno de los grandes hitos del estudio de los fenómenos de fractura es la comprensión de que este proceso depende principalmente de las fluctuaciones, en vez de los promedios. Leonardo da Vinci encontró que el fallo por fractura de diferentes cables de acero, sometidos todos a la misma tensión, ocurre con mayor frecuencia en los cables de mayor longitud (Lund *et al.*, 2001). Estas observaciones experimentales van en contra de la teoría de la elástica clásica, la cual indica que la resistencia de un cable depende de su área transversal y es independiente de su longitud. Según la teoría de los materiales de Griffith (Griffith, 1921; Wei, 2010), el esfuerzo máximo de fractura (en el caso de esfuerzos planos) depende de: el módulo de Young, E ; la energía por unidad de superficie γ_f ; el tamaño de la falla, a ; y el módulo de Poisson, σ :

$$R = \sqrt{\frac{2E\gamma_f}{\pi\sigma a}}$$

Para la ingeniería mecánica clásica todos los segmentos longitudinales de un cable son idénticos; por lo cual al ser sometidos a tensión se debería comportar de la misma forma. Al aumentar el grosor del cable se disminuye la tensión por unidad de área, y por tanto, se puede soportar una mayor carga.

De manera similar a una cadena “que se rompe siempre por el eslabón más débil”, es lógico asumir que en un cable real existan inhomogeneidades; y que falle justamente cuando estas sean más débiles que

el promedio. Lund *et al.* (2001) proponen un modelo matemático en el cual el cable es discretizado en una serie de segmentos en paralelo, cada uno de los cuales está caracterizado por un esfuerzo de tensión máximo s_u y por un grosor D ; lo que permite construir las distribuciones de probabilidad de esfuerzo máximo de tensión y $Pr(s_u)$ y $Pr(D)$. Dada una carga W sobre el cable, la probabilidad de que un segmento de tamaño unitario del cable soporte esta carga está dada por:

$$Pr(W) = \int_0^{s_{u\max}} Pr(s_u) \int_{D_i}^{D_{\max}} Pr(D) dD ds_u,$$

con $D_i = \sqrt{(4W/\pi s_u)}$, $s_{u\max}$ el límite superior del esfuerzo de fallo y $D_{\max}$ el diámetro del cable. Esta probabilidad de fallo unitaria es un número entre 0 y 1. Si el fallo de un segmento unitario es independiente al fallo de los otros, la probabilidad de fallo de un cable de longitud L está dada por:

$$Pr(W | L) = Pr(W)^L,$$

dado que $Pr(W)$ es menor que uno, la probabilidad de fallo de un cable decrece con su longitud, como lo encontrase Leonardo. En este caso se cumple la norma heurística: “una cadena se rompe por el punto más débil”; sumado al hecho de que cuanto más larga la cadena, más eslabones tiene.

6.2.2 Modelos de haces de fibras

La resistencia a tensión de los materiales basados en fibras depende de la forma en que la carga se distribuye entre las fibras y en sus cualidades individuales. Los modelos de haces de fibras, abreviados en la literatura como FBM (del inglés *Fiber Bundle Models*), representan un modelo idealizado de un material fibroso real.

Los modelos de haces de fibras consisten en un conjunto de N fibras horizontales, fijas en un extremo y sujetas a un esfuerzo paralelo en el otro. Todas las fibras tienen el mismo módulo elástico E , pero pueden

llegar a tener un esfuerzo máximo de fractura $\sigma_{i\max}$ distinto; ya que esta variable se escoge de una distribución de probabilidad. Inicialmente, cada fibra está sujeta al mismo esfuerzo, lo cual causa un desplazamiento global del haz llamado x .

Descripción

Los elementos de un FBM (Daniels, 1945; Phoenix *et al.*, 2000; Pradhan *et al.*, 2003), (Sornette, 1989), son:

Discretización: el sólido es representado por un conjunto de fibras paralelas, alineadas regularmente. Solo sufren la deformación en la dirección longitudinal.

Ley de fallo: cada fibra es frágil, definida como lineal elástica hasta el punto de fallo, y todos tienen el mismo módulo elástico E ; el fallo de la fibra es instantáneo y una fibra rota no se recupera.

Ley de distribución de carga: la carga que soportaba una fibra que se ha roto se distribuye entre las restantes, de dos maneras. 1) distribución global, en la cual la carga se distribuye homogéneamente en las restantes (GLS, del inglés *global load sharing*); o 2) distribución entre las fibras más cercanas, llamada ley de distribución local (LLS, *local load sharing*).

Distribución de umbrales de fractura: el esfuerzo máximo de ruptura es una variable aleatoria con densidad de probabilidad $p(\sigma_{th})$. Representa el desorden de un material inhomogéneo. Como ejemplos de la distribución de esfuerzo están la distribución homogénea y la de Weibull.

Dependencia temporal: para modelar la fatiga y la fractura por fluencia, el esfuerzo de fractura ha de ser dependiente del tiempo.

Tanto en el experimento como en la teoría y en el computador, hay dos formas de aplicar la fuerza: controlando el desplazamiento del extremo del haz o controlando la fuerza total aplicada. En el lenguaje técnico se dice: la carga del material puede llevarse a cabo controlando el esfuerzo o la deformación. De todas formas, en ambos casos las fibras individuales soportan carga hasta que cada una de ellas supera su umbral de ruptura.

Si la variable independiente es el esfuerzo, y se aplica una fuerza externa W , existe una carga individual sobre las fibras remanentes $\sigma = W/N$; por tanto, han de romperse todas las fibras para las cuales σ es superior a su umbral, salvo que ya se hubieran roto a un valor menor de W . En este caso la ruptura de una fibra genera la redistribución del esfuerzo en las fibras remanentes, toda vez que la misma carga tiene que soportarse por menos fibras. Por otro lado, si la variable independiente es la deformación, dada una deformación ε habrá un esfuerzo en cada una de las fibras; pero una vez rota la fibra no hay redistribución, siempre que las demás fibras mantendrán la misma deformación y, por tanto, el mismo esfuerzo. Se conoce como la relación constitutiva la función que describe el esfuerzo como función de la deformación. Tanto si se controla el esfuerzo como si se controla la deformación se encuentra la misma relación constitutiva, $\sigma(\varepsilon)$:

$$\sigma(\varepsilon) = E \in \left[1 - \widetilde{P(E \in)} \right],$$

número de fibras intactas

El procedimiento de simulación, para el caso de esfuerzo controlado, consiste en incrementar su valor paso a paso; ya sea en pasos fijos o en el valor mínimo requerido para que una fibra falle. Al romperse una fibra se lleva a cabo la redistribución del esfuerzo, como comentamos atrás; dicha redistribución puede llevar a que el esfuerzo en algunas fibras pase su umbral y, por tanto, deba ser removida de la simulación. En otras palabras, un incremento pequeño en el esfuerzo puede generar una ráfaga de varias rupturas, con dos posibles consecuencias: o algunas fibras restantes pueden soportar todo el esfuerzo, dado que todos sus umbrales están por encima del valor de σ ; o por el contrario, cada ruptura, redistribución sucesiva rompe siempre nuevas fibras, llevando a una falla generalizada del haz. En ambos casos estas ráfagas llevan el nombre de avalanchas.

Las avalanchas son interesantes porque son fenómenos ubicuos en diferentes tipos de fracturas; conectando el reordenamiento de los dominios magnéticos, con los terremotos y con las fracturas en medios fibrosos.

Resultados analíticos

Note que la curva constitutiva del material solo se puede obtener experimentalmente hasta el punto de falla catastrófica. En el caso de la distribución global de carga, esta curva constitutiva tiene un valor máximo, lo cual define valores de deformación ε_c y de esfuerzo σ_c críticos. Una forma de analizar el sistema es estudiar la distribución de los tamaños de avalanchas en el sistema, Δ , construyendo histogramas de tamaños de avalanchas. Hemmer y Hansen (Hemmer *et al.*, 1992) mostraron que la distribución de tamaños de avalancha en un FBM con distribución global tiene un comportamiento universal en el límite cuando el número de fibras tiende a infinito:

$$D(\Delta) \approx \delta^{-5/2}.$$

Las distribuciones de ley de potencias se llaman también libres de escala, las avalanchas más frecuentes son las más pequeñas.

6.2.3 Ruido crepitante (*crackling noise*)

Un fenómeno es autosimilar si sus leyes de evolución tienen la misma forma a diferentes escalas de tamaño. En el caso más sencillo lleva a la aparición de leyes de potencia y estructuras fractales. Desde un punto de vista más general, el grupo de renormalización estudia cómo cambian las leyes de evolución de un sistema cuando se hacen mediciones a escalas cada vez más grandes. Sethna (2001) propone el sonido crepitante como los fenómenos cuya distribución de tamaños de intensidad de eventos de ruido cuyo histograma sigue una ley de potencias. Como ejemplos de ruido crepitante menciona el sonido de una hoja arrugada; los tamaños de la magnitud de los terremotos, la ley de (Gutenberg-Richter, 1945); y el sonido de Barkhausen, que se produce en un imán en el que los diferentes dominios magnéticos se ordenan debido a un campo externo. Podemos mencionar también los modelos de haces de fibras y modelos de secado debido a contracción.

El ruido crepitante se describe en este contexto como una transición entre estallidos (en inglés, *snapping*), una situación en la cual solo hay

una ruptura fatal, como cuando se rompe un trozo de tiza; y chasquidos (en inglés, *popping*), una situación en la cual pequeñas fracturas individuales se van acumulando continuamente. La invariancia de escala se ve ejemplificada en la ley de Gutenberg-Richter de los terremotos, en la que el histograma de tamaños de avalanchas sigue una ley de potencias. Esta invariancia implica que, aunque existen diferentes causas para los terremotos grandes y los pequeños, los mecanismos precisos no son importantes; por tanto, la explicación del fenómeno se puede hacer mediante un modelo agregado que no tenga en cuenta los detalles de cada tipo de interacción. Más aun, puede ser posible que existan muchos otros fenómenos que caigan en la misma categoría, compartiendo la misma dinámica; la llamada misma clase de universalidad.

Para probar este punto, Sethna usa un modelo de juguete de un imán (Sethna, 2001). El primer paso, la discretización, lleva a tomar dominios magnéticos individuales en una grilla. En el presente texto los llamaremos indistintamente espines, pero el lector ha de tener en cuenta que no se trata de los espines de la mecánica cuántica, y que los dominios pueden tener dimensiones microscópicas (como contraposición a las dimensiones nanoscópicas que corresponden a los espines que existirían en átomos individuales). Cada uno de estos espines (dominios individuales) S_i tiene una orientación paralela al eje z , ya sea apuntando hacia arriba ($s_i = 1$) o hacia abajo ($s_i = -1$). El campo que “siente” un espín tiene tres componentes. Una debida a un posible campo magnético externo, cuya intensidad aumenta con el tiempo $H(t)$; una segunda debida al campo debido a sus vecinos, $\sum_j JS_j$, que representa el hecho de que los dominios magnéticos en un imán tienden a coordinarse y apuntar en la misma dirección a sus vecinos; y una tercera componente debido a las imperfecciones y ruido que pueda existir en el material:

$$F = H(t) + \sum_{\text{vecinos}} JS_j + h_i$$

El modelo de Sethna usa $J = 1$ como constante de acoplamiento, y h se obtiene de una distribución aleatoria normal con desviación

estándar de R . El algoritmo de simulación es el siguiente: la condición inicial consiste en tener todos los espines (dominios) apuntando hacia abajo. Un espín cambiará de orientación únicamente si la fuerza neta que actúa sobre él tiene sentido positivo. El cambio de orientación coherente se dará si el campo externo es suficientemente fuerte para que un espín individual se alinee con el campo externo; o también puede ser el resultado de una avalancha de reordenamientos: el cambio de la orientación de un espín vecino puede llevar a que la componente debida a los vecinos sea la causante de que la fuerza total se oriente con sentido positivo. También es posible que haya un cambio de orientación no coherente, o independiente, si el ruido es más grande que las otras dos contribuciones y logra que haya un cambio en el signo de la fuerza total que siente un espín. Sethna propone una correspondencia entre estos dos regímenes de reorientación y las fases que hemos introducido anteriormente. El caso de los cambios de orientación independientes y no coherentes se trata de fracturas del tipo de chasquidos, ya que las avalanchas son pequeñas; para las reorientaciones coherentes, se trata de fracturas de tipo estallidos, ya que comúnmente la mayoría de las reorganizaciones ocurrirán en unas pocas avalanchas muy grandes.

Sethna propone interpretar del proceso de avalanchas pensando en un cambio del sistema entre diferentes estados metaestables,¹ los cuales tienen valores de energía similares y configuraciones distintas. Las avalanchas permiten reordenar el sistema pasando de uno de los estados metaestables a otro.

En el campo de la mecánica estadística, el agrupamiento (del inglés *coarse graining*) consiste en encontrar la transformación que transformará un sistema dado en otro, al hacer un reescalamiento de las longitudes y una reducción en los grados de libertad. Esta transformación implica, entonces, un cambio en las constantes del sistema; y no necesariamente requiere definir un nuevo campo que “recuerde” los grados de libertad eliminados, como sí sucede en la agregación en modelos de materia suave.

¹ Aquel que no puede disminuir el valor de su energía mediante cambios pequeños. Corresponde a un mínimo local de la energía, como contraposición a un mínimo global.

Una vez se ha definido el mecanismo de realizar la transformación, y toda vez que las características principales del modelo no cambien mediante la agregación, es posible aplicarla repetidamente; logrando cada vez sistemas más sencillos. Desde el lado práctico, esto permite analizar y simular sistemas sencillos y sacar de ellos conclusiones que son aplicables a sistemas más complejos. Una pregunta obvia surge: ¿cuándo se debe parar el proceso de agregación? Veamos. El objeto de estudio de la teoría de renormalización es el espacio de fase de los sistemas físicos. Las renormalizaciones, en este espacio de fase, son mapeos del espacio en sí mismo. Así, cabe pensar que las renormalizaciones sucesivas generarán un flujo en el espacio de fase; y usualmente se encuentran puntos fijos de este mapeo hacia los cuales diferentes tipos de modelos son mapeados por la renormalización. De esta manera se hace una abstracción del problema: en vez de atacar el problema de estudiar el ruido crepitante en imanes directamente, se hace mediante el estudio de un sistema dinámico específico, y el flujo de sus trayectorias en el espacio de fase.

6.2.4 Fracturas debido al secado en una película delgada

En esta sección presentaremos los resultados de un modelo estadístico de fracturas debidas al encogimiento; que puede deberse al secado gradual que sucede durante un proceso de desecamiento (Villalobos *et. al.*, 2011). En este caso especial el proceso de contracción se lleva a cabo en una película delgada, por tanto la geometría del material se puede considerar como una sección rectangular de material, en dos dimensiones.

La primera etapa del proceso de simulación de los modelos estadísticos de fracturas corresponde a la discretización que, como hemos mencionado, consiste en modelar algunas secciones como elementos discretos. En este caso hemos incluido dos tipos de objetos: masas puntuales, que representan secciones del material; y resortes, que representan las fuerzas de adhesión entre dos segmentos consecutivos del material. El proceso estadístico de fractura corresponde a la ruptura de los enlaces entre secciones del material, por tanto nos hemos enfocado

en el comportamiento de los resortes. Hemos definido la relación esfuerzo-deformación de los resortes como la de un material frágil (no confundir con débil); es decir, el resorte tiene un comportamiento elástico que sigue la ley de Hooke en un rango de elongaciones, hasta un valor umbral máximo de esfuerzo. Si el esfuerzo superase el umbral, el resorte se rompe, retirándolo de la simulación, como se hace usualmente en los diferentes modelos estadísticos de fractura.

La discretización involucra tanto la definición de la geometría como la de las características mecánicas del material. Hablemos primero de la geometría. En el primer paso, el código que hemos diseñado dispone las masas en una red dos dimensional, que construye aplicando una pequeña deformación a una red triangular: las masas puntuales son puestas inicialmente en la red cristalina separadas por una distancia a llamada constante de red, y luego son desplazadas ligeramente en una dirección y distancia aleatorias dentro de un disco de radio 0.1a centrado en la posición inicial. El objetivo de esta modificación es hacer el sistema más isotrópo, destruyendo la perfección en las direcciones cristalográficas al no haber una celda unidad; esto logra prevenir la aparición de patrones artificiales de fractura, pero no afecta el resto del proceso. Las masas (también llamadas nodos) que se encuentran en el borde las mantenemos quietas durante toda la simulación, mientras que los nodos interiores se pueden mover en el plano. Definimos el tamaño del sistema como el número de nodos en la fila más baja de la red. Cabe resaltar que las distancias de equilibrio de los resortes que hemos construido están dadas por esta configuración inicial; en otras palabras, al principio de la simulación las distancias entre todos los puntos de masa son tales que los resortes están en su longitud natural, es decir, no hay elongaciones ni compresiones de los muelles en $t = 0$.

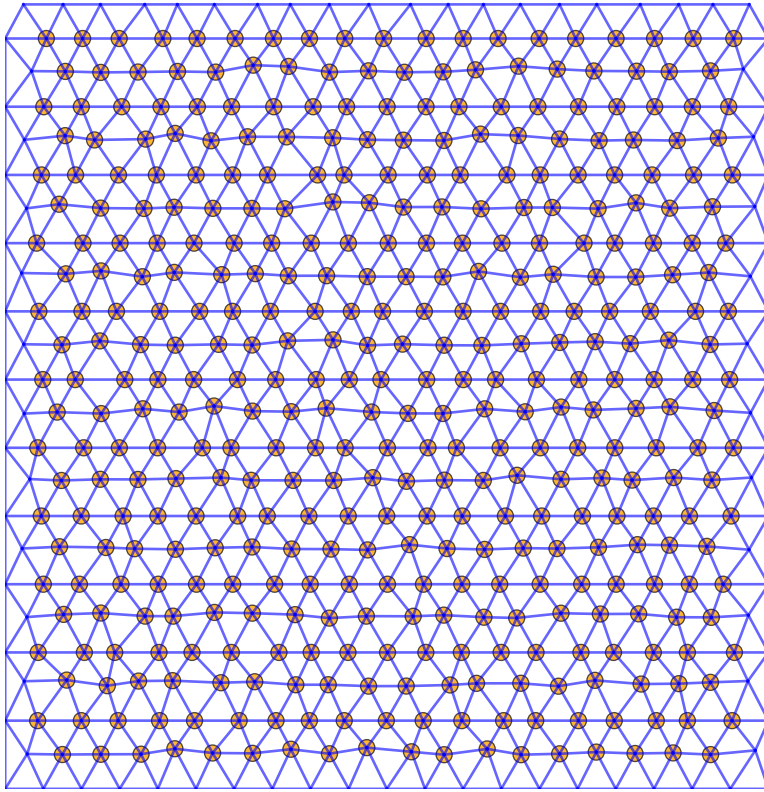


Figura 1. Ejemplo de la configuración inicial del sistema de red de resortes basada en una configuración bidimensional triangular.

(Fuente: Tomado de Villalobos *et al.*, 2011).

La discretización se culmina con la elección de los umbrales de ruptura de los resortes. En este modelo hemos representado el desorden del material mediante la elección de los umbrales de ruptura tomados de una distribución aleatoria homogéneamente distribuida. Más aún, para poder variar el grado de heterogeneidad del material, consideramos distribuciones uniformemente distribuidas; centradas en $C = 1$ y con la mitad del ancho W tal que $0 \leq W \leq 1$. La densidad de probabilidad es:

$$p(\sigma_{th}) = \frac{1}{2W}, \quad C - W \leq \sigma_{th} \leq C + W$$

Por tanto, la intensidad del desorden, ξ se caracteriza por medio de un parámetro adimensional:

$$\xi = \frac{W}{C}$$

El cual varía entre 0, ausencia de desorden (todos los resortes tendrían el mismo valor del umbral de ruptura); hasta 1, que corresponde al más alto valor del desorden. Algunos modelos estadísticos de fractura permiten la “recuperación” del material, en el sentido de que los enlaces rotos pueden volver a restablecerse. En el presente sistema no tendremos este tipo de comportamiento. Es importante recalcar que la ruptura de un resorte no implica una redistribución de esfuerzos, es decir, no hay lugar a una distinción entre distribuciones globales y distribuciones locales de esfuerzos en este modelo.

La última característica de la que hablaremos es el valor de la masa de los nodos. Dado que cada nodo representa una región del material de área distinta, usamos la construcción de la celda de Voronoi entre los nodos vecinos como mecanismo para calcular la masa de cada una de las partículas puntuales asociadas a los nodos. En el presente sistema, dado que el desplazamiento de la red triangular es pequeño, obtenemos un valor de la masa de todos los nodos similar, con $m \approx 0.86$. El algoritmo que hemos usado es el programa de código abierto triangle (Shewchuk, 1996).

Como un segundo paso en la construcción del modelo, hablaremos sobre la evolución dinámica. El proceso de secado se captura reduciendo la longitud natural de todos los resortes en la misma tasa, lo cual induce fuerzas no balanceadas y puede llevar a la ruptura de algunas uniones. Se controla mediante un parámetro creciente α que definimos así:

$$\alpha = \frac{l_0 - l}{l_0} = \frac{\Delta}{l_0},$$

donde l es la longitud natural actual del resorte, l_0 es su valor al inicio de la simulación (calculado como la distancia inicial entre los dos no-

dos que definen sus extremos). De esta forma, interpretamos α como el grado de secado que ha ocurrido en el sistema. El valor inicial de α , $\alpha_0 = 0$.

La simulación de un secado lento, que corresponde a un proceso cuasiestático, se asegura implementando un algoritmo de simulación en el que el cambio en α se obtiene calculando el valor siguiente que causaría que un resorte se rompiera; en contraposición a hacerlo usando un valor fijo $\Delta\alpha$.² Dado que el proceso de secado produce la ruptura de los resortes individuales y de avalanchas de rupturas (un término que definimos más adelante), existe una forma de medir el tiempo: llamamos t el número de avalanchas que han ocurrido en el sistema. La condición para terminar la simulación consiste en llegar a un valor fijo de $\alpha = 0.3$. La interpretación de esta condición es que el contenido de humedad de la muestra ha llegado a cero.

Después de remover un resorte, las posiciones de los nodos se encuentran relajando el sistema mediante un algoritmo de Verlet, usando la segunda ley de Newton se explica el estado de movimiento de cada uno de los nodos con la siguiente expresión:

$$m\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i - c\vec{v}_i, i = 1, \dots, N.$$

Donde la fuerza de forzamiento (o fricción) $-c\vec{v}$ tiene dependencia explícita del tiempo (con un coeficiente de forzamiento $c = 10$), asegurando el relajamiento de las partículas a unas posiciones de equilibrio; $\vec{F}_i$ son las fuerzas debidas a los resortes y $m\ddot{\vec{r}}_i$ la masa por la aceleración de cada nodo. Hemos dicho que no se impone una regla de distribución de la carga (global o local) como una característica del modelo. No obstante, sí es cierto que la nueva posición de equilibrio de las partículas, que resulta como consecuencia de la ruptura de un resorte, conlleva una nueva distribución de las fuerzas entre los nodos;

² Haciendo la analogía con los modelos de simulación de dinámica molecular, el presente modelo es análogo a una simulación basada en eventos (*event driven simulation*), en la que todos los objetos de la simulación se evolucionan un valor fijo de tiempo correspondiente al tiempo mínimo necesario para que ocurra una colisión; en contraste con la simulación basada en tiempos discretos, en la cual todas las partículas se evolucionan un intervalo fijo de tiempo Δt .

luego esta ruptura conlleva una correlación espacial en el cambio de las fuerzas debidas a la fractura. Esta redistribución de fuerzas puede llevar a nuevas fracturas, en las que nuevos resortes superan sus respectivos umbrales al cambiar la longitud, manteniendo la misma longitud de reposo. Como consecuencia, una ruptura individual puede disparar una avalancha de rupturas.

Para comprender la relación que tiene la intensidad del desorden en el proceso de ruptura de las secciones delgadas de materiales heterogéneos, realizamos un gran número N de simulaciones. Específicamente usamos, por cada valor de intensidad del desorden ξ , $N = 1000$, para los sistemas con tamaños $L = 16$, $L = 24$, $L = 30$; $N = 800$, para el tamaño $L = 36$; $N = 500$ para $L = 42$; y $N = 50$, para $L = 50$. Cada simulación diferente corresponde a un valor distinto de la semilla del generador aleatorio. La forma de estudiar esta relación es estudiar el efecto que tiene la intensidad del desorden en la estadística de las avalanchas.

6.2.4.1 Proceso de fractura

Como lo discutimos anteriormente, el proceso de fractura no ocurre de manera suave; por el contrario, evoluciona por medio de ráfagas (llamadas también avalanchas). El algoritmo consiste en aumentar el valor del parámetro de fractura α hasta hallar aquel valor que cause el rompimiento de un resorte individual. Una vez esto ha sucedido, se remueve el resorte, lo cual causa una redistribución de esfuerzos que puede a su vez crecer, al causar una o varias rupturas y sus consecuentes redistribuciones. La ráfaga de rupturas parará cuando no hay más resortes que estén sujetos a un esfuerzo superior a su umbral de ruptura, para este valor particular del parámetro de encogimiento y estas condiciones iniciales. Para poder comprender la forma general en que las fracturas y las ráfagas se relacionan con el desorden ξ , efectuamos diferentes simulaciones para el mismo valor del desorden.

Pongamos atención en primer lugar a los tamaños de las avalanchas. Hay que tener en cuenta que una avalancha de tamaño grande no necesariamente consiste en rupturas de enlaces contiguos; de otro lado, para el caso de los sistemas que tienen un bajo nivel de desorden

resulta que las fracturas grandes están espacialmente localizadas. Más aún, estas fracturas grandes ocurren, en estos casos, al comienzo de la simulación; debido a la acumulación de los esfuerzos.

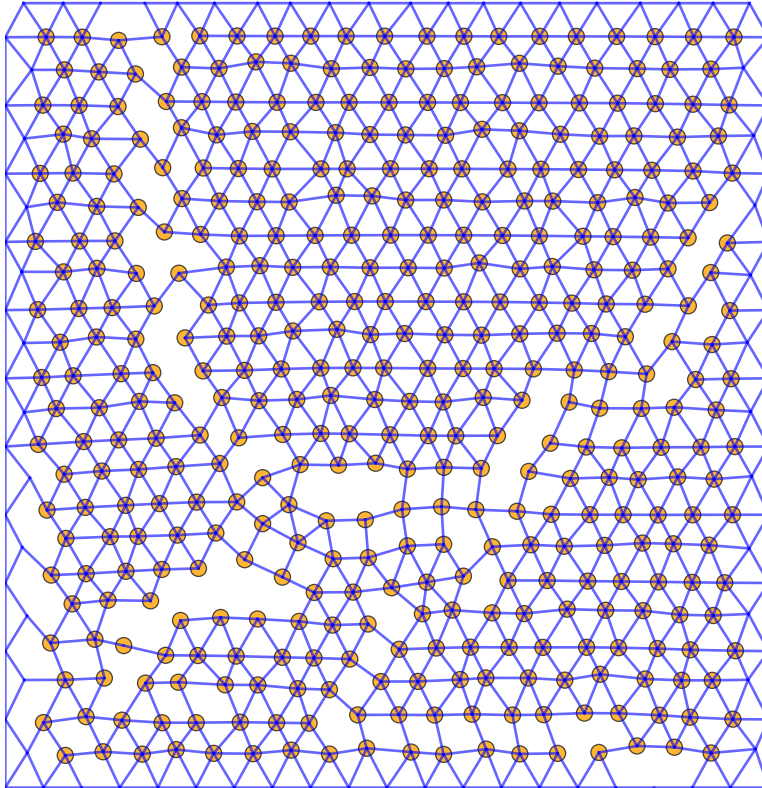


Figura 2. Primera avalancha grande para el valor de desorden de $\zeta = 0.01$. Las distribuciones angostas favorecen la aparición de fracturas grandes, como se evidencia comparando con la configuración inicial anterior.

(Fuente: Tomado de Villalobos *et al.*, 2011).

Una forma de observar este proceso es notar que a medida que se va aumentando el valor del desorden del sistema se va reduciendo el tamaño de la primera avalancha que ocurre. Como se ve en las figuras que acompañan el presente texto.

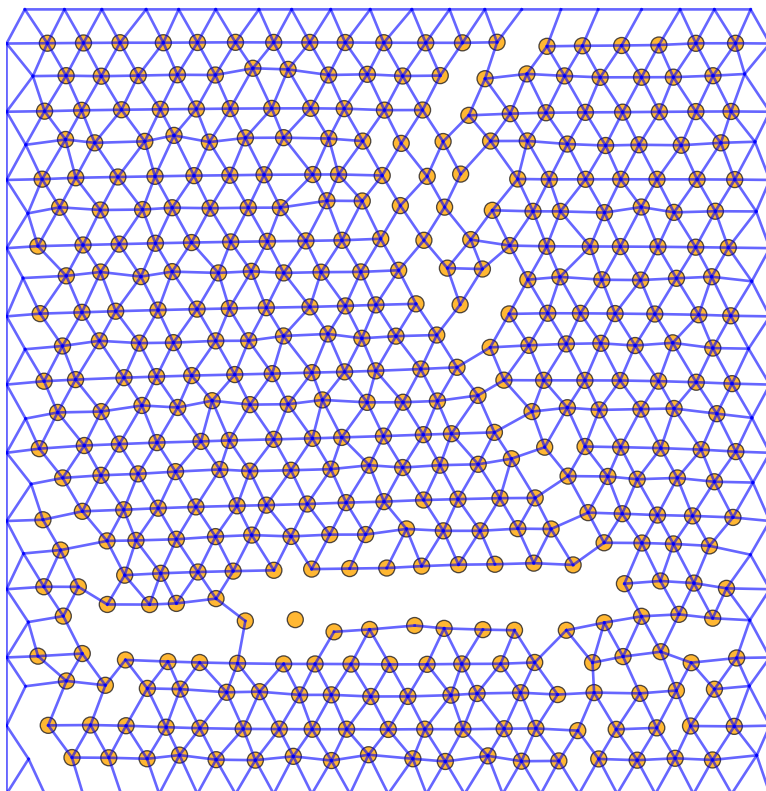


Figura 3. Primera avalancha grande para el valor de desorden de $\varepsilon = 0.1$. Las distribuciones angostas favorecen la aparición de fracturas grandes.
(Fuente: Tomado de Villalobos *et al.*, 2011).

El proceso opuesto ocurre cuando hay bastante orden en el sistema. Allí tendremos que las rupturas iniciales son pequeñas, con $D \approx 1$ y no tienen una correlación espacial, pareciesen dispararse de manera totalmente aleatoria en todo el espacio de la simulación. Una fractura larga no ocurre, entonces, debido a una única avalancha. Por el contrario, las fracturas grandes solo aparecen debido a la unión de diferentes microfracturas, mediante la aparición de fracturas de unión (en inglés, *gapping cracks*), que unen dos microfracturas.

A medida que el proceso de secado continúa, tanto como para el caso de bajo desorden como en el caso de desorden alto, la aparición de

las superficies libres que ocurre al crearse fracturas grandes previene la formación de nuevas fracturas. La forma general de estas fracturas es similar a las que se han observado en el secado de materiales compuestos, en los que el desorden del sistema viene de distribuciones aleatorias de tres tipos de enlaces, los cuales representan la interacción entre los ingredientes del compuesto (ver, por ejemplo, Sadhukan *et al.*, 2011; Nag *et al.*, 2010; Sadhukan, 2007).

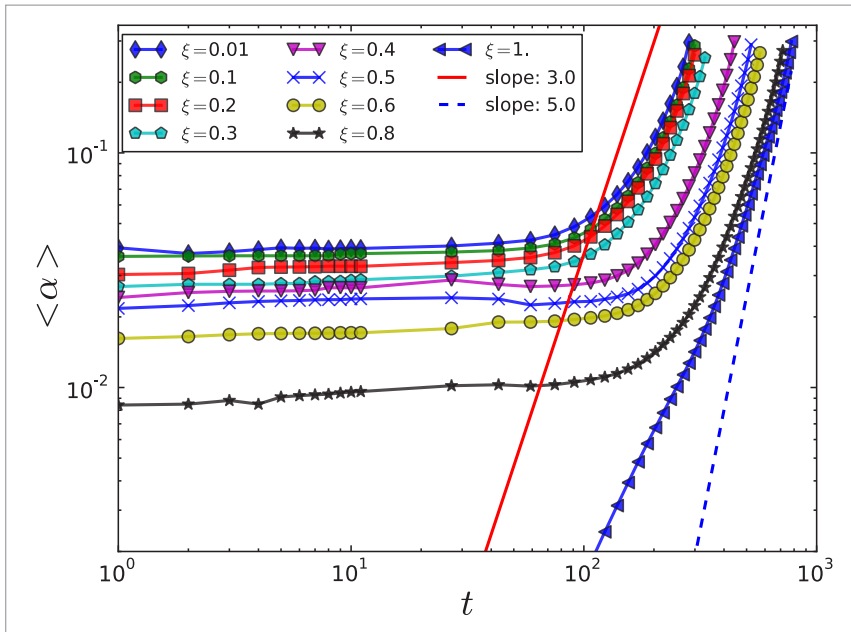


Figura 4. Reducción relativa de la longitud de los resortes $\langle \alpha \rangle$ como función del tiempo t , para diferentes valores de la cantidad del desorden ξ . El tamaño del sistema se fijó en $L = 30$. Los valores han sido agrupados en conjuntos $\Delta t = 1$ para $0 < t < 10$ y $\Delta t = 16$ para $t > 10$.

(Fuente: Tomado de Villalobos, 2011).

En lo que sigue hablaremos de promedios en el ensamble si son sobre simulaciones que comparten los mismos parámetros pero que tienen diferente semilla del generador aleatorio; y usaremos como símbolo $\langle \alpha \rangle$.

Una de las formas de analizar la evolución del proceso de secado es evaluar la relación que existe entre el promedio sobre el ensamble

del parámetro de secado $\langle \alpha \rangle$ como función del tiempo α . Estas simulaciones se ven en la figura que acompaña el presente texto. Aquí podemos notar la existencia de dos regímenes diferentes en las curvas de $\langle \alpha \rangle(t)$, presentadas para diferentes valores de ξ . Al comienzo del proceso de secado existe un valor prácticamente constante para $\langle \alpha \rangle$; y este régimen se extiende en dos órdenes de magnitud del tiempo, lo cual implica un gran número de pasos para los cuales si acaso hay un muy pequeño cambio en el parámetro de secado (es decir, $\delta\alpha \ll 1$). Luego de este, sigue un segundo régimen de aceleración rápida del proceso del secado, durante el cual sucede una rápida reducción de la longitud. La razón de la transición entre estos dos regímenes es la aparición de una fractura dominante, la cual atraviesa el sistema en dos dimensiones. De hecho, un análisis del sistema muestra que el cambio entre los dos regímenes ocurre justamente en el tiempo en que aparece la fractura que atraviesa el material. Aunque la fractura misma ocurre para todos los diferentes valores de ξ , su forma misma depende fuertemente del valor preciso de ξ .

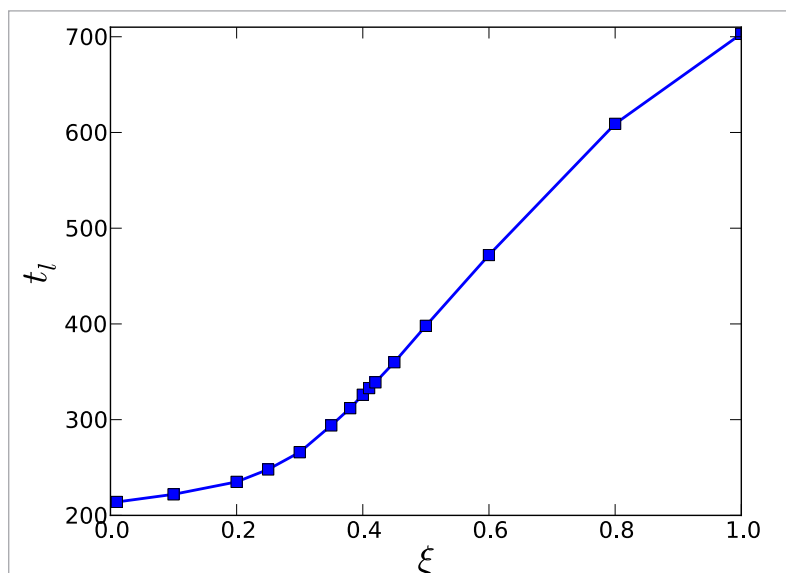


Figura 5. Número promedio de pasos t_l requeridos para llegar a un valor de encogimiento de $\alpha_f = 0.7$, para diferentes valores del desorden ξ , en un sistema de tamaño $L = 30$.

(Fuente: Tomado de Villalobos, 2011).

Otra característica que se puede ver de la gráfica anterior es que al aumentar el valor del desorden se produce un corrimiento de las funciones hacia la derecha, en el eje temporal. Esto quiere decir que las simulaciones con valores de desorden más altos demorarán más en terminar. Una forma de ver este fenómeno está en la gráfica siguiente, en la que tenemos el desorden ξ en el eje horizontal, y el tiempo necesario para llegar a una contracción de $\alpha_f = 0.7$ en el eje vertical. Allí es claro que el número de pasos necesarios para llegar al secado es una función monótona creciente del desorden; en otras palabras, el fenómeno de la contracción se desacelera al aumentar el desorden. Podemos ver en la gráfica que existe un cambio de curvatura alrededor del valor crítico $\xi \approx 0.5$, donde la pendiente de la gráfica llega a un máximo. Si se pensase en la tasa de cambio se podría decir que el sistema tiene dos fases, dependiendo de la cantidad del desorden: una fase de bajo desorden, que evoluciona rápidamente; y una fase de alto desorden, que evoluciona de manera más lenta. La separación entre estas dos fases es un punto de inflexión.

Hasta ahora hemos estudiado características globales del sistema. En lo que sigue nos enfocaremos en describir las propiedades estadísticas de las avalanchas de rompimientos.

6.2.5 Dinámica de las avalanchas

En lo que sigue definiremos como el tamaño promedio de la avalancha, menos el tamaño mínimo de una avalancha $\Delta_{\min} = 1$. La primera gráfica acompaña el presente texto, y allí hemos incluido el tamaño promedio de la avalancha $\bar{\Delta}$ como función del parámetro de encogimiento.

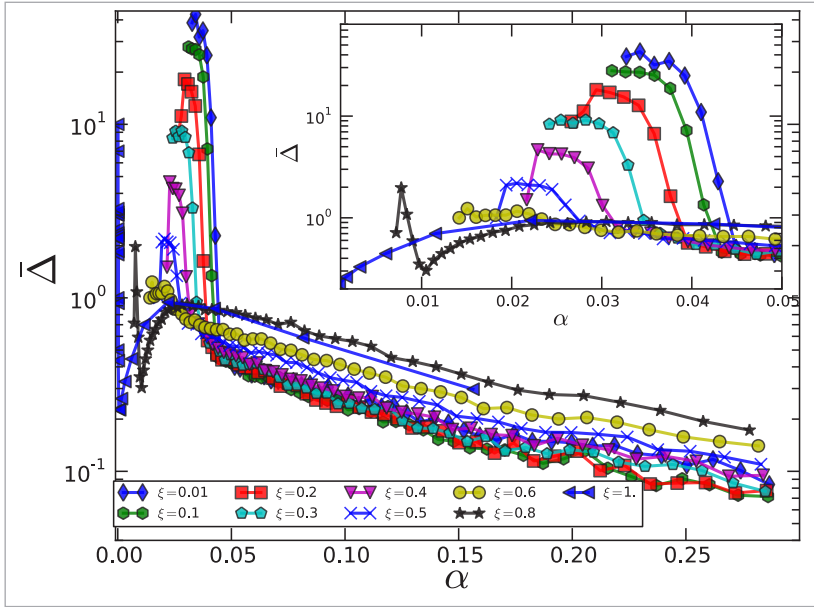


Figura 6. Promedio aritmético de los tamaños de las avalanchas $\Delta(\alpha)$ como función del parámetro de encogimiento α , para valores diferentes del desorden ξ . Cada curva es el promedio sobre diferentes instancias del sistema. *Inserto:* Para valores del desorden altos (por ejemplo, $\xi = 1$), hay un único máximo que corresponde a la avalancha más grande; la cual ocurre al comienzo de la simulación. Este máximo desaparece cerca a la transición $\xi_c = 0.6$, y luego aparece un segundo máximo local. Para todos los casos, existe una relación exponencial entre Δ y α al final del proceso de secado. (Fuente: Tomado de Villalobos, 2011).

La característica más importante de la gráfica es la discontinuidad de salto que ocurre al comienzo del proceso de secado, en la que se pasa de cero a un valor bastante alto comparado con el valor promedio de $\Delta(\alpha)$ (de hecho, está entre uno y dos órdenes de magnitud por encima). Dicho salto ocurre porque al inicio del proceso de secado hay una avalancha de tamaño grande, la cual es causada por la acumulación inicial de esfuerzos en el sistema. Nótese que su altura decrece al aumentar el desorden del sistema, y desaparece para un valor de $\xi_c \approx 0.7$; que es el valor para el cual $\Delta(\alpha)$ se convierte en una función monótonamente decreciente. Esta característica es congruente con resultados anteriores

de la literatura sobre la estructura de los patrones de fractura, mostrando cómo las avalanchas grandes ocurren debido a la coalescencia, y no debido a una única avalancha grande (Sadhukhan, 2011; Nag, 2010). Después de cierto valor crítico, las curvas $\Delta(\alpha)$ se aproximan a una línea recta en la representación semilogarítmica, implicando un decaimiento exponencial $\bar{\Delta} \approx e^{-A\alpha}$ para todos los diferentes valores del desorden ξ . El factor A es independiente de ξ .

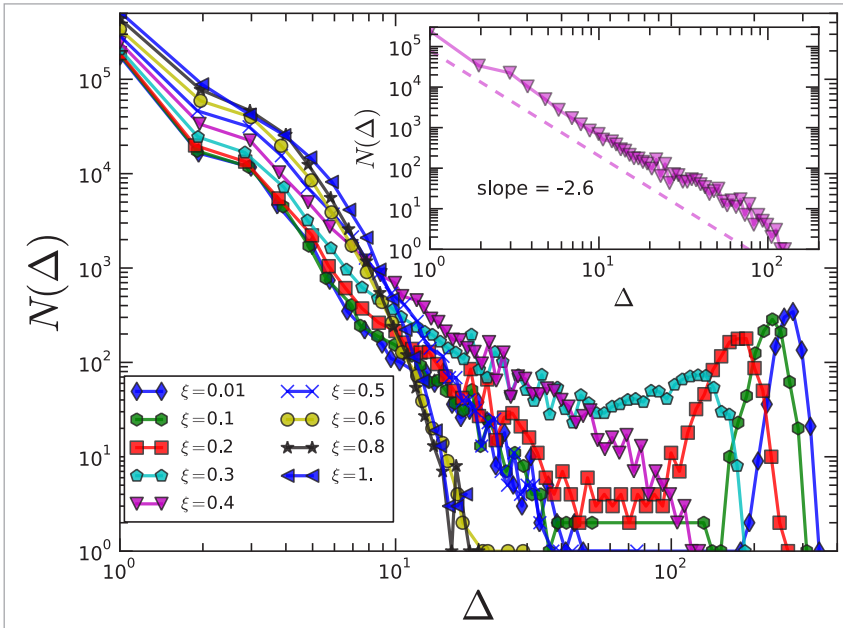


Figura 7. Distribuciones de tamaños de avalanchas $N(\Delta) \propto P(\Delta)$ para un sistema de extensión lineal $L = 30$; y varios valores del desorden ξ . Inserto: distribución del tamaño de las avalanchas para el punto crítico ξ_c , se obtiene un buen ajuste a una ley de potencias caracterizada por el valor de -2.6 . (Fuente: Tomado de Villalobos, 2011).

Como hemos señalado a lo largo de este capítulo, una forma de estudiar los modelos estadísticos de fractura es analizar la distribución de tamaños de avalanchas. La figura que acompaña este texto muestra esta distribución, para el caso del modelo de secado del que hemos estado hablando, para diferentes valores de la cantidad de desorden en el sistema ξ . Se pueden diferenciar dos tipos de comportamiento, dependiendo de la cantidad del desorden. Si esta es baja, como se ve

en el caso de $\zeta = 0.1$ (pentágonos verdes), la distribución tiene dos secciones. La primera, a valores altos de Δ , tiene una forma que recuerda a una normal. La interpretación que se le puede dar a este pico es que corresponde a una avalancha grande que ocurre al comienzo de la simulación. La segunda parte de la distribución muestra un decaimiento exponencial. Dado que la fractura que ocurrió al comienzo generó una primera fractura grande que, en general, puede recorrer todo el material, las siguientes avalanchas que ocurren en el sistema son de un tamaño menor.

Para valores grandes del desorden, en el otro extremo, la muestra tiene tanto resortes débiles como fuertes. Esto previene la formación de una fractura grande al comienzo de la simulación, y por tanto, el proceso de fractura ocurre en una sucesión de avalanchas pequeñas que eventualmente se unen y relajan las fuerzas no balanceadas durante el proceso de contracción. En consecuencia, la distribución $P(\Delta)$ se expande en un rango limitado y muestra decaimiento exponencial.

Estos dos tipos de comportamiento han sido denominados en la literatura (Villalobos, 2011) fase de la gran fractura aislada (en inglés, *isolated large crack phase*) y fase de coalescencia (en inglés, *coalescence phase*). En la fase de la gran fractura aislada, el crecimiento de la fractura está dominado por la aparición de la fractura que atraviesa la muestra al comienzo del proceso de contracción. En la fase de coalescencia, en contraste, la fractura grande que ocurre en el sistema se forma debido a la unión de diferentes fracturas aisladas pequeñas, y sucede al final de la simulación. Como se puede ver, las dos fases tienen diferentes tamaños de avalancha característicos. Es posible encontrar un valor del desorden del sistema en el cual se equilibran las contribuciones de las dos fases, logrando una distribución de tamaños que es libre de escala. El valor crítico del desorden es $\zeta_c = 0.40 \pm 0.01$, para el cual la distribución de probabilidades se convierte en una ley de potencias de la forma:

$$P(\Delta) \sim \Delta^{-\tau},$$

como se ve en el inserto de la figura que acompaña el texto. Nuestras simulaciones dan un valor numérico de $\tau = 2.60 \pm 0.08$, el cual es

prácticamente igual al valor del exponente de la teoría de campo medio $\tau = 5/2$ de la que hablamos en la discusión sobre los modelos de haces de fibras (Pradhan *et al.*, 2010; Pradhan *et al.*, 2006; Hidalgo *et al.*, 2009), lo cual apoya la idea de que la estadística de las avalanchas en las fracturas debidas al secado están dominadas por las interacciones de largo rango propias de la distribución de esfuerzos que vemos en este sistema.

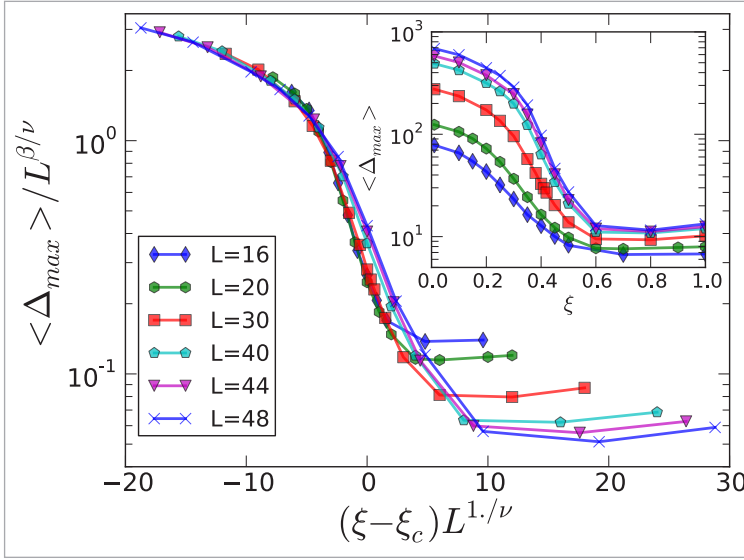


Figura 8. Promedio aritmético del tamaño de la avalancha más grande, para diferentes tamaños del sistema, como función del desorden del sistema ξ . Las diferentes curvas colapsan en una única forma universal, cuando se aplica una transformación (definida en los ejes de la figura). Los valores usados son $\xi_c = 0.4$, $\beta/\nu = 1.4$ y $1/\nu = 1$. *Inserto:* Datos originales, antes de la transformación. (Fuente: Tomado de Villalobos 2011).

La transición que ocurre entre estas dos fases se puede caracterizar mediante el cálculo del promedio de la avalancha más grande que ocurre en el sistema $\langle \Delta_{max} \rangle$, de hecho esta cantidad se puede ver como el parámetro de orden de la transición. Observe la gráfica que acompaña el presente texto. Allí se puede ver de manera clara cómo $\langle \Delta_{max} \rangle$ es una función monótonamente decreciente de la cantidad de desorden en el sistema ξ . Para las diferentes curvas, que corresponden a valores distintos del tamaño del sistema, podemos ver que existe un punto de inflexión (por ejemplo, $\xi = 0.6$ para $L = 48$). Al aumentar el tamaño

del sistema, vemos cómo hay un corrimiento de las curvas de $\langle \Delta_{\max} \rangle$ hacia valores más grandes de desorden; pero la forma funcional es la misma. De hecho, en la figura hemos mostrado cómo se puede hacer un reescalamiento de los ejes, con lo que se obtiene el colapso de las diferentes simulaciones hacia una única curva universal. Este colapso implica que existe la siguiente relación:

$$\langle \Delta_{\max} \rangle(L, \xi) = L^{\beta/\nu} f((\xi - \xi_c) L^{1/\nu}),$$

en donde los valores de los exponentes críticos se obtienen numéricamente como $b/n = 1.4$ y $1/n = 1$, en concordancia con el valor de n que Toussaint y Pride obtuviesen para los modelos de daño cuasiestáticos en el régimen de bajo daño (Toussaint *et al.*, 2005). En nuestro caso, los valores fueron obtenidos mediante un ajuste cuidadoso de los parámetros hasta que se logró un buen colapso, dado que los métodos numéricos resultaron ser muy ruidosos como para intentar un método más elaborado.

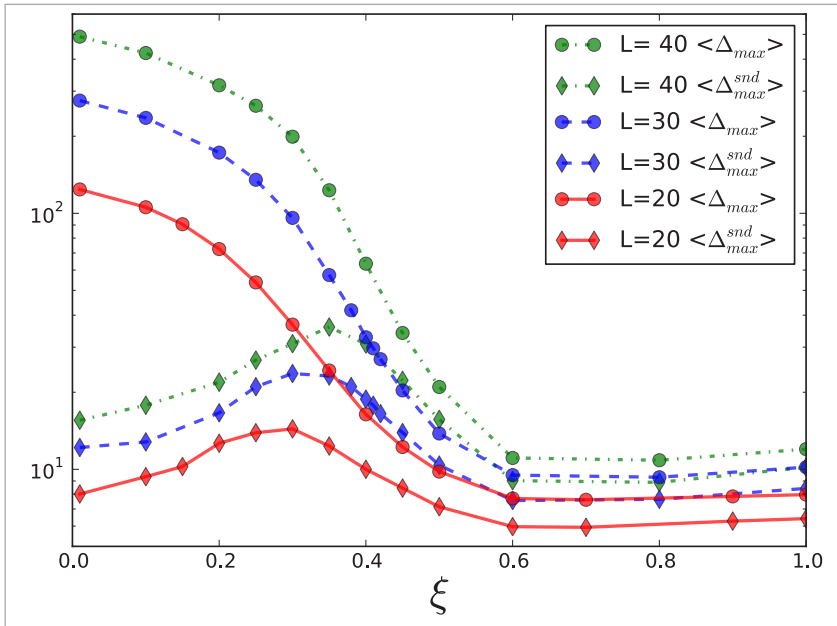


Figura 9. Promedio aritmético de la primera y segunda avalanchas, para diferentes valores del parámetro de desorden ξ .

(Fuente: Tomado de Villalobos, 2011).

Finalmente, hacemos una comparación entre el promedio de la avalancha más grande $\langle \Delta_{\max} \rangle$ y la segunda avalancha más grande $\langle \Delta_{\max}^{2nd} \rangle$, como función de la intensidad del desorden ξ . Se puede ver que debajo del valor crítico $\xi < \xi_c$, el tamaño de la avalancha más grande es una fracción finita del tamaño del sistema, y la segunda avalancha es órdenes de magnitud más pequeña. Por el contrario, al aumentar el desorden ambas cantidades son comparables. Esto refuerza nuestra interpretación de que valores bajos del desorden generan un comportamiento que está guiado por la aparición de las avalanchas grandes, mientras que al aumentar el nivel del desorden esta distinción se hace menos interesante. Note cómo nuevamente existe un valor crítico del desorden, para el cual cambia la curvatura de $\langle \Delta_{\max} \rangle$ y se llega a un máximo de $\langle \Delta_{\max}^{2nd} \rangle$.

6.3 Modelos de agregación en materia suave (*coarse graining*)

La reología es el estudio de la deformación de los líquidos ante diferentes condiciones de forzamiento o de frontera (movimiento de las superficies, etc). Los fluidos se pueden tipificar con respecto a su respuesta reológica en dos categorías básicas, newtonianos y no newtonianos. Estos últimos también se llaman fluidos complejos, toda vez que presentan una rica gama de comportamientos reológicos. La razón subyacente de esta variabilidad está en la complejidad a nivel microscópico, bien sea porque la arquitectura compleja como porque la misma molécula puede adoptar un gran número de configuraciones distintas (Briels, 2009). Un ejemplo clásico citado por de Gennes (1991) es la forma en que la savia del árbol de caucho fue utilizada por los indígenas del Amazonas para producir una bota: recolección, moldeado en el pie, y finalmente “secado”. Desde el punto de vista microscópico, lo que sucede es que los polímeros, en fibras individuales, son unidas por puentes construidos por el oxígeno presente en las burbujas de aire. Este proceso logra transformar el líquido en el caucho; una pequeña transformación química induce un cambio drástico en las propiedades mecánicas.

6.3.1 Métodos de agregación en materia suave (*Coarse Graining*)

Como mencionamos antes, la materia suave se caracteriza por la complejidad microscópica. Esto lleva a que una descripción de estos sistemas deba tratar con un gran número de grados de libertad; piénsese en decenas de átomos por monómero, multiplicado por cientos de monómeros por polímero, multiplicado por cientos o miles de polímeros. Ahora, ¿son todos los grados de libertad tratados de la misma manera por los métodos experimentales? O en otras palabras, ¿son igual de importantes para la reología? Briels (2009) propone que esto no sucede así. Por ejemplo, un polímero con forma de estrella consiste en un número muy grande de polímeros lineales que se unen todos en un punto central. Tanto su movimiento en solución como cuando se realizan mediciones reológicas, el movimiento principal del sistema consiste en el del centro de masa. Las coordenadas restantes pueden entenderse como un potencial efectivo, o una fuerza promedio, que afecta el movimiento de los centros de masa de las estrellas.

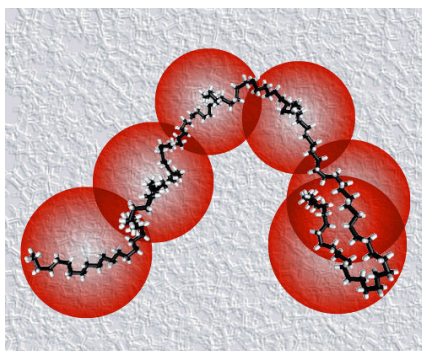


Figura 10. Esquema de la agregación (*Coarse Graining*). Los átomos y moléculas individuales están representados por las barras blancas y negras. En algunos casos, como se discute en el texto, es posible agregarlas usando unas nuevas partículas que interactúan a escalas mayores de distancia.
(Fuente: Tomado de *Computational Biophysics*, University of Twente, the Netherlands. URL: http://cbp.tnw.utwente.nl/Research/cg_pe.jpg)

La forma en que los métodos de agregación solucionan esta situación consiste en tomar el modelo completo y modificarlo mediante un procedimiento sistemático. Primero se determina cuáles son los grados

de libertad del sistema más rápidos, es decir, que tienen una frecuencia intrínseca mayor. El movimiento del centro de masa de la partícula se interpreta como debido a las fuerzas externas, digamos producto de un potencial, más la interacción debida al movimiento de los segmentos más pequeños. Estos últimos se pueden considerar una fuerza aleatoria que decae rápidamente.³ Por tanto, se rempazan por interacciones efectivas, construidas mediante un procedimiento unívoco que depende de la química del modelo bajo estudio. El modelo resultante se denomina modelo agregado (*Coarse Grained*).

Desde un punto de vista matemático, el proceso de agregación corresponde a eliminar M grados de libertad $q^M = \{q_1, \dots, q_M\}$ y sus correspondientes velocidades $\dot{q}^M = \{\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_M\}$ dejando en la simulación las $3N$ coordenadas $R^{3N} = \{R_1, \dots, R_{3N}\}$ y sus correspondientes velocidades $\dot{R}^M = \{\dot{R}_1, \dots, \dot{R}_M\}$. Las coordenadas que se retienen suelen ser las del centro de masa. Las coordenadas q^M se llaman coordenadas del baño térmico.

Método de dinámica sensible de partículas (RaPiD, del inglés *Responsible Particle Dynamics*)

Este es un método libre de malla utilizado para simular fluidos viscoelásticos. El objetivo de la simulación es determinar la influencia que tiene en la reología del fluido el hecho de que a nivel molecular existan diferentes macromoléculas enredadas entre ellas; por eso mismo el resultado de la agregación es un conjunto de variables que se conocen como los entrelazamientos (*entanglements*) entre las partículas, que dependen tanto de la variable temporal como de las coordenadas de centro de masa de las partículas. Piénsese en ellos como un ovillo que se encuentra centrado en la partícula. Los entrelazamientos tienen dos efectos: primero, ejerce una resistencia a unir dos partículas que se encuentren inicialmente separadas una distancia d ; ya que esto llevaría a que sus ovillos tienen que ocupar el mismo espacio y, por tanto, se van a entrelazar más. Segundo, ejerce una resistencia a separar dos partícu-

³ En el caso general, el teorema de fluctuación-disipación relaciona las fuerzas estocásticas con las configuraciones que ha tenido el sistema en el tiempo reciente. Dado que la dinámica de las coordenadas removidas es mucho más veloz que la de las coordenadas que se mantienen, es posible construir una simulación funcional; toda vez que la memoria de las fuerzas estocásticas decrece rápidamente (Briels, 2009).

las que estén separadas una distancia d ; ya que esto llevaría a que los ovillos que estaban inicialmente entrelazados tengan que desenredarse. Independientemente de la variable de posición, los entrelazamientos tienen un tiempo de relajación, que lleva a que las interacciones se disipen relajándose hacia los valores de equilibrio determinados por la configuración de las partículas (Santos de Oliveira *et al.*, 2011).

6.3.1.2 Fuerzas conservativas y dependientes de los entrelazamientos

La fuerza total que actúa sobre las partículas agregadas tiene una componente conservativa, que depende de las posibles configuraciones de la molécula, y una componente que depende del estado de entrelazamientos. Para la primera parte se usa la teoría de Flory-Huggins (FH). La energía libre es una función de la densidad local de partículas. RaPiD es un método libre de malla; para calcular la densidad local de partículas se usan unas funciones de peso ω

$$\rho_i = \sum \omega(r_{ij}),$$

Con N_p el número de partículas RaPiD en el sistema y $\omega(r)$ es una función de peso (puede ser una cuadrática con extensión lineal). La variable usada en la teoría FH es la densidad local, que se define simplemente como la densidad local sobre la densidad máxima:

$$\phi_i = \frac{\rho_i}{\rho_{max}};$$

por tanto, $\phi_i \leq 1$. La energía del sistema se puede aproximar como la suma de funciones de una sola partícula:

$$\Phi_c = \sum \alpha^P(\Phi_i)$$

Las fuerzas transitorias se incluyen en el modelo mediante la variable n_{ij} que relaciona cada una de las parejas de partículas i y j . El potencial de entrelazamiento es:

$$\Phi_i(r, n) = \frac{1}{2} \alpha \sum (n_{ij} - n_0(r_{ij}))^2$$

donde α determina la varianza de las fluctuaciones de n_{ij} y la suma cubre todas las parejas de partículas vecinas. La variable n_0 representa la fracción del número de entrelazamientos que se establecen en el equilibrio entre dos partículas, y depende de la probabilidad de que monómeros de dos cadenas estén muy cercanos. Se puede escribir como una función cuadrática cortada a cero a cierta distancia.

La densidad de probabilidad de encontrar una configuración dada r , con un número de entrelazamientos n es:

$$\Psi(r, n) \propto \exp\{-\beta[\Phi_c(r) + \Phi_i(r, n)]\}.$$

Las ecuaciones del movimiento (Briels, 2009; van der Noort, 2007) son:

$$dr_i = \frac{-1}{\xi_i} (\nabla_i \Phi_c + \nabla_i \Phi_i) dt + \nabla \left(\frac{k_B T}{\xi_i} \right) dt + \Theta_i \sqrt{\frac{2k_B T}{\xi_i}}.$$

El primer término corresponde a la contribución de las fuerzas de entrelazamiento y conservativas; el segundo a una corrección de la deriva, debido al carácter discreto de la simulación; y el tercero al desplazamiento browniano de las partículas, con Θ_i un vector aleatorio de varianza uno y media cero.

La fricción que siente cada partícula depende del número de entrelazamientos y de un valor de umbral. Se puede escribir de la siguiente forma:

$$\xi_i = \xi_0 + \xi_e \sum \sqrt{n_{ij} n_o(r_{ij})},$$

Los entrelazamientos evolucionan de la siguiente forma:

$$dn_{ij} = \frac{1}{\tau} (n_0(r_{ij}) - n_{ij}) dt + \Theta_{ij} \sqrt{\frac{2k_B T dt}{\alpha \tau}}$$

La primera parte produce el relajamiento de los entrelazamientos de sus valores actuales n_{ij} , a sus valores de equilibrio $n_0(r_{ij})$. La segunda parte representa la contribución aleatoria. Finalmente, se puede incluir una variación del tiempo de relajación τ con respecto a la distancia, que haga que las partículas que se encuentran más cercanas se relajen más rápidamente:

$$\tau_{ij} = \tau_0 \exp\left(\frac{-r_{ij}}{\lambda}\right).$$

6.3.2 Aplicaciones

Fusiones de polímeros con forma de estrella (*Melts of star polymers of low functionality*): una de las aplicaciones de este método es estudiar el comportamiento de altas densidades de polímeros con forma de estrella. Si la densidad es suficientemente alta, los brazos de los polímeros vecinos se entrelazarán. Estos entrelazamientos son demasiado costosos para simular bajo los métodos computacionales tradicionales, por lo menos sin utilizar un supercomputador. Utilizando los métodos de agregación que se han analizado en el presente capítulo, Briels *et al.* han logrado relacionar la reología de resinas sintéticas, conectando el comportamiento nanoscópico con el flujo de las resinas. Este es un fluido que presenta el fenómeno conocido como fluidificación por cizalla (del inglés *shear thinning*), en el que la viscosidad del fluido se ve reducida cuando se le aplican esfuerzos cortantes. Briels demostró que al aplicar la cizalla los polímeros con forma de estrella constantemente son desplazados de las partículas que fuesen sus vecinos anteriormente; lo que lleva a que el número de entrelazamientos de las partículas no corresponda con el valor de equilibrio. De esta manera se generan constantemente grandes fuerzas de entrelazamiento, las cuales no cuentan con tiempo suficiente para relajarse a sus valores de equilibrio cuando las partículas ya han sido desplazadas y los nuevos valores de equilibrio han cambiado. Una vez que las tasas de cizalla son suficientemente grandes, las fuerzas de entrelazamiento no tienen tiempo de relajarse y la viscosidad decrece. (Briels, 2009).

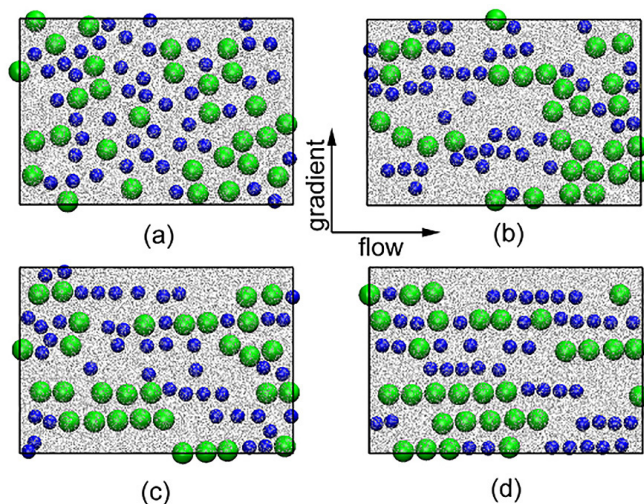


Figura 11. Coloides bidispersos en un solvente viscoelástico sujeto a cizalla. Las simulaciones con los métodos agregados son capaces de predecir la segregación de los coloides por tamaño.

(Fuente: Tomado de *Computational Biophysics*, University of Twente, the Netherlands. Santos de Oliveira *et al.*, 2013).

Alineamiento de partículas en fluidos viscoelásticos sometidos a cizalla: Otro de los campos en los cuales los modelos agregados tienen una superioridad a los métodos de simulación tradicional es el del movimiento de partículas coloidales en fluidos viscoelásticos. Santos de Oliveira *et al.* (2011) estudiaron una serie de simulaciones en las que las partículas coloidales se desplazaban en dos tipos de fluido viscoelástico: una solución micelar y una polimérica. La simulación es capaz de predecir la migración de los coloides en el caso de la primera y no de la segunda. Aún más, el trabajo posterior es capaz de prever la segregación de partículas coloidales por tamaño en estos tipos de fluidos (Santos de Oliveira *et al.*, 2013).

Discusión

En el presente capítulo realizamos una revisión bibliográfica (somera y parcial, por razones de espacio) de la literatura de la mecánica estadística

de fractura y de los modelos agregados. Para el primer tema, mostramos cómo se pueden usar herramientas como la teoría de renormalización, y las estadísticas de los tamaños de las avalanchas para estudiar la aparición de diferentes fases. En el caso de los modelos magnéticos introducidos por Sethna, estas dos fases se conocen como “*popping*” y “*snapping*”; que corresponden a fracturas pequeñas individuales que se unen en una grande y a fracturas grandes que atraviezan la muestra, respectivamente. En el caso de las fracturas debidas al encogimiento (por ejemplo, causado por el secado), vimos cómo estas dos fases se pueden llamar fase de coalescencia y fase de la fractura larga aislada. Así mismo mostramos cómo el modelo de secado dos dimensional de una partícula delgada permite mostrar la transición de fase entre estos dos estados, usando como parámetro de control la cantidad de desorden que existe en la muestra; en nuestro caso, introducida en los umbrales de ruptura del material.

Como segundo tema hablamos de los modelos agregados en materia suave, especialmente el caso de RaPiD. Vimos cómo en el caso de las macro-moléculas es posible simplificar la dinámica del sistema al remplazar una gran cantidad de grados de libertad originales por unas variables agregadas que tienen en cuenta la memoria de los estados previos del sistema. Este truco permite estudiar mediante simulaciones computacionales sistemas grandes y complejos como el movimiento de coloides en soluciones de líquidos viscoelásticos o la reología de fluidos viscoelásticos sujetos a esfuerzos de cizalla.

Referencias bibliográficas

- Briels, W. J. (2009). Transient forces in flowing soft matter. *Soft. Matter* 5: 4401-4411.
- Daniels, H. E. (1945). *The Statistical Theory of the Strength of Bundles of Threads*. Proc. R. Soc London A, 183, pp. 405-435.
- De Gennes, P. (1991). Materia suave. Conferencia Premio Nobel, 9 de diciembre.

- Griffith, A. (1921). The phenomena of rupture and flow in solids. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character 221: 163-198, doi: <http://0.1098/rsta.1921.0006>
- Gutenberg, B. y Richter, C. F. (1954). *Seismicity of the Earth and Associated Phenomena*. Princeton, USA: Princeton University Press.
- Hemmer, P. C., y Hansen, A. (1992). The Distribution of Simultaneous Fiber Failures in Fiber Bundles. *Journal of Applied Mechanics* 59(4): 909-914.
- Hidalgo, R. C., Kun, F., Kovács, K., y Pagonabarraga, I. (2009). Avalanche dynamics of fiber bundle models. *Phys. Rev. E* 80:051108.
- Leigh Phoenix, S. y Beyerlein, I. J. (2000). *Statistical Strength Theory for Fibrous Composite Materials*. Oxford: Pergamon.
- Lund, R. y Byrne, J. P. (2001). Leonardo da Vinci's tensile strength tests: Implications for the discovery of engineering mechanics. *Civil Engineering Systems* 18(3): 243-250.
- Nag, S., Sinha, S., Sadhukhan, S., Dutta, T., y Tarafdar, S. (2010). Crack patterns in desiccating clay-polymer mixtures with varying composition. *J. Phys.-Condens. Mat.* 22: 015402.
- Pradhan, S. y Chakrabarti, B. K. (2003). Failure properties of Fiber bundle models. *Int. J. Mod. Phys.* 17: 5565-5581.
- Pradhan, S., Hansen, A., y Chakrabarti Bikas, K. (2010). Failure processes in elastic fiber bundles. *Rev. Mod. Phys.*, 82: 499-555. Mar.
- Pradhan, S., Hansen, A., y Hemmer, P. C. (2006). Crossover behavior in failure avalanches. *Phys. Rev. E*. 74(1), 016122.
- Sadhukhan, S., Shashwati. R. M., Dibyendu, M., Tapati, D., y Sujata, T. (2007). Desiccation cracks on different substrates: simulation by a spring network model. *Journal of Physics: Condensed Matter* 19(35), 356206.
- Sadhukhan, S., Dutta, T. y Tarafdar, S. (2011). Crack formation in composites through a spring model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 390(4): 731-740.

- Santos de Oliveira, I. S., van den Noort, A., Padding, J. T., y den Otter, W. K. y Briels, J. (2011). Alignment of particles in sheared viscoelastic fluids. *The Journal of Chemical Physics* 135(10): 104-902.
- Santos de Oliveira, I.S., den Otter, W.K., y Briels, W.J. (2013). Alignment and segregation of bidisperse colloids in a shear-thinning viscoelastic fluid under shear flow. *EuroPhys. Lett*, 101, 28002.
- Santos de Oliveira, I. S., van den Noort, A., Padding, J. T., den Otter, W. K. y Briels, W. J. (2011). Alignment of particles in sheared viscoelastic fluids. *The Journal Of Chemical Physics* 135, 104902.
- Sethna, J. P., Dahmen, K. A. y Myers, C. R. (2001). Crackling Noise. *Nature* 410: 242-250.
- Sethna, J. P., *et al.* (1993). Hysteresis and hierarchies: dynamics of disorder-driven first-order phase transformations. *Phys. Rev. Lett.* 70: 3347-3351
- Shewchuk, J. R., (1996). Triangle: Engineering a 2D Quality Mesh Generator and Delaunay Triangulator. In: Ming, C. Lin and Dinesh Manocha, editors, *Applied Computational Geometry: Towards Geometric Engineering*. 1148:203-222
- Sornette, D. (1989). Elasticity and failure of a set of elements loaded in parallel. *Journal of Physics A: Mathematical and General* 22(6), L243.
- Toussaint, R. y Pride, S. R. (2005). Interacting damage models mapped onto ising and percolation models. *Phys. Rev. E.* 71(4), 046127.
- Van den Noort, A., den Otter, W. K. y Briels, W. J. (2007). Coarse graining of slow variables in dynamic simulations of soft matter. *Europhys. Lett.* 80: 28003
- Villalobos, G., Kun, F., y Muñoz, J. D. (2011). Effect of disorder on temporal fluctuations in drying-induced cracking. *Phys. Rev. E.* 84:041114.
- Wei (2010). *Fracture Mechanics: Integration of Mechanics, Materials Science and Chemistry*. Cambridge University Press.

7

● El modelo de Bohm de la mecánica cuántica

Favio Cala Vitery

7.1 Introducción

En este capítulo se contrastan dos versiones, o modelos, de la mecánica cuántica: el modelo estándar incluido en prácticamente todos los libros de texto y el modelo de Bohm. Se trata de un caso singular en la ciencia ya que cada modelo –al ser estos entendidos como interpretaciones de la realidad– implicaría una imagen, una ontología del mundo físico, es decir, cada modelo es un instrumento de interpretación de los fenómenos físicos. Y dada la presunción de objetividad de la ciencia, la imagen del mundo revelada por la mecánica cuántica ha de ser una. Aquí se argumenta que esta es mejor si se suscribe el modelo de Bohm de la teoría en detrimento de la versión estándar–Copenhague.

La aparente contradicción surge de la creencia de que todo formalismo científico empíricamente adecuado implica una sola interpretación física. En el caso de la mecánica cuántica, la idea de completitud, primordialmente, ha conducido también a la falsa creencia de que la interpretación de Copenhague es una necesidad lógica derivada del formalismo cuántico y que este formalismo, dado que se trata de una teoría completa, no admite mayor estructura complementaria para dar cuenta detallada de lo que ocurre cuando nadie está mirando. Esta es al menos la conclusión que parece desprenderse de los libros de

texto y de la consecuente enseñanza de la disciplina. Sin embargo, la versión de Bohm (1952), como veremos, es un claro contraejemplo a lo anterior.

La mecánica cuántica es sin duda la teoría cuyo poder predictivo ha generado el mayor avance tecnológico de todos los tiempos. Sin embargo, a pesar del exitoso consenso alrededor de su eficacia predictiva, desde sus inicios la teoría ha estado opacada por su ambiguo soporte conceptual. Y si bien los libros de texto, casi ochenta años después de establecido el formalismo cuántico (no relativista), no retratan fidedignamente esta situación, no es raro encontrar opiniones de algunos de sus grandes exponentes dando cuenta de su inconformismo con respecto a la pobreza interpretativa de la teoría. Al respecto Feynmann llegó a pronunciarse diciendo que “puedo afirmar con seguridad que nadie entiende la mecánica cuántica”¹ y Gell-Mann que “la mecánica cuántica es aquella disciplina misteriosa, confusa, que ninguno de nosotros entiende pero que sabemos cómo usar”.²

Por supuesto que Feynman y Gell-Mann se refieren a la mecánica cuántica en su versión estándar-Copenhague. Pero, si es tan claro que la versión de Copenhague resulta del todo ininteligible y confusa, ¿por qué, entonces, esta situación no es al menos reflejada en los libros de texto? ¿No debería alguien advertir sobre las dificultades conceptuales de la teoría? ¿Cómo comunicar, si no enseñar, lo inentendible? ¿Por qué no contemplar la posibilidad de modelos alternativos de la teoría? Y, entonces ¿cuál es la representación del mundo físico, el modelo científico que permite operar el micromundo cuántico?

No pretendo resolver todas estas cuestiones, aunque baste decir por ahora que una manera recurrente de eludir algunas de estas dificultades es apoyándose en la postura epistemológica de corte instrumentalista según la cual solo es legítimo conferir realidad física a los fenómenos como aparecen registrados en la experiencia. Lo demás, es decir, el aparato conceptual, los modelos y el formalismo de la teoría, queda, según esta perspectiva, en el depósito de las herramientas simbólicas usadas para cuadrar los números observados. No es raro,

1 Feynman (1967, p. 19).

2 Gell-Mann (1981, p. 39).

por esto, que el gran esfuerzo de la enseñanza de la disciplina se haya puesto en el desarrollo de habilidades operativas para calcular. En este sentido, Fuchs y Peres en un artículo de opinión muy divulgado y publicado en *Physics Today* (2000) afirmaron que “la teoría cuántica no describe la realidad física. Lo que hace es proveer un algoritmo para computar probabilidades de eventos macroscópicos (clics de detectores) que son la consecuencia de nuestras intervenciones experimentales.” Pero, ¿acaso la mecánica cuántica no se ocupa de átomos, núcleos, electrones, quarks y toda una serie de cosas a las que se asigna realidad física sin mucho reparo? O, en la práctica, ¿nos conformamos con limitar el dibujo de los fenómenos cuánticos a ciertas regularidades registradas en las mediciones?

En el presente capítulo se contrasta, brevemente, la interpretación de Bohm a la de Copenhague, usando como marco para ello los que a nuestro juicio deben ser los objetivos de la empresa científica.

7.2 Sobre los objetivos de la ciencia

El modelo de Bohm de la mecánica cuántica es empíricamente equivalente a la versión de Copenhague, es decir, da cuenta de todos los fenómenos gobernados por la mecánica cuántica no relativista (espectros, dispersión, superconductividad, tunelado, efecto Hall, etc.). Ello es debido a que comparte –en buena medida– su aparato formal, es decir, comparte un conjunto de ecuaciones y unas reglas operativas para producir predicciones contrastables con experimentos. Sin embargo, la imagen que producen de los fenómenos es bien distinta. De hecho, podría afirmarse que la versión de Copenhague no produce propiamente una imagen de los fenómenos cuánticos. Pero, ¿no debería acaso la empresa científica, desde sus fundamentos, sentar como uno de sus máximos ideales el de proporcionar explicaciones que permitan tener imágenes claras de los fenómenos?

En el siglo XVII, los filósofos de la naturaleza, quienes desde el Renacimiento habían desplazado su atención desde la retórica escolástica hacia la filosofía mecanicista, entendieron que el propósito de la

empresa científica –disculpemos el anacronismo- era producir modelos inteligibles que revelaran los mecanismos que operaban los movimientos de la materia y sus interacciones (Cala, 2006). Tal fue el propósito de Descartes, Leibniz y Newton. La culminación de la mal llamada revolución científica se produce cuando Newton logra matematizar un modelo unificado de la mecánica celeste y la mecánica sublunar. Desde entonces nadie puede imaginar una física, una filosofía de la naturaleza, sin un formalismo matemático robusto. Pero tampoco debería concebirse una física –una filosofía de la naturaleza- sin una interpretación inteligible.

En este sentido queremos proponer que aparte de (1) ser empíricamente adecuadas y (2) ofrecer descripciones apoyadas en aparatos formales sólidos, las teorías científicas deberían (3) proporcionar explicaciones claras o modelos inteligibles de los fenómenos.

Esto último (3) puede objetarse por resultar de interés puramente filosófico o metafísico, pero es también una ventaja de valor práctico ya que, por una parte, al sentar objetivos sobre fundamentos conceptuales sólidos, posibilita el avance hacia horizontes nuevos de investigación. Por otra parte, al presentar los fenómenos en forma entendible, se facilita la enseñanza de la teoría y el alcance de la misma para un público más amplio. Considérese, por ejemplo, lo siguiente: desde la perspectiva instrumental, ¿qué sentido tiene buscar una teoría de campo unificado si ya se cuenta con teorías empíricamente adecuadas (1) cuyos aparatos formales permiten una descripción ajustada de los fenómenos (2)? No existe ninguna experiencia, ni regularidad observada, que requiera el uso simultáneo de *la teoría general de la relatividad* (TGR) y de la mecánica cuántica. ¿Qué sentido tendría entonces preguntarse, desde la perspectiva instrumental, por lo que pasaría en el corazón de un agujero negro? En el fondo de la cuestión lo que se persigue es el ideal de inteligibilidad vinculado al realismo científico.

En resumen, tener teorías claras e inteligibles debería facilitar su entendimiento y, como consecuencia de ello, su desarrollo. Pero, ¿qué consideramos científicamente claro e inteligible? La respuesta a esta cuestión no dejará de ser debatible, así que se propone una respuesta simple al respecto: logramos aprehender de algún modo claro e inteli-

ble aquellas explicaciones que se fundamentan en ciertas características que la ciencia, desde su experiencia histórica, ha legado como indispensables para forjar la imagen y la intuición científica. En general, se trata de ideales asociados a la explicación clásica del mundo físico; aquellos ideales explicativos que permiten aprehender una imagen de los fenómenos naturales y dejan ver ciertos mecanismos para trazar, al menos con el pensamiento, los procesos incorporados a estos. Es en este sentido como se proponen los siguientes ideales explicativos: *visualización* en términos de trayectorias sobre un fondo espacio-temporal continuo, *causalidad/determinismo*, *objetividad* (procesos de medición sin intervención *ad hoc* del observador), transición consistente hacia el límite de descripción clásica de los fenómenos, y localidad.

Más adelante estos servirán como criterios para contrastar la efectividad explicativa de los modelos de la mecánica cuántica según Bohm y según la escuela de Copenhague. Para ello, en la siguiente sección se expone sucintamente el aparato formal de la teoría.

7.3 Sobre el formalismo cuántico, sus modelos e interpretación

En vista de que el formalismo cuántico es bien conocido, aquí se presenta brevemente en la formulación de Schrödinger por ser esta la que permite el vínculo más directo con el modelo de Bohm y su respectiva onda piloto. La descripción de los sistemas físicos en la teoría cuántica se apoya en los siguientes postulados:

- i. El estado físico de un sistema se describe por medio de un vector Ψ perteneciente a un espacio vectorial de Hilbert H .
- ii. La ecuación que gobierna la evolución temporal del estado Ψ , bajo la influencia del hamiltoniano H del sistema físico, es la ecuación de Schrödinger:

$$H \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (1)$$

- iii. Hay una correspondencia entre los operadores A del espacio de Hilbert H y los observables físicos a . Los valores de los observables físicos solo pueden ser aquellos de los valores propios de su operador asociado a_j donde,

$$A\Psi_j = a_j\Psi_j.$$

- iv. El valor esperado para una serie de observaciones de la cantidad a está dado por:

$$\langle\Psi|A|\Psi\rangle.$$

- v. Principio de superposición. En general, los estados físicos están descritos por una superposición de los estados propios del operador asociado y después de una medición el estado del sistema se corresponde con el del valor propio obtenido en dicha medición:

$$\Psi = \sum_k c_k \Psi_k \rightarrow \Psi_j, \quad (2)$$

donde $|c_j|^2$ es la probabilidad de obtener a_j como resultado de la medición.

7.3.1 Interpretación de Copenhague

La interpretación de Copenhague siguiendo principalmente las premisas de Bohr, Heisenberg y Born, se desarrolló a partir de la tercera década del siglo pasado para convertirse hoy en la versión estándar de la mecánica cuántica, según puede verificarse en la ortodoxia de los libros de texto. Y, si bien no existe un consenso definitivo acerca de lo que constituye esta interpretación, es posible extraer sus compromisos interpretativos más representativos. Estos son (Cushing, 1994):

- **Complementariedad:** todas las propiedades de los sistemas físicos existen solamente en parejas complementarias o conjugadas, es decir, para agotar la posible descripción de los procesos cuánticos es neces-

rio un lenguaje complementario pero mutuamente excluyente, pues una mayor manifestación de una de las propiedades tiene como consecuencia la ocultación de la otra. Se reconoce a Bohr por haber sentado los fundamentos filosóficos de la complementariedad. También se reconoce lo enormemente confuso que resulta este compromiso interpretativo. En cualquier caso, para Bohr el principio de incertidumbre debía entenderse como un claro ejemplo de la complementariedad de las descripciones físicas ya que este implicaba la imposibilidad de tener descripciones de los procesos atómicos que fueran simultáneamente causales (en términos de leyes de conservación o valores precisos de energía y momento) y descripciones espacio-temporales (localizaciones precisas en el espacio-tiempo). Otro ejemplo de este compromiso, que no ayuda mucho a clarificar su esencia, es el de la largamente publicitada dualidad onda/partícula.

- **Compleitud:** la descripción en términos del vector de estado o amplitud de probabilidad reúne “toda” la información que es posible adquirir sobre el estado de los sistemas físicos. Por tanto, indica la prohibición de cualquier alternativa de descripción causal/determinista en términos de trayectorias subyacentes bien definidas sobre un marco espacio-temporal.

- **Actitud positivista instrumentalista:** mucho se ha estudiado la influencia del Círculo de Viena en esta actitud interpretativa con respecto a los fenómenos cuánticos pero poco se ha dicho respecto al ambiguo compromiso interpretativo que ello implica; cuando la interpretación de Copenhague afirmó la completitud de la descripción cuántica en términos de la amplitud de probabilidad, lo que hizo fue establecer un compromiso ontológico que terminó por elevar a la categoría de entidad física real la función de onda. Y esto no puede resultar más en contravía con el pregonado instrumentalismo cuántico germinal. Algo de metafísica se coló en el corazón positivista de la escuela cuántica.

La interpretación de Copenhague conlleva una serie de dificultades. En primer lugar, el análisis del quinto postulado (v) plantea que

el proceso de medición ocurre mediante un extraño “colapso” de la función de onda que, por una parte, parece estar determinado por la intervención del observador y, por otra, no tiene explicación dinámica alguna. Aunque se han hecho muchos intentos por justificar, mediante procesos dinámicos, el colapso de la función de onda, hoy solo podría afirmarse que este ocurre sin causa ni explicación.

En su momento Heisenberg habló de una *potentia* inherente a la distribución de probabilidad que se consumaba, o se hacía efectiva, en el momento de la medición. Para él, la elección del valor propio era determinada por el observador (no explicó cómo). Por su parte, Dirac llegó a pensar que se trataba de una elección genuina de la naturaleza (tampoco explicó cómo). El asunto es que se tiene una ecuación dinámica determinista, la ecuación de Schrödinger, que gobierna la evolución de un sistema cuántico y que opera, por así decirlo, cuando nadie está mirando o midiendo, y un extraño colapso aleatorio de la función a uno de sus estados propios, que opera cuando alguien finalmente mira o registra un “observable”. Pese a los intentos por salvar la mecánica cuántica en términos de decoherencia, historias consistentes, retrocausación y demás, el embrollo sigue ahí.

En segundo lugar, tampoco resulta satisfactoria la transición al límite clásico que suele argumentarse en el contexto de esta interpretación. Para el límite clásico se ha sugerido que si $\hbar$ tiende a cero, debería resultar la descripción newtoniana. Sin embargo, este valor es una constante física fundamental y no tiene sentido considerar su variación (Berry, 1989). La alternativa –vía teorema de Ehrenfest– apenas indica que el centroide del ensamble sigue trayectorias clásicas sin que esto implique que los microsistemas lo hagan.

En todo caso, a pesar de todas las oscuridades de la versión estándar de la mecánica cuántica y de los intentos más o menos errados por esclarecerlas, la versión de Copenhague, al afirmar categóricamente la completitud de la teoría cuántica pareció dejar las siguientes lecciones bien fundadas:

- a) Que los postulados de la representación de Copenhague, y en particular el v postulado, que implica el colapso de la función de onda

- y el consecuente problema de la medición, debían colegirse como necesidades lógicas del aparato formal de la teoría.
- b) Que lo anterior proscriba cualquier representación alternativa que comparta el mismo aparato formal.
 - c) Que si la naturaleza es mecánico-cuántica, como parece ser, y está completamente descrita por la función de onda, esta [la naturaleza] debe ser intrínsecamente indeterminista. En consecuencia, no hay lugar para interpretaciones alternativas en términos de trayectorias o de las mal llamadas variables ocultas.

Pues bien, el modelo de Bohm, y la consecuente representación que se desprende de este, es precisamente el contraejemplo a lo anterior, es decir, se trata de una versión de la mecánica cuántica que viola a), b) y c). Veamos a continuación, de manera compacta, cómo resulta posible lo “imposible”.

7.3.2 El modelo de Bohm

La versión de Bohm de la mecánica cuántica, también conocida como la representación de la onda piloto o como la mecánica cuántica causal, fue inicialmente descubierta por De Broglie hacia 1927 y reinterpretada y desarrollada por David Bohm a partir de 1952.

La mecánica de Bohm trata los sistemas cuánticos como sistemas de partículas cuyo movimiento es descrito, o gobernado, en parte por la función de onda y su evolución de acuerdo con la ecuación de Schrödinger. Sin embargo, contrariando la versión de Copenhague, la función de onda no proporciona una descripción completa del sistema. La descripción es completada por las posiciones de las partículas que evolucionan de acuerdo con la *condición de orientación*, y esta vincula las velocidades de las partículas a la función de onda. En la versión de Bohm se describen sistemas de partículas cuya evolución es determinística y cuyas trayectorias están orientadas o guiadas por la función de onda, la onda piloto.

Antes de que se estableciera el formalismo cuántico la idea de que una onda piloto pudiera orientar las trayectorias de partículas ya había

sido propuesta por Einstein. En su momento Einstein esperaba que ciertos fenómenos de interferencia que involucraban fotones pudieran explicarse como si estos fueran orientados por el campo electromagnético. El enfoque resultó inapropiado para el campo electromagnético. En todo caso, De Broglie, poco después de la formulación ondulatoria de Schrödinger (1926), encontró una ecuación para describir el movimiento de partículas equivalente a la *condición de orientación* de Bohm aplicable a una función de onda escalar. De Broglie pretendió explicar también fenómenos de interferencia cuántica usando este enfoque, pero fue duramente criticado, por Pauli especialmente, y optó por abandonarlo del todo para convertirse en un entusiasta más de la naciente interpretación de Copenhague.

En 1927, poco después de la formulación de la versión matricial de la mecánica cuántica por parte de Heisenberg, Schrödinger apoyándose en la idea preliminar de De Broglie formuló su mecánica ondulatoria y esperaba, en efecto, que su versión pudiera recibir una interpretación realista de la dinámica ondulatoria, pero fue él quien no tardó en mostrar la equivalencia entre su formalismo y el matricial, y al parecer esta equivalencia sumada a la interpretación probabilística de Born le llevaron a considerar seriamente las dificultades que, asociadas al formalismo matricial de Heisenberg y la correspondiente interpretación de Copenhague se estaban manifestando. De ahí que llegara a preocuparle el asunto de que un gato pudiera estar, en un mismo instante, vivo y muerto.

Fue David Bohm, en todo caso, quien retomó el enfoque de la onda piloto y pudo fundamentar y entender mejor su significado. Veamos, con cierto rigor formal, qué fue lo que hizo Bohm.

Usando el mismo aparato formal de Copenhague, es decir, la ecuación de Schrödinger, pero expresando la función de onda $\Psi(x,t)$ en la forma:

$$\Psi = R \exp(iS / \hbar),$$

y al definir un campo de velocidades $v(x,t)$ por la llamada condición de orientación:

$$p = mv = \nabla S \quad (3)$$

la ecuación dinámica (1), la ecuación de Schrödinger, se transforma en:

$$\frac{dp}{dt} = -\nabla(V + U). \quad (4)$$

donde V es la energía potencial clásica y U es el llamado potencial cuántico, que está dado en términos de la función de onda como:

$$U = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R}.$$

De esta manera se recupera, con ciertas restricciones, la imagen clásica -(3), (4)-, mientras los efectos cuánticos –las desviaciones- son atribuidos al potencial U , que es explícitamente no-local. En la versión de la onda piloto, las predicciones estadísticas usuales de la versión de Copenhague se pueden obtener siempre y cuando se suponga que Ψ satisface la ecuación (1), y que el momentum de las partículas esté restringido por (3).

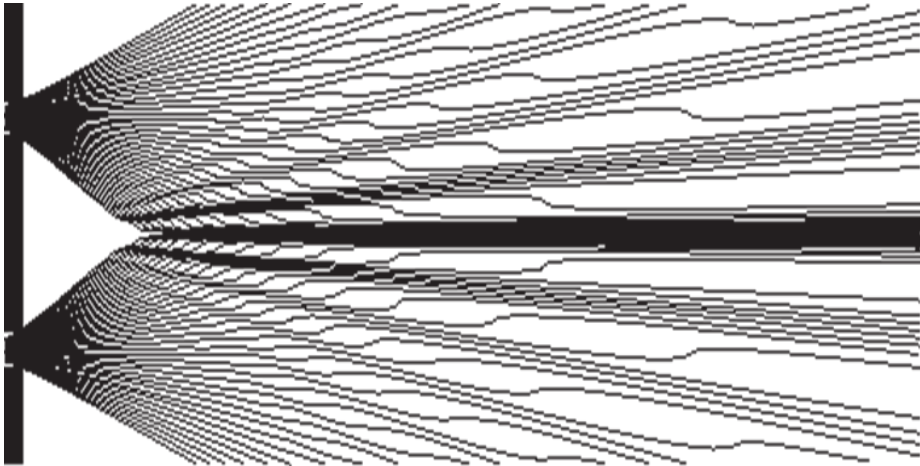
¿Qué hizo, entonces, Bohm? Lo imposible, según los promotores de la interpretación de Copenhague: añadir microestructura complementaria al formalismo para lograr una descripción determinista de la evolución de sistemas mecánico-cuánticos. Reiteramos: aunque en la versión de Bohm un sistema de partículas, por ejemplo, evoluciona de acuerdo con la ecuación de Schrödinger, la función de onda provee una descripción incompleta del sistema. La información complementaria, esto es, la que se requiere para completar la teoría, es suministrada por la posición de las partículas (vía potencial cuántico) que evolucionan de acuerdo con la *condición de orientación* (3), que depende de la distribución de velocidades expresadas en términos de la función de onda: la onda piloto.

En otras palabras, en este modelo de la teoría, la evolución del ensamble está coreografiada, por así decirlo, por la función de onda que guía a las partículas en sus trayectorias deterministas. De tal forma que la descripción estadística –tal como pensaba Einstein- estaría forzada por nuestra ignorancia de las condiciones iniciales precisas de los ensambles de microsistemas y por las dificultades para controlar dichas condiciones. Se trata de una limitación epistémica. La versión de Bohm recupera la imagen de un sistema físico entendido, por ponerlo de algún modo, como una entidad compuesta por partículas moviéndose sobre un fondo espacio-temporal cuyas trayectorias existen, como también las partículas, por supuesto, objetivamente.

Ha existido cierto grado de discusión sobre la manera de interpretar el papel de este potencial cuántico y su vínculo con la onda piloto; se trata de una entidad que introduce desviaciones importantes respecto a la dinámica esperada para un sistema clásico, pero es que esta es precisamente la fuente de la discusión: aunque la versión de Bohm recupera en parte la imagen del mundo clásico, se ocupa, en principio, de sistemas cuánticos, no clásicos. Recuérdesse todo el enredo alrededor del ejemplo canónico de la doble rendija. Toda la dificultad surge, en la versión estándar, porque se espera que los electrones (o algún otro tipo de partículas del dominio cuántico) sigan trayectorias clásicas cuando atraviesan una u otra rendija (o las dos), de tal forma que hay que introducir nociones como la de complementariedad que no parece ser algo distinto a una receta ambigua para abrir y cerrar los ojos, nombrar y no nombrar las cosas según se presentan. Una onda cuando registra un patrón de interferencia o una partícula ante la evidencia de los impactos individuales en la placa, por ejemplo. Ya Einstein había dicho que le gustaría creer que la Luna sigue allí aunque nadie la esté mirando. Hay que agradecer, en este sentido, la franqueza tardía de Bohr, quien en 1960 llegó a afirmar sobre la complementariedad –seguramente el rasgo más distintivo de la interpretación de Copenhague- que “sería razonable decir que ningún hombre, al que pueda considerarse filósofo, entiende realmente a lo que se refieren las descripciones complementarias”.³ Las ventajas que el modelo de Bohm y su representación de los fenómenos

³ Citado en Folse (1985, p. 9).

cuánticos, pueden evidenciarse en la gráfica que se incluye a continuación. Allí se ilustra lo “imposible” según la ortodoxia; a saber, el controversial experimento de la doble rendija en términos de trayectorias:



(Fuente: Imagen tomada de Goldstein, 2001).

Nótese que cada partícula pasa por una sola rendija y que las trayectorias corresponden a las de un sistema caótico cuya sensibilidad a las condiciones iniciales produce las desviaciones que resultan en el “patrón de interferencia” guiado por la onda piloto. Se trata, de todas formas, de un sistema determinista en el cual la rendija por la cual pasa cada partícula individual y la posterior localización del impacto respectivo en la placa, están determinados por la posición inicial de la partícula. El problema de la medición desaparece ya que no hay que recurrir a ningún tipo extraño de colapso de la función de onda. Las partículas tienen posiciones definidas entre mediciones sucesivas y la medición opera como un proceso dinámico aplicado a ensambles o a conjuntos de cuerpos.

El modelo de Bohm resuelve las dificultades interpretativas alrededor de este “experimento crucial” describiéndolo en términos de trayectorias no clásicas que producen impactos objetivos. Aún hoy está bastante arraigada la idea de que hablar de trayectorias en la mecánica

cuántica, como consecuencia del principio de incertidumbre, es un sinsentido. Pero ahí están las trayectorias de Bohm. Y en esta teoría las relaciones de incertidumbre de Heisenberg se entienden como limitaciones prácticas sobre el nivel de precisión con que resulta posible medir o conocer de manera simultánea los valores de ciertos observables no conmutables como la posición y la velocidad de una partícula. Pero no se trata, como en la versión estándar, de relaciones que cuestionan la “existencia” simultánea de estas variables.

Por otra parte, en lugar de proponer, sin mucho sentido, que la constante h tienda a cero para justificar la transición al límite clásico, en la versión de Bohm se puede pensar en una transición suave desde el micromundo cuántico hacia el mundo clásico. Ello porque no existe una ruptura ontológica tan radical como la presentada por la interpretación de Copenhague. Aquí, en cambio, las partículas son guiadas por la onda y como en el macromundo clásico, también se tienen partículas cuya existencia objetiva deja registrado su movimiento en la forma de trayectorias reales.

Las desviaciones cuánticas, que son introducidas por el potencial cuántico U , desaparecen progresivamente, por así decirlo, en la medida en que el sistema descrito se aproxima al límite clásico donde U formalmente tiende a cero. En este caso la ecuación 4 se convierte en la ecuación dinámica usual para un sistema clásico, en la segunda ley de Newton. Los efectos no locales, que seguramente representan la mayor divergencia con respecto a la fenomenología clásica, también desaparecen en la medida en que el potencial cuántico – que los introduce – tiende a cero, esto es, en la transición al límite clásico (Allori *et al.*, 2002).

Una de las objeciones más recurrentes a la versión de Bohm es la de que no existe causalidad recíproca (mutua) entre la onda piloto y los subsistemas que guía; las partículas, por ejemplo. La primera afecta las segundas, pero no a la inversa. Para algunos esto resulta de suma inconsistencia por desafiar las convenciones clásicas sobre acción-reacción. Pero, así como las partículas siguen trayectorias que divergen de las trayectorias que se esperarían para un sistema clásico, es sensato suponer que las convenciones clásicas sobre acción y reacción no se

sostengan en el micromundo. Lo que debe garantizarse, una vez más, es la transición al límite clásico y este es el caso.

Las partículas que componen un sistema, sus partes, sí mantienen influencias recíprocas (no locales) a través del potencial cuántico que, al codificar la influencia de todas las partes entre sí, engloba el carácter holístico de la teoría.

7.4 Localidad, separabilidad y la indiferencia de Einstein

En 1919, Einstein propuso el que seguramente es su aporte más interesante a la filosofía de la física: estableció la diferencia entre teorías constructivas y teorías de principios. Las teorías constructivas son aquellas que, partiendo de algún modelo o conjunto de entidades teóricas, permiten construir o “estructurar una imagen de fenómenos más complejos”. Un ejemplo sería la teoría cinética de gases que permite “explicar” toda una serie de fenómenos macroscópicos del comportamiento de los gases suponiendo que estos deben su comportamiento a las colisiones de un vasto número de moléculas. Las teorías de principios, por su parte, se fundan sobre generalizaciones empíricas bien establecidas que los fenómenos deben satisfacer. Estas generalizaciones, una vez elevadas a la categoría de principios, funcionan como restricciones que las teorías constructivas –la imagen de los fenómenos– deben cumplir. La contraparte sería la termodinámica, cuyos principios (leyes), se presume, son satisfechos por los fenómenos particulares sin que de estos ofrezca una explicación en términos de microestructura, trayectorias o colisiones. En cualquier caso la correspondiente teoría constructiva para estos fenómenos –la teoría cinética, en este caso– satisface los principios generales.

Según Einstein las teorías constructivas tienen la ventaja de ser “completas, claras y adaptables”, mientras que las teorías de principios proporcionan perfección lógica y seguridad en sus fundamentos.

Jeffrey Bub (2000) ha propuesto que la mecánica cuántica, en su versión estándar, debe considerarse como una teoría de principios. Estoy de acuerdo, pero añado algo más: la versión de Bohm, con su microestructura adicional, provee los elementos necesarios para ser

considerada como la versión constructiva para los fenómenos cuánticos. En esta teoría, partiendo del modelo de microsistemas compuestos por partículas en movimiento pueden construirse los fenómenos cuánticos, provisto que las trayectorias estén dirigidas, por principio físico de la naturaleza, por la función de onda. Es justamente en este sentido que la teoría de Bohm aporta inteligibilidad a los fenómenos generales de la mecánica cuántica. Satisface así el ideal científico (3) según el cual la ciencia debe proveer modelos inteligibles de los fenómenos.

Einstein también afirmó que “cuando se logra entender un conjunto de fenómenos naturales, esto invariablemente significa que se ha encontrado una teoría constructiva que cubre los procesos en cuestión”. Y se esperaría, según lo argüido aquí, que el modelo de Bohm hubiere resultado al menos sugestivo para él, por edificar una teoría constructiva y completa. No fue así. Einstein recibió la versión de Bohm con cierta apatía o indiferencia.

En todo caso, de la distinción entre teorías constructivas y teorías de principios se desprendía un compromiso evidente con alguna forma de realismo científico que, asociado a la posibilidad de proveer modelos inteligibles de los fenómenos físicos mediante la formulación de teorías constructivas, harían de la de Bohm una teoría próxima a los ideales de Einstein. Pero, y entonces, ¿por qué todo el asunto de la onda piloto resultó tan poco interesante para Einstein?

El realismo científico, que para Einstein era algo más que una postura filosófica, exigía, en sus manos, el cumplimiento de una serie de requisitos de inteligibilidad física que la versión de Bohm no llegó a satisfacer. Es decir, para superar el azar y la subjetividad de las descripciones físicas, no bastaba con restablecer la objetividad que aportaba la descripción determinista del formalismo de Bohm; también había que cumplir con otro ideal físico: la “separabilidad” espacial de los sistemas físicos. Y es que la separabilidad, o mejor, su violación, había sido el gran argumento utilizado por Einstein, desde EPR (1935), para argumentar que la mecánica cuántica era una teoría incompleta. Sobre el asunto de la separabilidad sigue habiendo cierta confusión. Lo que Einstein exigía era que para que a dos sistemas físicos –un par de partículas con espín tal y cual, por ejemplo– se les pudiera considerar

entidades físicas objetivas debería existir algún mecanismo para independizar su estado. El mecanismo, en el fondo, no era otra cosa que la exigencia de un segundo ideal, esta vez elevado a la categoría de principio: la localidad, esto es, la exigencia relativista de que la influencia causal entre dos sistemas (o eventos en este caso) no pueda transmitirse a una velocidad mayor que la de la luz o la velocidad de propagación del campo correspondiente.

En la versión de Bohm, el carácter no-local de la descripción física de los fenómenos cuánticos surge en forma explícita en el potencial cuántico. La violación del ideal o metaprincipio de separabilidad, tan aberrante para Einstein, resulta en consecuencia mucho más indiscutible en la versión de la onda piloto. De ahí, en buena medida, que el propio Bohm haya llegado a defender un cierto holismo metafísico que tendría su sustento físico en el carácter explícitamente holístico introducido por el potencial cuántico.

Hoy, con la venia del análisis retrospectivo que pone los teoremas de Bell en nuestro horizonte, se dirá que Einstein estaba equivocado al exigir una descripción local de los fenómenos cuánticos. Y lo que puede parecer paradójico es que Bell, considerado equívocamente por algunos como el sepulturero del enfoque de las variables ocultas, se haya convertido, una década después de la muerte de Einstein, en el principal abogado de la versión de Bohm de la mecánica cuántica. La paradoja no es tal. Bell hizo un análisis cuidadoso de todo el asunto de la separabilidad, la localidad y su posible relación con las mal llamadas variables ocultas. Leamos:

Pero en 1952 vi realizado lo imposible. Fue en unos artículos de David Bohm. Bohm mostró explícitamente cómo en efecto podían introducirse parámetros, en la mecánica ondulatoria no relativista, con cuya ayuda la descripción indeterminista podía transformarse en determinista. Más importante aún, en mi opinión, la subjetividad de la versión ortodoxa, la referencia necesaria al ‘observador,’ podían ser eliminadas. [...]

¿Pero por qué Born no me había hablado de esta ‘onda piloto’? ¿Al menos para señalar sus errores? Más sorprendente, ¿por qué siguió la gente produciendo “pruebas de imposibilidad” después de 1952, y hasta fechas tan recientes

como 1978? [...] ¿Por qué se ignora la imagen de la onda piloto en los libros de texto? ¿No debería acaso enseñarse, no como la única manera de hacerlo, sino como un antídoto contra la complacencia imperante? ¿Para mostrarnos que la vaguedad, la subjetividad, y el indeterminismo, no nos son impuestos por los hechos experimentales, sino por una elección teórica deliberada?⁴

Contrario a lo que sucede con la versión de Copenhague, la mecánica de Bohm, al satisfacer buena parte de los ideales explicativos heredados de la intuición clásica, presenta una imagen inteligible, explicativa y constructiva de los fenómenos cuánticos. Reproduzco de Cala y Espejo (2009) la siguiente tabla ilustrativa donde se contrastan las principales teorías físicas y su respectivo cumplimiento de los aquí llamados ideales científicos explicativos.

Teoría\ Ideal explicativo	Trayectorias-Visualización	Causalidad-Determinismo	Objetividad	Transición al límite clásico	Localidad
Mecánica clásica (Newton)	√	√	√	-----	X
Electromagnetismo (Maxwell)	√	√	√	-----	√
Relatividad general (Einstein)	√	√	√	√	√
Mecánica cuántica estándar (Copenhague)	X	X	X	X	X
Mecánica cuántica causal (Bohm)	√	√	√	√	X

Si bien la mecánica de Bohm es formal y explícitamente no local, la ruptura de la localidad es también una característica compartida por la versión de Copenhague y sigue siendo un tema de ardua discusión teórica sobre todo en el contexto del desarrollo de una teoría de campo unificado.

⁴ Bell (1987, p. 160).

La localidad se erigió como un ideal explicativo deseable desde que la teoría electromagnética, primero, y la teoría general de la relatividad, después, resolvieron el problema de la comunicación efectiva de fuerzas o interacciones en forma instantánea a distancia introduciendo como mecanismo de acción local el campo electromagnético y el campo gravitacional, respectivamente. Pero Bell demostró que la no-localidad es una característica de las predicciones cuánticas –compartidas por Bohm y Copenhague, en correlaciones de tipo EPR, por ejemplo- y esto ha llevado a pensar que seguramente la naturaleza entrañe mecanismos de influencia no-local, y que quizá ya sea tiempo de renunciar a uno de los más caros ideales científicos, la localidad, y creer en la posibilidad de que un cuerpo pueda actuar allí donde no está.

El modelo de Bohm, al implicar una representación inteligible del micromundo cuántico, debería considerarse como aquel que permite una ontología, una interpretación, más adecuada de los fenómenos cuánticos no relativistas. En todo caso, hay que decir que todo esto se enmarca en el contexto de una discusión abierta sobre el alcance explicativo de las teorías científicas y, por tanto, sobre la eficacia de sus modelos como instrumentos simbólicos de representación de los fenómenos. Desde el punto de vista científico, ¿se esperaría que un modelo baste para salvar las apariencias (correspondencia experimental) o debe este revelar la representación verdadera del fenómeno físico modelado?

Referencias bibliográficas

- Afriat, A. y Serelli, F. (1998). *The Einstein, Podolsky and Rosen Paradox*. New York: Plenum.
- Allori, V., Dürr, D., Goldstein, S., y Zanghì, N. (2002). Seven Steps Towards the Classical World. *Journal of Optics B* 4: 482-488.
- Ballentine, L. (1972). Einstein's Interpretation of Quantum Mechanics. *American Journal of Physics* 40(17): 63-71.
- Bell, J. S. (1964). On the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox. *Physics*. 1. Reprinted in Wheeler, J.A, y Zurek, W.H. (ed.), 1983. *Quantum Theory and Measurement*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

- Bell, J. S. (1966). On the Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics. *Reviews of Modern Physics* 38(3): 447-452
- Bell, J.S. (1966). On the Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics, *Reviews of Modern Physics* 38: 447-452.
- Bell, J.S. (1987). *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics*. *Reviews of Modern Physics* 38(3), 447.
- Bernal, J. D. (1978). *Historia social de la ciencia*. Barcelona: Editorial Península.
- Bohm, D. (1951). *Quantum Theory*. Englewood Cliff: Prentice Hall.
- Bohm, D. (1952). A Suggested Interpretation of Quantum Mechanics in Terms of 'Hidden' Variables, I and II. *Physical Review* 85: 166-179, 180-193.
- Bohm, D. y Hiley, B. (1993). *The undivided universe. An ontological interpretation of quantum theory*. New York: Routledge.
- Bohr, N. (1934). Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be considered complete? *Physical Review*, 48. In: Wheeler, J. A., y Zurek, W. H. (eds.), 1983. *Quantum Theory and Measurement*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Bub, J. (1997). *Interpreting the Quantum World*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Bub, J. (2000). Quantum Mechanics as a Principle Theory. *Studies in the History and Philosophy of Modern Physics* 31(1): 75-94.
- Butterfeld, J. (1998). Determinism and Indeterminism. In: Edward Craig (ed.), *Routledge Encyclopedia of Philosophy*, Vol. 3. London - New York: Routledge.
- Cala Vitery, F. (2006). La cuestión 31 de la Óptica o el programa de las fuerzas en la filosofía mecanicista. *Scientiae Studia* 4(2): 63-176.
- Cala Vitery, F., y Espejo, C. (2009). Bohm's account of quantum mechanics: interpretative advantages. *International Journal of Science Education*, 10: 54-56.
- Cushing, J. y Mc.Mullin, E. (eds). (1985). *Philosophical Consequences of Quantum Theory. Reflections on Bell's Theorem*. Notre Dame, IN: Notre Dame University Press.

- Cushing, J.T. (1994). *Quantum Mechanics: Historical Contingency and the Copenhagen Hegemony*. Chicago: The University of Chicago Press.
- Daumer, M., Dürr, D., Goldstein, S., y Zanghi, N. (1997). Naive Realism About Operators. *Erkenntnis* 45: 379-397.
- De Witt, B. y Graham, N. (eds). (1973). *The many-worlds interpretation of quantum mechanics*. NJ: Princeton University Press.
- Einstein, A., Podolsky, B. y Rosen, N. (1935). Can Quantum-Mechanical Description of Physical reality be considered complete? *Physical Review* 47: 777-780.
- Feynman, R.P. (1967). *The Character of the physical law*. Cambridge: MIT Press.
- Fine, A. (1986). *The shaky game. Einstein realism and the quantum theory*. Chicago: Chicago University Press.
- Folse, H. J. (1985). *The Philosophy of Niels Bohr*. Amsterdam: North-Holland Publishing.
- Fuchs, C. y Peres, A. (2000). Quantum Theory Needs No Interpretation. *Physics Today* 53(3): 70-71.
- Gell-Mann, M. (1981). *El Quark y el Jaguar*. Barcelona: Tusquets.
- Goldstein, S. (2001). Bohmian Mechanics. *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Disponible en: <http://plato.stanford.edu/entries/qm-bohm>.
- Healey, R. y Hellman, G. (eds.) (1998). Quantum Measurement: Beyond Paradox. *Minnesota Studies in the Philosophy of Science*. Minneapolis: University of Minnesota Press.
- Kochen, S., y Specker, E.P. (1967). The Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics. *J. Math. And Mech.* 17: 59-87.
- Mermin, N. (1985). Is the moon there when nobody looks? Reality and the quantum theory. *Physics Today* Abril: 38-47.
- Mittelstaedt, P. (1998). *The interpretation of quantum mechanics and the measurement process*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Omnès, R. (1994). *The interpretation of Quantum Mechanics*. Princeton: Princeton University Press.
- Pauli, W. (1948). Editorial on the concept of complementarity. *Dialectica* 2:3/4, 307-11.

- Schrödinger, E. (1935). The Present Situation in Quantum Mechanics. Translated by J. Trimmer. *Proceedings of the American Philosophical Society*, 1980:124, 323-328. Reprinted in Wheeler, J. A. y Zurek, W.H. (eds.), 1983. *Quantum Theory and Measurement*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Von Neumann, J. (1932). *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. Berlin: Springer-Verlag.



Este libro se terminó de editar
en la Editorial UTADAO
en el mes de marzo de 2017

El Modelado y Simulación (M&S) es una disciplina científica transversal que permite obtener un nivel de comprensión difícilmente alcanzable utilizando otro enfoque disciplinar. Al integrar técnicas matemáticas, formales, conceptuales y computacionales, el M&S permite el estudio e investigación en casi cualquier campo del conocimiento.

Este libro compendia algunos trabajos y resultados de investigación especialmente orientados hacia el estudio de sistemas naturales.

En el primer capítulo se describe el proceso para modelar sistemas climáticos y se refieren las características de algunos modelos atmosféricos, oceánicos y de microclima. En el segundo capítulo se integran la geoestadística y el modelado de cultivos para realizar una simulación que cuantifica el efecto de la variación espacial de la temperatura dentro de invernaderos en el crecimiento de cultivos de tomate. En el siguiente capítulo, el tercero, se desarrolla un modelo de simulación del tomate cultivado bajo condiciones de invernadero, y calibrado para las condiciones de climatización en la Sabana de Bogotá. En el cuarto, se utilizaron técnicas de modelado matemático con el fin de determinar cuáles de las variables morfológicas, tróficas y reproductivas propias de *O. niloticus* (Tilapia) -especie alóctona- son las que mayor peso tienen en el comportamiento de la especie, su establecimiento poblacional en la cuenca del río Sinú y las consecuencias biológicas de éste. El quinto capítulo introduce la teoría de los procesos estocásticos e ilustra su aplicación a problemas de dinámica de poblaciones. En el sexto capítulo se presentan modelos que establecen relaciones cuantitativas entre parámetros a escala nanoscópica y escala mesoscópica mediante el uso de elementos discretos individuales. Estos modelos han sido utilizados en campos tan diversos como los medios granulares, el fluido de los líquidos complejos, y la aparición y propagación de fracturas. Finalmente, en el último capítulo, se contrastan dos modelos de la Mecánica Cuántica: el modelo estándar-Copenhague y el modelo de Bohm. Allí se argumenta que el modelo de Bohm es aquel que permite una ontología más adecuada de los fenómenos cuánticos no relativistas.